Determinação de raízes de funções: Método da Bissecção

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

18 de outubro de 2012

Baseado no livro Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires.

Determinação de raízes de funções

Vamos agora nos concentrar em resolver um dos problemas mais importantes de aproximação numérica: a determinação de raízes de funções.

Este problema consiste em encontrar uma raiz (ou uma solução) de uma equação da forma

$$\boxed{f(x) = 0,}$$

para uma dada função $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$.

O problema de determinação de raízes de funções data de, pelo menos, 1700 a.C.

Uma tábua babilônica, que data deste período, fornece um número em base 60 equivalente a 1.414222 como aproximação de $\sqrt{2}$, um resultado com precisão 10^{-5}.

Método da Bissecção

O primeiro método que veremos para resolução deste problema, baseado no Teorema do Valor Intermediário, é o Método da Bissecção.

Suponha que f seja uma função contínua, definida no intervalo $[a, b]$, com $f(a)$ e $f(b)$ com sinais opostos.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

Método da Bissecção

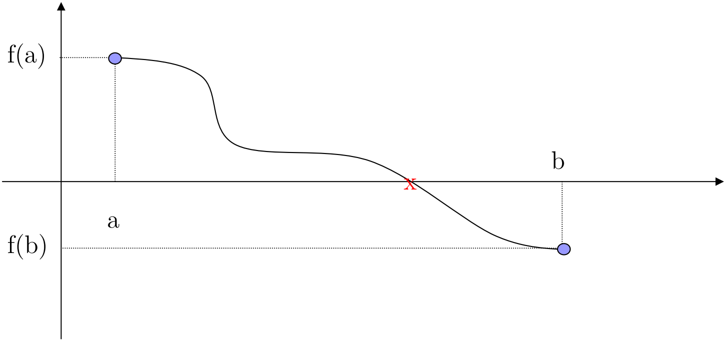
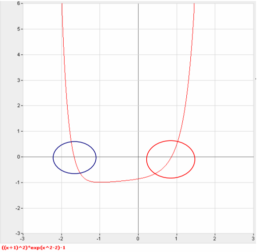


Figura: Fonte: aula prof. Alysson

Método da Bissecção - Ideia

f(-1.5) = + ou - ?



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4385.5	6.4	-1	-0.9	0.5	65.5	17545.1

Figura: Fonte: aula prof. Alysson

Método da Bissecção

O Método da Bissecção consiste em dividir os subintervalos de $[a, b]$ ao meio sucessivas vezes, localizando o subintervalo que contém p.

Inicialmente, defina $a_1 = a$, $b_1 = b$ e considere p_1 o ponto médio do intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Se $f(p_1) = 0$, então $p = p_1$ e resolvemos o problema.

Se $f(p_1) \neq 0$, então $f(p_1)$ tem o mesmo sinal de $f(a_1)$ ou de $f(b_1)$.

Quando $f(p_1)$ tem o mesmo sinal de $f(a_1)$, temos que $p \in (p_1, b_1)$ e definimos $a_2 = p_1$ e $b_2 = b_1$.

Quando $f(p_1)$ tem o mesmo sinal de $f(b_1)$, temos que $p \in (a_1, p_1)$ e definimos $a_2 = a_1$ e $b_2 = p_1$.

Depois de redefinido o intervalo, executamos o mesmo procedimento ao intervalo $[a_2, b_2]$

Algoritmo

Método da Bissecção: dados os extremos de um intervalo $[a, b]$, tais que $f(a)f(b) < 0$, uma tolerância $TOL > 0$ e o número máximo de iterações $MAXIT$, devolve a solução aproximada p ou uma mensagem de erro.

Passo 1: Faça $k \leftarrow 1$.

Passo 2: Enquanto $k \leq MAXIT$, execute os passos 3 a 6:

Passo 3: Faça $p \leftarrow (a + b)/2$.

Passo 4: Se $(b - a)/2 < TOL$ ou $|f(p)| < TOL$,

então devolva p como solução e pare.

Passo 5: Se $f(a) * f(p) > 0$,

então faça $a \leftarrow p$. Senão, faça $b \leftarrow p$.

