Site: sites.icmc.usp.br/andreduarte

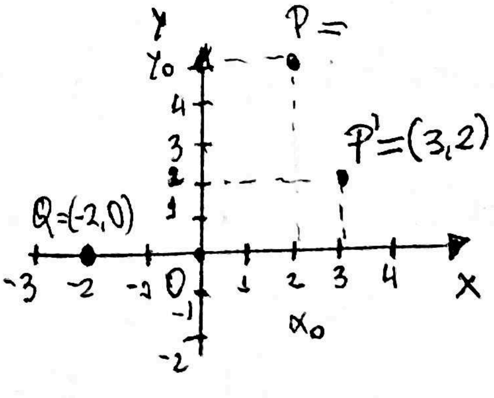
Matrizes, vetores e Geometria analítica

Vetores

O termo "vetor", do latim "vehere", que significa "andar", aparece na Astronomia como sendo o tamanho do segmento entre um planeta e o centro da órbita. Mais tarde, o matemático/físico William Rowan Hamilton cria um novo significado para o termo vetor em 1884 no artigo "sobre os quatérnios". Ele explica que diferente do antigo significado de vetor (que era descrito por um número) o novo significado considera também direção.

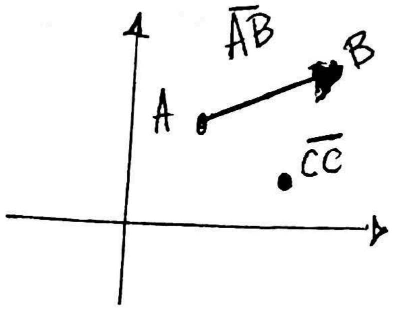
Desde então diversas quantidades passaram a ser descritas a partir de um número, direção e sentido (posição, velocidade, aceleração, ...). Mais recentemente, os vetores encontram aplicações na computação, estatística, economia, ...

Plano Cartesiano



P é ponto. (x_0, y_0) são as suas coordenadas (cartesianas)

Segmento orientado :

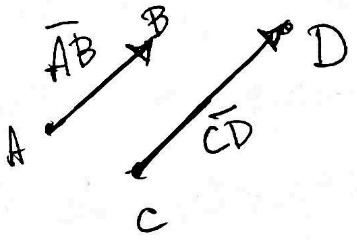


A ponto inicial
B ponto final

$\overline{CC}$ é segmento orientado nulo.

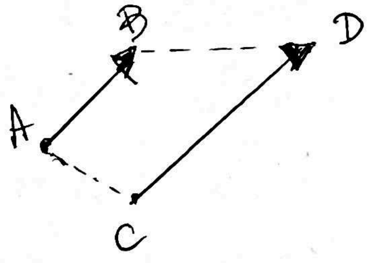
Comprimento de $\overline{AB}$ = tamanho do segmento AB
direção de $\overline{AB}$ = direção do segmento AB
Sentido de $\overline{AB}$ = orientação de A para B.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (mesma direção ou paralelos)

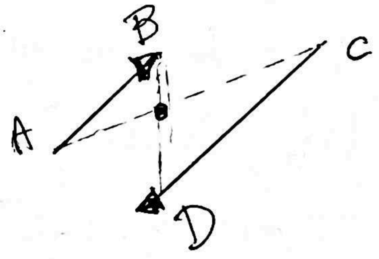


Supondo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$:

mesmo sentido



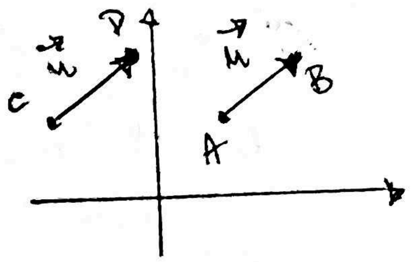
sentido oposto



Os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes se tem <u>mesmo</u> comprimento, direção e sentido.

Dado $\overline{AB}$, o $\boxed{\text{vetor}}$ $\vec{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equivalentes a $\overline{AB}$.

$\overline{AB}$ é dito um representante do vetor $\vec{AB}$.



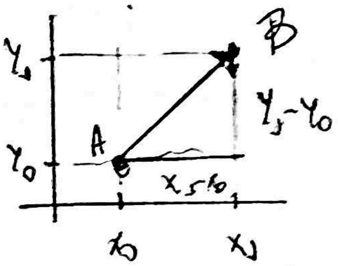
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam o mesmo vetor

$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD}$

Coordenadas dos vetores no plano

Dados $A=(x_0,y_0)$ e $B=(x_1,y_1)$ pontos, o vetor $\vec{AB}$ é representado ~~pelo~~ por

$$\vec{AB} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0]$$



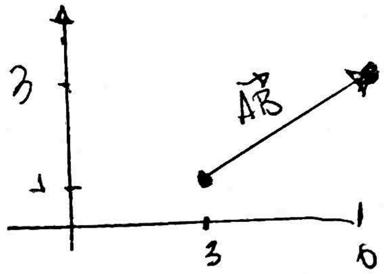
$\vec{AB}=[x,y]$, x e y são as componentes (ou coordenadas)

<u>Exemplo</u> $A=(3,1)$, $B=(6,3)$

$$\Rightarrow \vec{AB} = [6-3, 3-1] = [3,2]$$

Em muitos casos, vamos usar "vetores colunas"

$\vec{AB} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ (outra notação p/ representar $\vec{AB}$)



outras notações e fatos: (i) $\vec{0} = [0,0] = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ vetor nulo

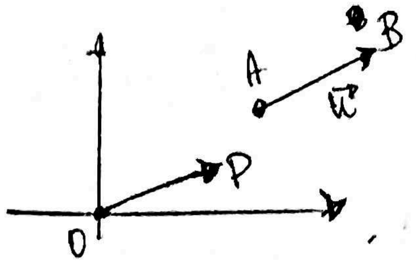
(ii) $\vec{AB}=\vec{CD} \Leftrightarrow$ AB e CD tem mesma direção, sentido, comprimento

$$\vec{AB}=[a,b]=[c,d]=\vec{CD}$$
$$\Updownarrow$$
$$a=c \text{ e } b=d.$$

(ii) $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os vetores no plano escritos em coordenadas.

$[-1,5]$, $[\sqrt{2},\pi]$, $[\frac{5}{2},4]$ estão em $\mathbb{R}^2$.

