# SME0100 - Cálculo Numérico I

## Segundo semestre de 2012

# Lista de Exercícios

## Exercícios de prova

1. Dentre os métodos que você estudou no curso para resolver sistemas lineares, qual é o mais adequado para resolver os sistemas $Ay = x$ que são utilizados no Método das Potência Inversas para calcular o menor autovalor em módulo da matriz $A$. Justifique sua resposta.

   **Resposta:**

   *Utilizaria a decomposição LU. Isto torna a resolução dos sistemas lineares mais eficiente, já que a decomposição é realizada uma única vez e depois pode ser utilizada em todo o método.*

2. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

   Para quais valores de $\alpha$ pode-se garantir a convergência dos Métodos Jacobi-Richardson e Gauss-Seidel? Baseado em quais critérios?

   **Resposta:**

   *Primeiramente, vamos analisar a convergência para o* **Método de Jacobi-Richardson** *usando o Critério da Diagonal Dominante.*

   *Para satisfazer a este critério, temos que $\alpha > 1$ e $\alpha < 2$. Logo, o método converge para qualquer valor de $\alpha$ entre 1 e 2 ($1 < \alpha < 2$).*

   *Não é necessário, mas vamos também estudar a convergência usando o Critério das Linhas e o Critério das Colunas.*

   *A matriz $B$ do* **Método de Jacobi-Richardson** *(para o exercício) é dada por:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   *Pelo Critério das Linhas, temos que $\frac{1}{\alpha} < 1$ e $\frac{\alpha}{2} < 1$. Logo, escolhendo qualquer valor de $\alpha$ entre 1 e 2 ($1 < \alpha < 2$) a convergência é garantida.*

   *O mesmo se aplica ao Critério das Colunas.*

*Agora vamos analisar a convergência para o* **Método de Gauss-Seidel**.

*Sabemos que o Critério da Diagonal Dominante e o Critério das Linhas também são válidos para este método. Logo, para todo valor de* $\alpha \in (1,2)$*, este método converge.*

*Analisemos também o Critério de Sassenfeld:*

$\beta_1 = a^*_{12} = \frac{1}{\alpha}$

$\beta_2 = a^*_{21}\beta_1 = \frac{\alpha}{2} * \frac{1}{\alpha} = 1/2$

$\max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\frac{1}{\alpha}, 1/2\} < 1$

*Portanto, para todo* $\alpha > 1$*, o método converge.*

3. Aplicando-se a decomposição de Cholesky a uma matriz $A$ foi obtido

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ ... & 13 & ... \\ ... & 1 & 4 \end{pmatrix} = LL^T, \quad \text{com} \quad L = \begin{pmatrix} ... & 0 & 0 \\ 2 & ... & 0 \\ -1 & ... & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Preencha os espaços pontilhados com os valores adequados.

**Resposta:**

*Como* $A$ *deve ser simétrica, temos que*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 13 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Vamos escrever a matriz* $L$ *como*

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 \\ -1 & c & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

*E, como* $A = LL^T$*, temos*

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1.$$

*Na Decomposição de Cholesky, definimos os elementos da diagonal como positivos. Então,* $a = 1$*.*

*Além disso,*

$$4 + b^2 = 13 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3.$$

*Assim,* $b = 3$*.*

*Por fim, temos*

$$-2+3c=1 \Rightarrow c=1.$$

*Portanto,*

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

4. Usando a decomposição $A=LL^T$ da questão anterior, calcule a segunda coluna da inversa de $A$.

**Resposta:**

*Vamos denotar a segunda coluna da inversa de $A$ por* $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

*Assim,*

$$Ax=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 13 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=e_2.$$

*Como $A=LL^T$, vamos resolver o sistema $Ly=e_2$ e, depois, $L^Tx=y$.*

$$Ly=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=e_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 & & & = 0, \\ 2y_1 & + 3y_2 & & = 1, \\ -y_1 & + y_2 & + \sqrt{2}y_3 & = 0. \end{cases}$$

*Ou seja,* $y=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

*Resolvendo o segundo sistema, temos*

$$L^Tx=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}=y \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 & + 2x_2 & - x_3 & = 0, \\ & 3x_2 & + x_3 & = \frac{1}{3}, \\ & & \sqrt{2}x_3 & = -\frac{1}{3\sqrt{2}}. \end{cases}$$

*Ou seja, a segunda coluna da matriz inversa de $A$ é* $x=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

5. Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2$. Considere ainda os dois processos iterativos

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^2 + 2}{5} \quad \text{e} \quad x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}.$$

Qual dos dois processos iterativos você utilizaria para obter a raiz $x_1$? Justifique sua escolha.