Passo 6: Faça $k \leftarrow k + 1$.

Passo 7: Escreva “o método falhou após $MAXIT$ iterações” e pare.

Note que, para aplicarmos o Método da Bissecção, precisamos de um intervalo $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$. A cada iteração, o tamanho do intervalo é dividido por dois.

Assim, quanto menor o tamanho do intervalo $[a, b]$, que contém p, mais rápida deverá ser a convergência do método.

Por exemplo, para a função $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$, temos que

$$f(-4)f(4) = -149 \times 115 < 0 \quad \text{e} \quad f(0)f(1) = -1 \times 1 < 0.$$

Assim, poderíamos aplicar o Método da Bissecção usando o intervalo $[-4, 4]$ ou o intervalo $[0, 1]$.

No entanto, a escolha do intervalo $[0, 1]$ reduz em três o número de iterações necessárias para se calcular p com uma determinada precisão.

Exemplo

Considere a função $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$. Como $f(1) = -5$ e $f(2) = 14$, sabemos que há alguma raiz de f no intervalo $(1, 2)$

A tabela a seguir mostra os valores obtidos na aplicação do Método da Bissecção para encontrar uma raiz de f no intervalo $(1, 2)$.

Exemplo

k	a_k	b_k	p_k	$f(p_k)$
1	1.000000000	2.000000000	1.500000000	2.375000
2	1.000000000	1.500000000	1.250000000	-1.796870
3	1.250000000	1.500000000	1.375000000	0.162110
4	1.250000000	1.375000000	1.312500000	-0.848390
5	1.312500000	1.375000000	1.343750000	-0.350980
6	1.343750000	1.375000000	1.359375000	-0.096410
7	1.359375000	1.375000000	1.367187500	0.032360
8	1.359375000	1.367187500	1.363281250	-0.032150
9	1.363281250	1.367187500	1.365234375	0.000072
10	1.363281250	1.365234375	1.364257813	-0.016050
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.007990
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	-0.003960
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	-0.001940

Exemplo

Após 13 iterações, $p_{13} = 1.365112305$ se aproxima de uma raiz p com erro

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070.$$

Como $|a_{14}| < |p|$,

$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 9 \times 10^{-5},$$

o que significa que a aproximação está correta em pelo menos 4 dígitos significativos.

Exemplo

O valor correto de p, com nove casas decimais, é $p = 1.365230013$.

Note que p_9 está mais próximo de p do que p_{13}. Uma evidência deste fato é que $f(p_9) < f(p_{13})$. Mas esta evidência pode ser enganosa e só é possível fazer esta constatação sabendo qual o verdadeiro valor de p.

O Método da Bissecção tem a propriedade de sempre convergir para uma solução, além de ter a vantagem de ser muito claro e simples de ser implementado.

Entretanto, o Método da Bissecção tem a convergência muito lenta e uma aproximação intermediária boa pode ser descartada inadvertidamente.

Por estas razões, o Método da Bissecção é muito usado no início da aplicação de outros métodos mais eficientes, que veremos mais adiante.

Teorema 1: *Suponha que* $f \in \mathcal{C}[a,b]$ *e* $f(a)f(b) < 0$. *O Método da Bissecção gera uma sequência* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *que se aproxima de uma raiz* p *de* f *com*

$$|p_k - p| \leq \frac{b-a}{2^k},$$

para $k \geq 1$.

Método da Bissecção

Como

$$|p_k - p| \leq \frac{b-a}{2^k},$$

a sequência $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge para p com uma taxa de convergência $O\left(\frac{1}{2^k}\right)$, ou seja,

$$p_k = p + O\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

O **Teorema 1** fornece um limitante para o erro da aproximação obtida em cada iteração, mas este limitante pode ser muito conservador.

No exemplo anterior, o limitante garante apenas que

$$|p - p_9| \leq \frac{2-1}{2^9} \approx 2 \times 10^{-3}.$$

No entanto, o erro real é

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| \approx 4.4 \times 10^{-6}.$$