Note que



$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{OP}$

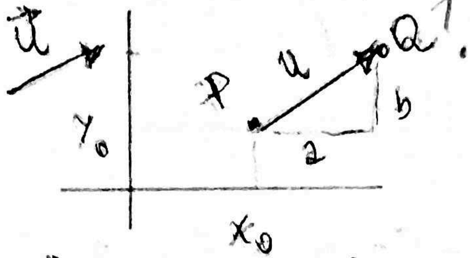
i.e. podemos repesentar todos os vetores usando seg. orientados a partir da origem

$P=(x,y) \longleftrightarrow \vec{u}=\vec{OP}=[x,y]$

ponto vetor

Sejam $\vec{u}=[a,b]$ um vetor e $P=(x_0,y_0)$ um ponto

Como encontrar $Q=(x,y)$ tal que $\vec{u}=\vec{PQ}$



$\Longrightarrow Q=(x_0+a, y_0+b)$

$Q = P+\vec{u} = (x_0+a, y_0+b)$ é dito a Soma de P e $\vec{u}$

(soma ponto-vetor)

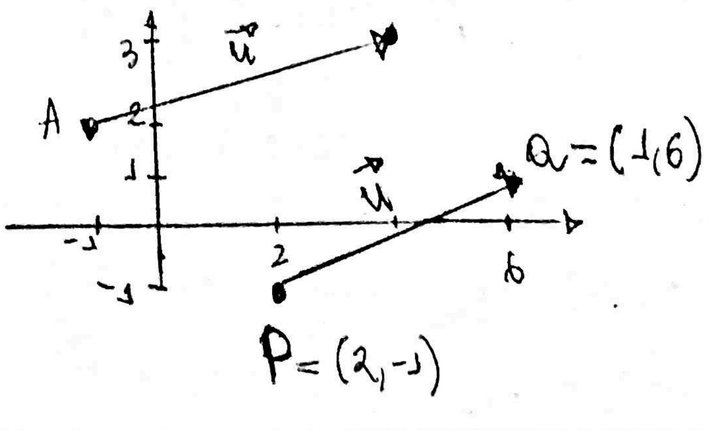
Exemplo $A=(-1,2)$, $B=(3,4)$, $P=(2,-1)$.

(i) Encontre $\vec{u}=\vec{AB}$

(ii) Ache $Q=P+\vec{u}$.

Solução (i) $\vec{u}=[3-(-1), 4-2]=[4,2]$

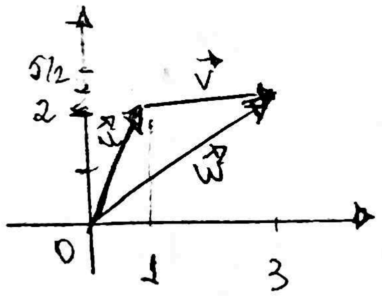
(ii) $Q=(2,-1)+[4,2]=[2+4,-1+2]=[6,1]$ ponto



Operações entre vetores

$\vec{u} = [1,2]$, $\vec{v} = [2, 1/2]$

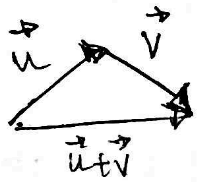
$\vec{w} = [3, \frac{5}{2}] = [1+2, 2+\frac{1}{2}]$



Em geral, $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$

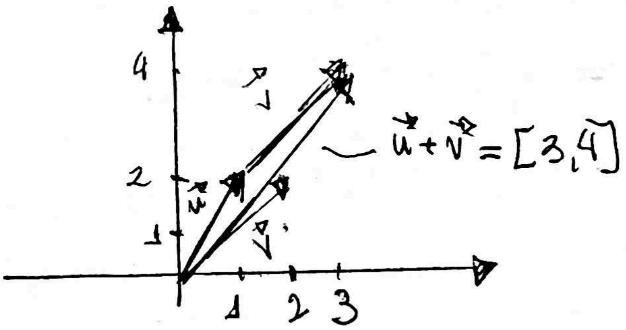
$\Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = [u_1+v_1, u_2+v_2]$ (soma)

e

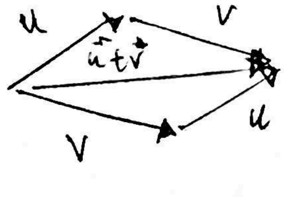


(geometricamente)

Exemplo $\vec{u} = [1,2]$, $\vec{v} = [2,2]$

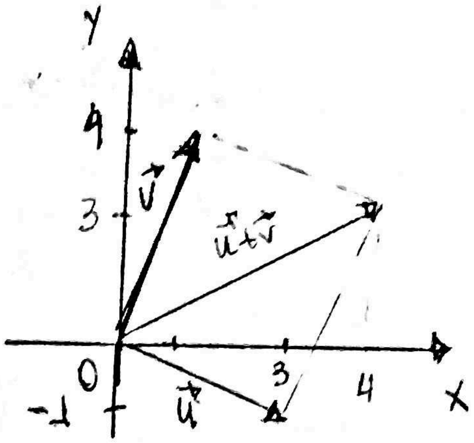


Obs $\vec{u}+\vec{v}$ pode ser obtido (geom.) pela regra do Paralelogramo



Exemplo $\vec{u} = [3,-1]$, $\vec{v} = [1,4]$. Calcule $\vec{u}+\vec{v}$ e ~~faça~~ e represente geometricamente

Solução $\vec{u}+\vec{v} = [3,-1] + [1,4]$
$= [3+1, -1+4]$
$= [4,3]$



Seja λ um número real, $\vec{u} = [u_1, u_2]$ um vetor

$\lambda\vec{u} = [\lambda u_1, \lambda u_2]$ multiplicação por escalar

Exemplo $\vec{v} = [-2,4]$. Calcule $2\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$ e $-2\vec{v}$

Solução
$$2\vec{v} = 2[-2,4] = [-4,8]$$
$$\frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}[-2,4] = [-1,2]$$
$$-2\vec{v} = (-2)[-2,4] = [4,-8]$$

Definição geométrica da multiplicação por escalar:

$0 \neq \lambda$ número real, $\vec{v}$ vetor não-nulo, $\lambda\vec{v}$ tem as seguintes propriedades:

(i) $\lambda\vec{v} \parallel \vec{v}$

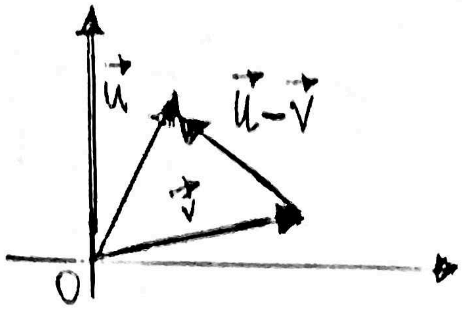
(ii) $\lambda\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$ se $\lambda > 0$
" " direção oposta a $\vec{v}$ se $\lambda < 0$

(iii) Comprimento de $\lambda\vec{v} = |\lambda|$. (Comprimento de $\vec{v}$).