**Resposta:**

*Primeiramente, vamos analisar o primeiro processo iterativo.*

*Tomemos o intervalo $[0, 1]$. Sabemos que $g_1(x) = \frac{2x^2+2}{5}$ é uma função contínua e crescente neste intervalo e que $g_1(x) \in [0, 1]$ para todo $x \in [0, 1]$. Além disso, $|g_1'(x)| < 1$ ($g_1{}'(x) = \frac{4}{5}x$) para todo $x \in [0, 1]$. Logo, dado um ponto inicial $x_0 \in [0, 1]$, este processo iterativo converge para $x_1$.*

*Agora, vamos analisar o segundo processo iterativo.*

*A derivada de $g_2(x)$ é dada por*

$$g_2'(x) = \frac{5}{4\sqrt{\frac{5x}{2} - 1}}.$$

*Note que $g_2'(x_1) = g_2'(0.5) = 2.5$. Logo, não podemos garantir a convergência deste processo iterativo para $x_1$.*

*Portanto, para obter a raiz $x_1$ de $f(x)$ devemos escolher o primeiro processo iterativo.*

6. Dados dois pontos $A = (a_x, a_y)$ e $B = (b_x, b_y)$ no plano, a distância Euclidiana $d(A, b)$ entre eles é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

Escreva as equações correspondentes a encontrar um ponto $(x, y)$ que tenha distância 2 dos pontos $(2, 1)$ e $(1, 3)$.

**Resposta:**

*Considere $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (1, 3)$, e seja $P = (x, y)$ o ponto que queremos encontrar.*

*A distância entre $P_1$ e $P$ é dada por*

$$d(P_1, P) = \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2}.$$

*Sabemos também que $d(P_1, P) = 2$, ou seja,*

$$2 = \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2}.$$

*Do mesmo modo, sabemos que a distância entre $P_2$ e $P$ é dada por*

$$d(P_2, P) = \sqrt{(1-x)^2 + (3-y)^2}.$$

*Sabemos também que $d(P_2, P) = 2$, ou seja,*

$$2 = \sqrt{(1-x)^2 + (3-y)^2}.$$

*Logo, para encontrar o ponto $P$ que tenha distância 2 dos pontos $P_1$ e $P_2$, devemos resolver o sistema de equações não-lineares dado por*

$$\begin{cases} \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} = 2, \\ \sqrt{(1-x)^2 + (3-y)^2} = 2. \end{cases}$$

7. Usando as equações definidas na questão anterior, utilize um método visto no curso para encontrar o ponto $(x, y)$.

**Resposta:**

*Podemos utilizar, para resolver este problema, o Método Iterativo Linear ou o Método de Newton para solução de sistemas não-lineares.*

*Escolhemos utilizar o Método de Newton. Vamos denotar por $x_k^T$ o ponto $(x_k, y_k)$,*

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} - 2 \\ \sqrt{(1-x)^2 + (3-y)^2} - 2 \end{pmatrix},$$

*$J_F(x_k)$ o Jacobiano da função $F$ em $x_k$. Usaremos o ponto inicial $x_0 = (0,0)^T$, tolerância $10^{-3}$ e norma Euclidiana (quando for necessário usar alguma norma).*

*Assim, temos*

$$x_0 = (0.0000, 0.0000)^T \quad e \quad F(x_0) = (0.2361, 1.1623)^T.$$

*Como $\|F(x_0)\|_2 = 1.1860 > 10^{-3}$, vamos calcular*

$$J_F(x_0) = \begin{pmatrix} -0.8944 & -0.4472 \\ -0.3162 & -0.9487 \end{pmatrix}.$$

