SME0100 - Cálculo Numérico I

Segundo semestre de 2012

Lista de Exercícios

Exercícios básicos

1. Sabe-se que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

pode ser fatorada em C e D, ou seja, $A = CD$. Complemente as lacunas das matrizes C e D dadas a seguir.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & \omega \\ 0 & \theta & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $\alpha =$
- $\beta =$
- $\gamma =$
- $\theta =$
- $\omega =$

2. Dado o sistema $Ax = b$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

aplique uma iteração do Método de Gauss-Seidel a partir do ponto $x^{(0)} = (1.0, 0.75, -0.875)^T$ e calcule o erro relativo para o valor obtido. Utilize 4 dígitos significativos. Observação: Suponha que o método converge.

3. Considere o problema de minimização

$$\text{Minimizar} \quad f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2$$

e o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Qual a relação deste problema de minimização e a solução do sistema linear acima? Responda em, no máximo, 5 linhas.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o ponto inicial $x^{(0)} = (1,1,1)^T$ e $\epsilon = 10^{-2}$, aplique o Método das Potências para determinar o maior autovalor em módulo de A. Utilize, no máximo, duas iterações.

Exercícios de prova

1. Dentre os métodos que você estudou no curso para resolver sistemas lineares, qual é o mais adequado para resolver os sistemas $Ay = x$ que são utilizados no Método das Potência Inversas para calcular o menor autovalor em módulo da matriz A. Justifique sua resposta.

2. O polinômio característico de uma matriz A é dado por: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Dentre os métodos estudados no curso, qual você usaria para encontrar um autovalor de A?

3. Utilizando o método escolhido na questão anterior calcule um dos autovalores de A.

4. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

Para quais valores de α pode-se garantir a convergência dos Métodos Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel? Baseado em quais critérios?

5. Aplicando-se a decomposição de Cholesky a uma matriz A foi obtido

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ ... & 13 & ... \\ ... & 1 & 4 \end{pmatrix} = LL^T, \quad \text{com} \quad L = \begin{pmatrix} ... & 0 & 0 \\ 2 & ... & 0 \\ -1 & ... & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Preencha os espaços pontilhados com os valores adequados.

6. Usando a decomposição $A = LL^T$ da questão anterior, calcule a segunda coluna da inversa de A.

7. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2$. Considere ainda os dois processos iterativos

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^2 + 2}{5} \quad \text{e} \quad x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}.$$

Qual dos dois processos iterativos você utilizaria para obter a raiz x_1? Justifique sua escolha.

8. Dados dois pontos $A = (a_x, a_y)$ e $B = (b_x, b_y)$ no plano, a distância Euclidiana $d(A, b)$ entre eles é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

Escreva as equações correspondentes a encontrar um ponto (x, y) que tenha distância 2 dos pontos $(2, 1)$ e $(1, 3)$.

9. Usando as equações definidas na questão anterior, utilize um método visto no curso para encontrar o ponto (x, y).

10. A equação que descreve uma circunferência de centro (c_x, c_y) e raio r é dada por

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2.$$

Escreva as equações correspondentes a determinar a intersecção da circunferência de centro $(0, 2)$ e raio 3 com a circunferência de centro $(3, -1)$ e raio 2.

11. Usando as equações definidas na questão anterior, utilize um método visto no curso para um dos pontos de intersecção das circunferências dadas.

12. Verifique se as afirmações a seguir são Verdadeiras ou Falsas. Justifique suas respostas.

    (a) Se $\|B\| > 1$ para alguma norma $\|.\|$, então o método iterativo $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ para solução de um sistema linear diverge.

    (b) O Método das Potências é aplicável sempre que existe um autovalor real que, em valor absoluto, é maior que os demais.

    (c) Quando se deseja usar o Método do Ponto Fixo para calcular a raiz de uma função f, é necessário determinar uma função $g(x)$ tal que, se p é ponto fixo de g, p também é raiz de f. Dada uma função f, esta função g é única.