Vetor diferença: ($\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores)

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

Geometricamente:

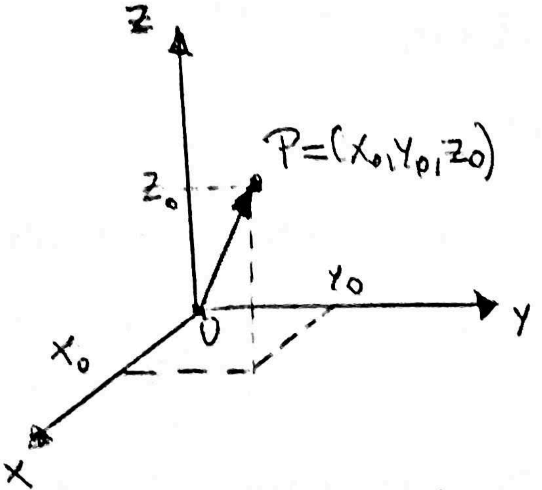


Exemplo $\vec{u}=[1,2]$, $\vec{v}=[-3,1]$ $\Rightarrow$ $\vec{u}+\vec{v}=[1,2]+[-3,1]$

$$=[1-3,2+1]$$

$$=[-2,3]$$

Vetores em $\mathbb{R}^3$



$$\vec{v}=\vec{OP}=[x_0,y_0,z_0]$$

$\mathbb{R}^3$ é o conjunto de todos os vetores no espaço em coordenadas.

Soma: $\vec{u}=[u_1,u_2,u_3]$, $\vec{v}=[v_1,v_2,v_3]$

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v}=[u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3]}$$

multiplicação por escalar: λ um número real

$\vec{v}=[v_1,v_2,v_3]$

$$\boxed{\lambda\vec{v}=[\lambda v_1,\lambda v_2,\lambda v_3]}$$

Exemplo: $\vec{u}=[1,-1,3]$, $\vec{v}=[2,5,-4]$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{u}+\vec{v}=[1,-1,3]+[2,5,-4] \\ u-4\vec{v}=[1,-1,3]+(-4)[2,5,-4] \end{cases}$$

$$=[1,-1,3]+[-8,-20,16]$$

$$=[1-8,-1-20,3+16]$$

$$=[-7,-21,19]$$

Vetores em $\mathbb{R}^n$

Podemos generalizar a ideia de usar coordenadas para representar vetores ~~para~~ no plano e espaço para vetores no espaço n-dimensional.

$\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as n-uplas ordenadas da forma $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ (n um número inteiro positivo)

obs. $[v_1, \ldots, v_n]$ é vetor escrito em forma de linha

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$ vetor em forma de coluna

Exemplo $\boxed{n=4}$ $\vec{v}=[1,-1,0,5] \neq [-1,1,0,5]$

Na relatividade são considerados vetores com 4 coordenadas (quadrivetor)

Quadrivetor posição: $\vec{X} = [ct, x, y, z]$

x, y, z coordenadas espaciais
t é o tempo
c é velocidade da luz.

Soma em $\mathbb{R}^n$: $\vec{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$
$\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ vetores

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v} := [u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n]}$$

multiplicação por escalar (em $\mathbb{R}^n$)
λ número real
$\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$

$$\lambda \vec{v} := [\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n]$$

Propriedades Algébricas dos vetores em $\mathbb{R}^n$

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e c, d números.

Então.

(1) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (comutatividade)

(2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (Associatividade)

(3) $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$

(4) $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$

(5) $c(\vec{u}+\vec{v}) = c\vec{u}+c\vec{v}$ (distributividade)

(6) $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$ (distributividade)

(7) $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$

(8) $1.\vec{u} = \vec{u}$

Estas propriedades vem da observação de casos particulares. Comumente chamamos de teorema estes fatos/propriedades gerais (teorema vem do grego "theorema" significando "para olhar"). Com um teorema vem acompanhado uma prova.

A título de exemplo vamos provar (1) e (2):

Prova (1) e (2):

(1) $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$, $\vec{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$

$$\vec{u}+\vec{v} = [u_1, u_2, \ldots, u_n] + [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$
$$= [u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n]$$
$$= [v_1+u_1, v_2+u_2, \ldots, v_n+u_n]$$
$$= [v_1, v_2, \ldots, v_n] + [u_1, \ldots, u_n] = \vec{v}+\vec{u}$$

(2) $\vec{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = [u_1+v_1; u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n] + [w_1, w_2, \ldots, w_n]$$
$$= [(u_1+v_1)+w_1, (u_2+v_2)+w_2, \ldots, (u_n+v_n)+w_n]$$
$$= [u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2), \ldots, u_n+(v_n+w_n)]$$
$$= [u_1, u_2, \ldots, u_n] + [v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_n+w_n] = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

Obs. A propriedade (2) diz que a soma independe dos parentesis:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k$$

Exemplo $\quad 5x - a = 2(a+2x)$, $a; x$ vetores

$$\Rightarrow 5x - a = 2a + 2(2x)$$
$$= 2a + (2.2)x$$
$$= 2a + 4x$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ x}}{(5x-a)+a-4x} = (2a+4x)+a-4x$$
$$= 3a$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3a}$$

Combinações lineares

Um vetor $\vec{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ se existem números $c_1, c_2, \dots, c_k$ tal que

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k .$$

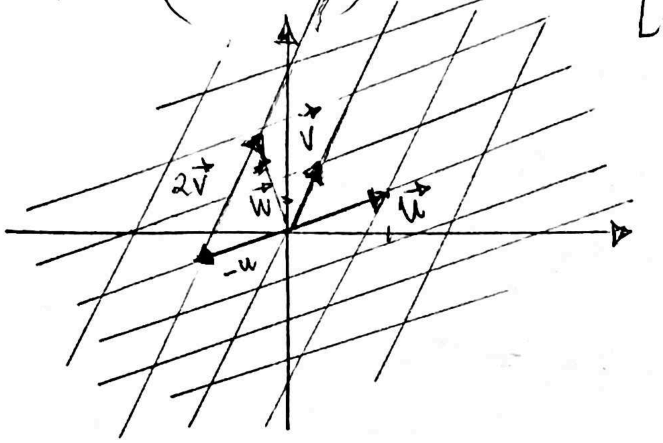
Os números $c_1, \dots, c_k$ são ditos os coeficientes da combinação linear.

Exemplo
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + (-1)\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

$\vec{v}$ é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

Um problema importante (que trataremos mais adiante) é determinar se, dados $\vec{v}$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ vetores, $\vec{v}$ é (ou não) uma combinação linear de $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$.