*Resolvendo o sistema $J_F(x_0)d_0 = F(x_0)$, temos $d_0 = (0.4184, -1.3646)^T$. Assim,*

$$x_1 = x_0 - d_0 = (-0.4184, 1.3646)^T.$$

*Calculando os erros absoluto e relativo, temos*

$$\|x_0 - x_1\|_2 = 1.4273 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_0 - x_1\|_2}{\|x_1\|_2} = 1.0000 > 10^{-3}.$$

*Vamos, agora, calcular a função $F$ no ponto $x_1$. Temos que $F(x_1) = (0.4457, 0.1648)^T$ e $\|F(x_1)\|_2 = 0.4752 > 10^{-3}$.*

*O Jacobiano de $F$ em $x_1$ é dado por*

$$J_F(x_1) = \begin{pmatrix} -0.9888 & 0.1491 \\ -0.6552 & -0.7555 \end{pmatrix}.$$

*Resolvendo o sistema $J_F(x_1)d_1 = F(x_1)$, temos $d_1 = (-0.4277, 0.1528)^T$. Assim,*

$$x_2 = x_1 - d_1 = (0.0093, 1.2118)^T.$$

*Calculando os erros absoluto e relativo, temos*

$$\|x_1 - x_2\|_2 = 0.4542 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_1 - x_2\|_2}{\|x_2\|_2} = 0.3748 > 10^{-3}.$$

*Vamos, então, calcular a função $F$ no ponto $x_2$. Temos que $F(x_2) = (0.0019, 0.0443)^T$ e $\|F(x_2)\|_2 = 0.0443 > 10^{-3}$.*

*O Jacobiano de $F$ em $x_2$ é dado por*

$$J_F(x_2) = \begin{pmatrix} -0.9944 & 0.1058 \\ -0.4846 & -0.8747 \end{pmatrix}$$

*Resolvendo o sistema $J_F(x_2)d_2 = F(x_2)$, temos $d_2 = (-0.0069, -0.0468)^T$. Assim,*

$$x_3 = x_2 - d_2 = (0.0162, 1.2586)^T.$$

*Calculando os erros absoluto e relativo, temos*

$$\|x_2 - x_3\|_2 = 0.0473 > 10^{-3} \quad e \quad \frac{\|x_2 - x_3\|_2}{\|x_3\|_2} = 0.0376 > 10^{-3}.$$

*Vamos, então, calcular a função $F$ no ponto $x_3$. Temos que $F(x_3) = (0.0006, 0.0001)^T$. Como $\|F(x_3)\|_2 = 0.0006 < 10^{-3}$, paramos com $x_3$ como solução.*

*Portanto, um ponto que tem distância (aproximadamente) 2 tanto de $(2, 1)$ como de $(1, 3)$ é $(0.0162, 1.2586)$.*

8. Verifique se as afirmações a seguir são Verdadeiras ou Falsas. Justifique suas respostas.

   (a) Se $\|B\| > 1$ para alguma norma $\|.\|$, então o método iterativo $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ para solução de um sistema linear diverge.

   **Resposta: Falsa.**
   *Pois se $\|B\| < 1$ para alguma norma $\|.\|$, o método converge.*
   *Pois se $\|B\| > 1$ para toda norma $\|.\|$, o método não tem garantia de convergência.*

(b) O Método das Potências é aplicável sempre que existe um autovalor real que, em valor absoluto, é maior que os demais.

**Resposta: Falsa.**
*Pois além disso, os autovetores devem ser L.I.*

(c) Quando se deseja usar o Método do Ponto Fixo para calcular a raiz de uma função $f$, é necessário determinar uma função $g(x)$ tal que, se $p$ é ponto fixo de $g$, $p$ também é raiz de $f$. Dada uma função $f$, esta função $g$ é única.

**Resposta: Falsa.**
*Há várias alternativas para determinar $g$, inclusive, algumas podem fazer o método convergir e outras, não.*