Exemplo (Em $\mathbb{R}^2$) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

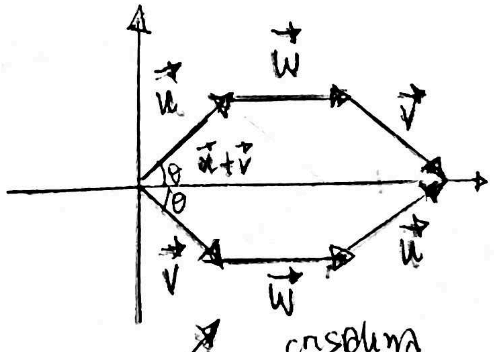


$$\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$$

$$= -\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+2 \\ -1+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Trocar o sistema de coordenadas cartesianas p/ um alternativo é útil na química e geologia, por exemplo.



estrutura crisolina do grafite

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ mesma norma (comprimento)

$\|\vec{u}\|$ = módulo de $\vec{u}$ (ou norma)

$$\vec{w} = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}(\vec{u}+\vec{v})$$

Vetores binários e aritmética modular

Historicamente, vetores binários (ou sequências finitas de 0's e 1's) foram (e são) importantes para o desenvolvimento da computação. O sistema binário foi inventado no século III AC pelo matemático indiano Pingala. ~~Mas~~ ~~a~~ Depois de muito tempo, no século XIX d.C, George Boole publicou um artigo descrevendo a álgebra dos números binários.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Denotamos $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ os números (dígitos) binários (ou inteiros módulo 2)

Exemplo Em $\mathbb{Z}_2$,

$$1+1+0+1 = 1$$
$$1+1+1+1 = 0$$

Denotamos $\mathbb{Z}_2^n$ o conjunto dos vetores binários de comprimento n (n inteiro positivo)

Exemplo $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$, $[1,1]$ são todos os vetores binários de comprimento 2.

- Quantos vetores binários de comprimento n existem? $[\underset{\underset{2}{\uparrow}}{\_}, \underset{\underset{2}{\uparrow}}{\_}, \dots, \underset{\underset{2}{\uparrow}}{\_}]$ em $\mathbb{Z}_2^n$ $\to$ 2^n vetores binários.

Exemplo (soma de vetores binários)

$$\vec{u} = [1,1,0,1,0], \quad \vec{v} = [0,1,1,1,0] \quad \text{em } \mathbb{Z}_2^5$$

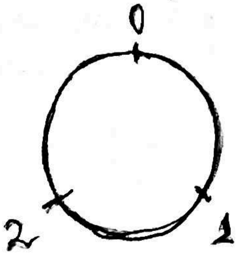
$$\vec{u} + \vec{v} = [1,1,0,1,0] + [0,1,1,1,0]$$
$$= [1+0, 1+1, 0+1, 1+1, 0+0]$$
$$= [1,0,1,0,0]$$

Exemplo (Inteiros módulo 3)

$\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ o conjunto dos interos módulo 3.

Como somar e multiplicar?

$1+1=?$



$1+1=2$

$2+1=0$

$2 \cdot 2 = 2+2 = 1$

ou seja, basta somar/multiplicar como se faz com os números inteiros e tomar o resto na divisão por 3:

$$\begin{array}{r|l} 2.2=4 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 1 \\ \cline{1-1} \boxed{1} & \end{array}$$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Exemplo Em $\mathbb{Z}_3^5$, $\vec{u} = [2,2,0,1,2]$

$\vec{v} = [1,2,2,2,1]$

$$\vec{u} + \vec{v} = [2,2,0,1,2] + [1,2,2,2,1]$$
$$= [2+1, 2+2, 0+2, 1+2, 2+1]$$
$$= [0,1,2,0,0]$$

$\mathbb{Z}_3^5$ é o conjunto dos vetores ternários de comprimento 5.

Produto escalar

Conceitos geométricos como distância, comprimento e ângulo podem ser reformulados usando vetores.

Sejam $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ vetores.

O produto escalar (ou produto interno) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n .$$

Obs (i) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem o mesmo número de coordenadas

(ii) $\vec{u}.\vec{v}$ é um número (escalar)

Exemplo $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}-3\\5\\2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{u}.\vec{v}=1(-3)+2.5+(-3).2$

$$= -3+10-6 = 1$$

Note que $\vec{v}.\vec{u}=1$.

Propriedades

Sejam $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e c um escalar.

Então

(i) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (Comutatividade)

(ii) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ (Distributividade)

(iii) $(c\vec{u}).\vec{v}=c(\vec{u}.\vec{v})$

(iv) $\vec{u}.\vec{u}\geq 0$ e $\vec{u}.\vec{u}=0$ se, e somente se $\vec{u}=0$.

Prova $\vec{u}=[u_1,u_2,\dots,u_n]$, $\vec{v}=[v_1,\dots,v_n]$, $\vec{w}=[w_1,w_2,\dots,w_n]$

(i) $\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+\dots+u_nv_n=v_1u_1+v_2u_2+\dots+v_nu_n=\vec{v}.\vec{u}$

(ii) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.[v_1+w_1,\dots,v_n+w_n]=u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+\dots+u_n(v_n+w_n)$

$$=\underline{u_1v_1}+u_1w_1+\underline{u_2v_2}+u_2w_2+\dots+\underline{u_nv_n}+u_nw_n$$

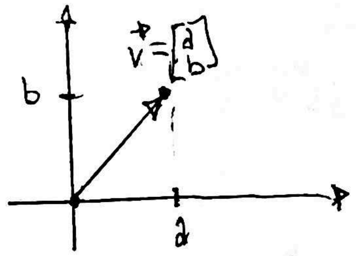
$$=(u_1v_1+u_2v_2+\dots+u_nv_n)+(u_1w_1+\dots+u_nw_n)$$

$$=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}.$$

(iii) e (iv) exercício.

Norma de Um vetor

Em $\mathbb{R}^2$, a norma de um vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ é a distância de (a,b) a origem $(0,0)$. Denotado $\|\vec{v}\|$



Pelo teorema de Pitagoras

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Definição A norma (módulo ou comprimento) de um vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^n$ é

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2}$$

Exemplo $\|[2,3]\| = \left\|\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

Propriedades Seja $\vec{v}$ um vetor em $\mathbb{R}^n$ e λ um escalar

(1) $\|\vec{v}\| = 0$ se e somente se $\vec{v} = 0$

(2) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\,\|\vec{v}\|$.

Prova (1) $\|\vec{v}\| = 0 \Rightarrow \sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2} = 0 \Rightarrow v_1^2+\dots+v_n^2 = 0,\ v_i^2 \geq 0$

$\Rightarrow v_i^2 = 0,\ i = 1,2,\dots,n$

$\Rightarrow v_i = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v} = \vec{0} = \underbrace{[0,\dots,0]}_{n \text{ vezes}} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{0^2+\dots+0^2} = 0$

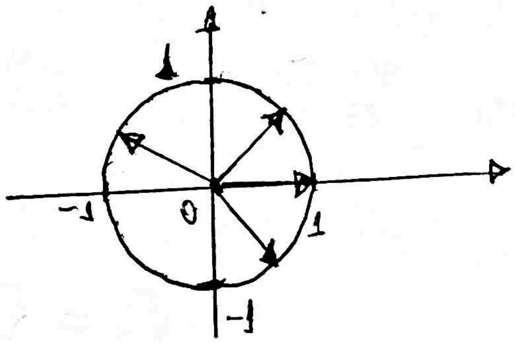
(2) $\|\lambda\vec{v}\|^2 = (\lambda\vec{v})\cdot(\lambda\vec{v}) \underset{\substack{\text{Propriedade (c)} \\ \text{anterior}}}{=} \lambda\,\vec{v}\cdot(\lambda\vec{v}) \underset{\substack{\text{Propriedade} \\ \text{(a)}}}{=} \lambda(\lambda\vec{v})\cdot\vec{v} \underset{\text{propriedade (c)}}{=} \lambda^2\,\vec{v}\cdot\vec{v}$

$\Rightarrow \|\lambda\vec{v}\|^2 = \lambda^2\|\vec{v}\|^2 \underset{\substack{\text{Tirando} \\ \text{a raiz}}}{\Rightarrow} \|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\,\|\vec{v}\|$ ■

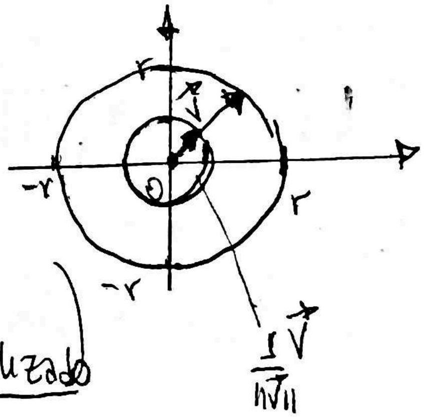
Note que $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$. e $\|\lambda\vec{v}\|, \|\vec{v}\| \geq 0$.

$\vec{v}$ é <u>vetor unitário</u> se $\|\vec{v}\| = 1$.

<u>Vetores unitários em</u> $\mathbb{R}^2$:



Em geral, $\|\vec{v}\| = r$, $r > 0$ $\Rightarrow$



O $\frac{1}{r}\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ (<u>vetor</u> <u>normalizado</u>)

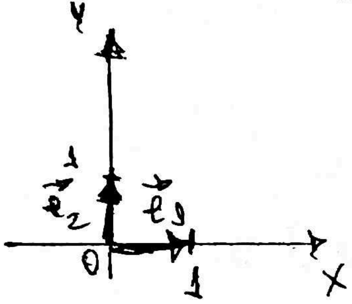
é unitário

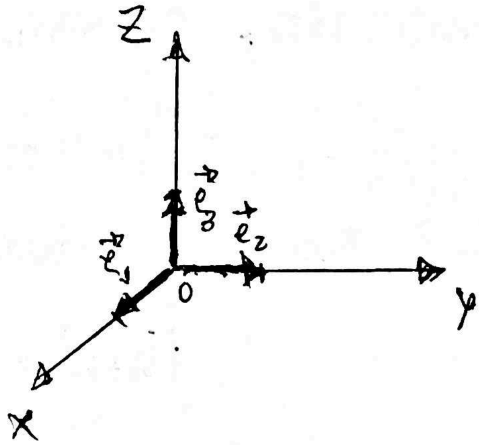
$\left(\left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{v}\| = 1\right)$.

Exemplo Em $\mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \|\vec{e}_1\| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$
$$\|\vec{e}_2\| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

Em $\mathbb{R}^3$, $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ vetores unitários





Em geral ($\mathbb{R}^n$)

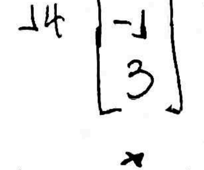
$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, ..., $\vec{e}_n = \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ são vetores unitários,

ditos vetores unitários canônicos.

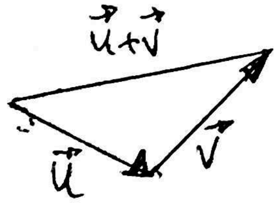
Exemplo $\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$, $\Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}$

$$= \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$\vec{u} = \left(\frac{1}{\|v\|}\right)\vec{v} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/14\\-1/14\\3/14\end{bmatrix}$ é o vetor unitário com mesma direção e sentido de $\vec{v}$



Lembre-se que, geometricamente, temos



é um triângulo

Assim, esperamos que $\|u\| + \|v\| \geqslant \|u+v\|$.
(soma de dois lados é maior que o terceiro)

Para provar isto, precisamos da

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para todos os vetores u e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| .$$

A prova disto será feita mais tarde.

Desigualdade triangular

Para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^n$,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| .$$

Prova

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) \\
&= (\vec{u}+\vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u}+\vec{v}) \cdot \vec{v} \\
&= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \qquad (\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}) \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\
&\leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\vec{u} \cdot \vec{v}| + \|\vec{v}\|^2 \\
&\leqslant \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \qquad \text{(desigualdade de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2
\end{aligned}$$

Tirando a raiz $\Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Outras normas em $\mathbb{R}^n$

Em $\mathbb{R}^n$, definimos a norma euclidiana de $v=[v_1,\dots,v_n]$ como

$$\|\vec{v}\|_2=\sqrt{v_1^2+\dots+v_n^2}$$

A norma $\|.\|_2$ é também conhecida como norma l_2

Em geral, uma <u>norma</u> em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\|.\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ satisfazendo

(i) $\|\vec{x}\|\geq 0$ com igualdade $\Leftrightarrow$ $\vec{v}=\vec{0}$.

(ii) $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\,\|\vec{v}\|$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

(iii) $\|\vec{v}+\vec{w}\|\leq\|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$. (desigualdade triangular)

<u>Obs</u> Vimos que $\|.\|_2$ é uma norma.

No entanto, existem outras normas.

<u>Exemplo</u> $\vec{v}=[v_1,\dots,v_n]$, a norma

$$\|\vec{v}\|_\infty:=\max\{|v_1|,|v_2|,\dots,|v_n|\}$$

é a norma l_∞.

$\vec{v}=[1,-5,15,-10]$, $\|\vec{v}\|_\infty=\max\{|1|,|-5|,|15|,|-10|\}$
$=\max\{1,5,15,10\}=15$

Exemplo $\vec{v} = [v_1, \dots, v_n]$

$$\|\vec{v}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i| = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n| \quad \text{norma } \ell_1$$

$$\vec{v} = [0, 3, -5, -10], \quad \|\vec{v}\|_1 = |0| + |3| + |-5| + |-10|$$
$$= 0 + 3 + 5 + 10 = 18$$

Exemplo $p > 1$ número real.

$$\vec{v} = [v_1, \dots, v_n], \quad \|\vec{v}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}$$
$$= \left(|v_1|^p + |v_2|^p + \dots + |v_n|^p\right)^{1/p}$$

é a norma ℓ_p.

obs. $p = 2 \Rightarrow$ norma ℓ_p é a norma euclidiana.

$$v = [3, 1, -4] \quad \|\vec{v}\|_3 := \left(3^3 + 1^3 + |-4|^3\right)^{1/3} = (9 + 1 + 64)^{1/3} = \sqrt[3]{74}$$

Para verificar que $\|.\|_p$ satisfaz a desigualdade triangular, precisamos do seguinte resultado.

Desigualdade de Hölder

$\vec{v} = [v_1, \dots, v_n]$
$\vec{u} = [u_1, \dots, u_n]$

$$|\vec{u}.\vec{v}| =: |u_1 v_1 + \dots + u_n v_n| \leq \left(|u_1|^p + \dots + |u_n|^p\right)^{1/p} \left(|v_1|^q + \dots + |v_n|^q\right)^{1/q}$$
$$= \|u\|_p \|v\|_q$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

obs. $p=q=2 \Rightarrow$ temos o teorema de Cauchy-Schwarz

Desigualdade de Minkowski

Se u e v são vetores em $\mathbb{R}^n$, então

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

Prova $u=[u_1,\dots,u_n]$, $v=[v_1,\dots,v_n]$

$$\left(\|u+v\|_p\right)^p = \sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i|^p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i|^{p-1}|u_i+v_i| \qquad \left(|u_i+v_i| \leq |u_i|+|v_i|\right)$$

$$\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i|^{p-1}|u_i|}_{\leq \left[\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{q(p-1)}\right]^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{1/p}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |u_i+v_i|^{p-1}|v_i|}_{\leq \left[\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{q(p-1)}\right]^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^p\right)^{1/p}}$$

Pela desigualdade de Hölder

(desig. de Hölder)

Logo, $$\left(\|u+v\|_p\right)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}\left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\Rightarrow q+p=pq$

$\Rightarrow q(p-1)=p$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{p}\right)^{1/q}\left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{p}\right)^{1/p}\right]^{p/q}\left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)$$

$$= \left(\|u+v\|_p\right)^{q/p}\left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)$$

Dividindo por $\|u+v\|_p^{q/p} \Rightarrow \|u+v\|_p = \dfrac{\left(\|u+v\|_p\right)^p}{\left(\|u+v\|_p\right)^{q/p}} \leq \|u\|_p+\|v\|_p$

Concluímos que a norma l_p satisfaz a desigualdade triangular.

obs O módulo de um número também satisfaz a desigualdade triangular.

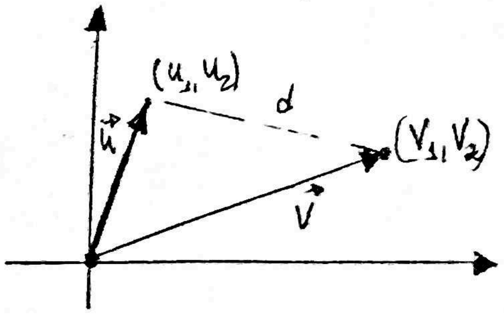
$$x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| = \begin{cases} x+y, & x+y \geq 0 \\ -x-y, & x+y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y &\leq |x|+|y| \\ -x-y &\leq |-x|+|-y| = |x|+|y| \end{aligned} \quad \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$$

Distância

Em $\mathbb{R}^2$, podemos definir a distância entre dois vetores usando a distância entre pontos

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



$$d = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

A distância (euclidiana) $d(u,v)$ entre os vetores u e v de $\mathbb{R}^n$ é

$$d(u,v) = \|u - v\|_2 = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Exemplo $u = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$u - v = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 0 \\ 1 - 2 \\ -1 - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow d(u,v) = \| u - v \|$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{2 + 1 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

Analogamente,

(i) $d_1(X,Y) = \| X - Y \|_1$ se X, Y vetores

$d_1(X,Y) = \| \vec{OX} - \vec{OY} \|$ se X, Y são pontos

é a distância Manhattan (ou distância do taxista)

(ii) $d_\infty(X,Y) = \| X - Y \|_\infty$ X, Y vetores

$d_\infty(X,Y) = \| \vec{OX} - \vec{OY} \|$ X, Y pontos

é a distância de Chebyshev.

Exemplo $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow X - Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}$

$$d_1(X,Y) = \| X - Y \|_1 = |1| + |-2| + |-12| = 1 + 2 + 12 = 15$$

$$d_\infty(X,Y) = \| X - Y \|_\infty = \max\{ |1|, |-2|, |-12|) = 12$$

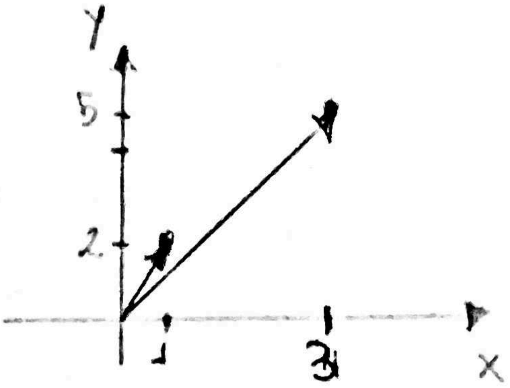
$$d_2(X,Y) = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-12)^2} = \sqrt{1 + 4 + 144} = \sqrt{149} \cong 12{,}2$$

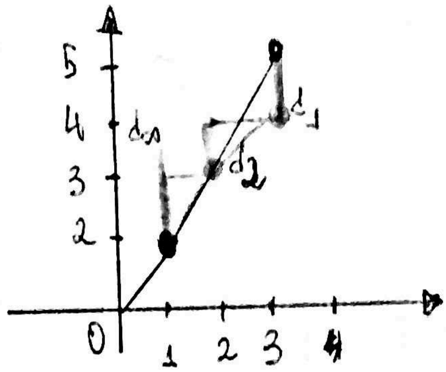
Exercício $u = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$

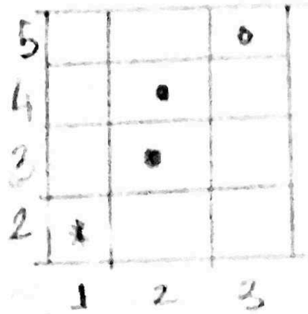
$d_2(x,y) =$

$d_1(x,y) = |-2| + |-3| = 5$

$d_\infty(x,y) = 3$

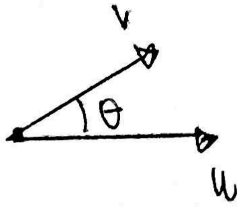






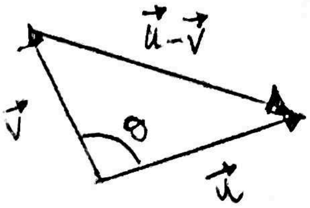
3 movimentos
(com rei)

Ângulos



$0 \leq \theta \leq 180°$ ângulo entre os vetores

$(0 \leq \theta \leq \pi)$ radianos



Aplicando a lei dos cossenos

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\|\cos(\theta)$$

(neste caso $\|.\|$ é a norma euclidiana)

Como $\|v\|^2 = v.v$, temos que

$$\|u-v\|^2 = (u-v).(u-v) = u.u + v.v - 2u.v = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u.v$$

$$\Rightarrow u.v = \|u\|\,\|v\|\cos(\theta) \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}}$$

p/ $u,v \neq \vec{0}$

Exemplo Determine o ângulo entre os vetores

$u = [2, 1, -2]$ e $v = [1, 1, 1]$

$$u.v = 2.1 + 1.1 + (-2).1 = 1$$

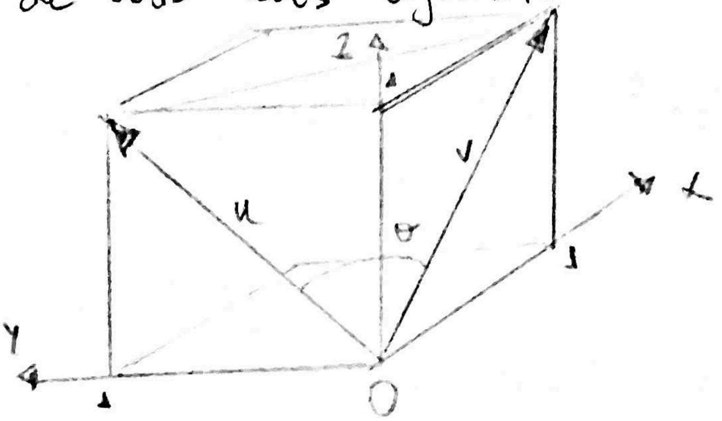
$$\|u\| = \|u\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \theta = \overset{\text{// } \arccos(\sqrt{3}/9)}{\cos^{-1}(\sqrt{3}/9)} \cong 1{,}377 \text{ rad}$$

ou 78,9°

Exemplo Determine o ângulo entre as diagonais de duas faces adjacentes de um cubo.



$u = [0, 1, 1]$, $v = [1, 0, 1]$

$u.v = 0.1 + 1.0 + 1.1 = 1$

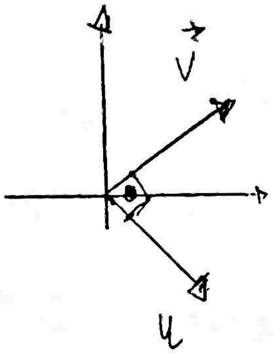
$\|u\| = \sqrt{2} = \|v\|$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\| \|v\|} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 60° \text{ ou } \pi/3 \text{ rad}$$

Obs A fórmula p/ ângulo é valida Somente p/ $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ em relação à norma euclidiana.

Vetores ortogonais



ângulo entre
u e v é
de 90°
(ou $\pi/2$ rad)

Ortogonal vem
do grego
orthos = vertical
gonia = ângulo
→ ângulo reto

Note que, $u.v = \|u\| \, \|v\| \cos(\theta)$

$$\theta = 90° \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow u.v = 0$$

Em geral, dizemos que dois vetores u e v de $\mathbb{R}^n$ são ortogonais entre si se $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Obs. $\vec{0}.\vec{v} = 0$, para todo vetor $\vec{v} \Rightarrow \vec{0}$ é ortogonal a todo vetor $\vec{v}$.

Teorema de Pitágoras no $\mathbb{R}^n$

u e v são vetores ortogonais no $\mathbb{R}^n$

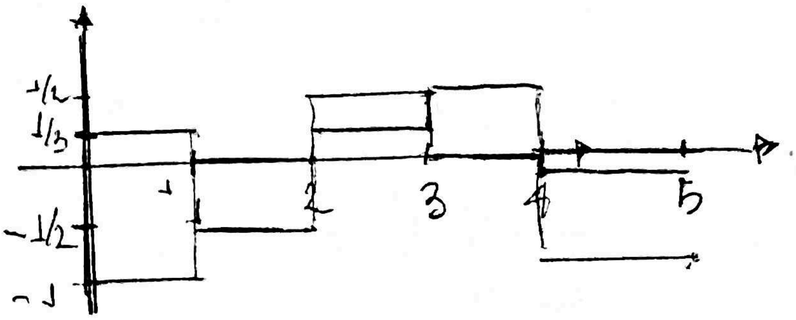
$$\Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Prova ($\Rightarrow$) $\|u+v\|^2 = (u+v).(u+v) = u.u + v.v + 2\underbrace{u.v}_{=0} = \|u\|^2 + \|v\|^2$

$\Leftarrow$ $\underset{\|u\|^2 + \|v\|^2.}{\overset{\|}{\|u+v\|^2}} = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u.v \Rightarrow 2u.v = 0 \Rightarrow u.v = 0$

$\Rightarrow$ u e v são ortogonais.

Aplicação (sinais ortogonais)   Sinal digital



Podemos representar esse sinal como

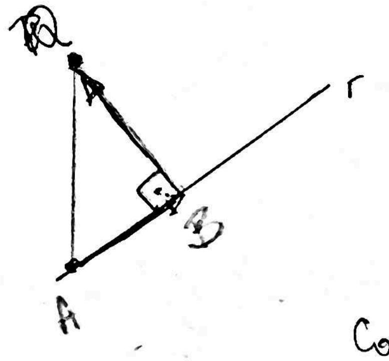
$$\vec{s} = [1/3, -1/2, 1/2, 0, -1]$$

$$\vec{r} = [-1, 0, \frac{1}{3}, 1, -1/6]$$

$$\vec{s} \cdot \vec{r} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

⇒ sinais $\vec{s}$ e $\vec{r}$ são ortogonais.

Projeções



Qual a menor distância entre P e pontos de r?

$$\vec{p} = \vec{AB}, \; \vec{u} = \vec{BP} \Rightarrow \vec{AP} = \vec{p} + \vec{u} = \vec{v}$$

Como $\vec{p} \perp \vec{u}$, temos pelo teorema de Pitágoras que

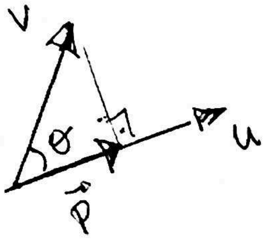
$$d(B,P)^2 = \|u\|^2 = \|\overset{\overset{v}{\shortparallel}}{u+p}\|^2 - \|p\|^2 \leq \|u+p\|^2 = d(A,P)^2$$

$$\Rightarrow d(B,P) \leq d(A,P)$$

Portanto, o $\overset{B}{\Downarrow}$ponto de r mais próximo de P satisfaz $\underset{\underset{u}{\shortparallel}}{\vec{BP}} \perp$ reta r.

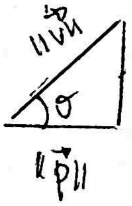
~~Nete~~ Neste caso, $\vec{p}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre sobre a reta ℓ.

Em geral, podemos usar essa ideia para projetar um vetor~~es~~ sobre um outro.



$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \|p\| \hat{u}}$$

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$$



$$\Rightarrow \boxed{\|p\| = \cos(\theta)\|v\|}$$

Como θ é ângulo entre u e v $\Rightarrow$ $\boxed{\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}}$

$$\Rightarrow \vec{p} = \|v\| \cos\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$= \|v\| \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|} . \frac{1}{\|u\|} \vec{u} = \left(\frac{u.v}{\|u\|^2}\right)\vec{u}$$

Definição u, v vetores em $\mathbb{R}^n$ e $u \neq \vec{0}$, a projeção ortogonal de v sobre u é o vetor

$$\text{Proj}_u(v) = \left(\frac{u.v}{\|u\|^2}\right)\vec{u}$$

Aplicação – Corrupção de dados

Suponha que os sinais (espaço dos sinais) sejam

$$\vec{x} = a\vec{s}_1 + b\vec{s}_2 \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

$S_1 = [-1, 3, 1]$

$S_2 = [2, -1, 2]$

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{y}$$

Enviamos $\vec{x} = S_1 - S_2$

Recebemos $\vec{y} = [1, 3, 0]$

$\vec{x} = [1, 4, -1]$

Generalizando ~~Pelo~~ exemplo anterior $\vec{y} = \vec{p} + \vec{q}$

com $\vec{p} = proj_{s_1} y + proj_{s_2} y$ é a melhor aproximação do sinal enviado $\vec{x}$.

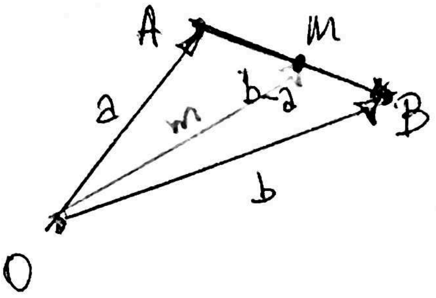
$proj_{s_1} y$

$proj_{s_2} y$

$\hat{x} = \vec{p}$

Vetores e Geometria

Exemplo



M ponto médio

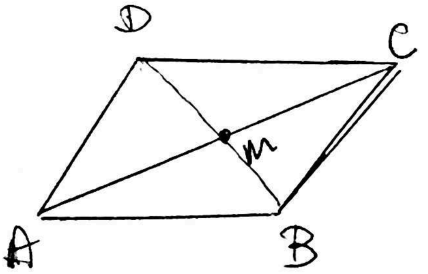
$\vec{AM} = a - m$, $\vec{AM} = \vec{MB} \Rightarrow a - m = m - b$

$\vec{MB} = m - b$

$\Rightarrow 2m = a + b$

$\Rightarrow m = \frac{1}{2}(a + b)$

Exemplo Diagonais de um paralelogramo tem o mesmo ponto médio



M ponto médio de $\overline{AC}$

$$\vec{BM} = \vec{BC} + \vec{CM} = \vec{AD} + \vec{MA} = \vec{MA} + \vec{AD} = \vec{MD}$$

$\Rightarrow \|\vec{BM}\| = \|\vec{MD}\|$. Logo M é ponto médio de $\overline{BD}$.

Retas e planos

O método adotado na Geometria analítica, atribuído a René Descartes (1596-1650), consiste em associar a cada conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ uma equação ou sistema de equações que o tenha como conjunto-solução. A finalidade é trabalhar com tais equações e tirar conclusões a respeito do conjunto.

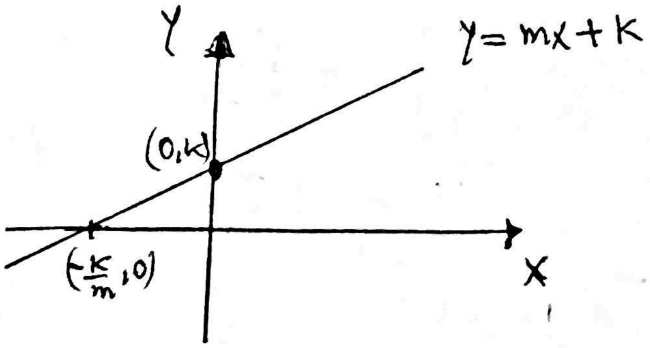
Retas em $\mathbb{R}^2$

Forma geral da equação de uma reta é

$$\boxed{ax+by=c}$$

se $b \neq 0$, então $y = -\left(\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b}$ ou $\boxed{y = mx+k}$

com $m = -\frac{a}{b}$, $k = \frac{c}{b}$.



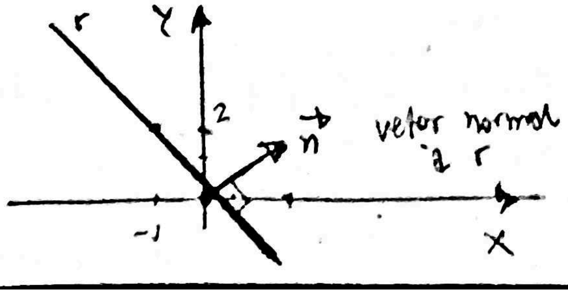
m é o coeficiente angular

$x=0 \Rightarrow y=k$

$y=0 \Rightarrow x=-\frac{k}{m}$

$(m \neq 0)$

<u>Exemplo</u> Reta $r: 2x+y=0$ $(\Rightarrow y=-2x)$



Note que, se $\vec{n} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$\boxed{r: \ \vec{n}\cdot\vec{x} = 0}$$

forma normal de r

Um ~~0~~ vetor $\vec{n}$ normal à r é ortogonal a qualquer vetor paralelo a r:

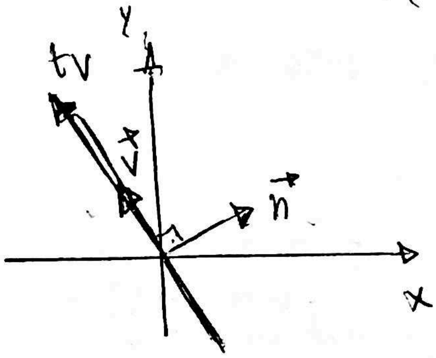
Por exemplo, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ é paralelo a r

(note que $\vec{v} = \vec{AB}$, $A = (0,0)$, $B = (1,-2)$ pontos em r).

$$\vec{n} . \vec{v} = 2.1 + 1.(-2) = 0$$

Os vetores paralelos a r são da forma: $t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow n.(t\vec{v}) = 2.t + 1.(-2t) = 0.$$



Note que $t\vec{v}$ $(t \in \mathbb{R})$ descreve todos os pontos de r
$(P \in r \Rightarrow P = 0 + t\vec{v})$

Assim a equação vetorial

~~(Equação vetorial de r)~~ ~~(Forma vetorial de r)~~ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ descreve a reta

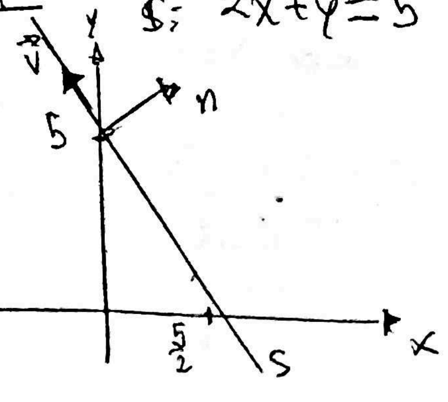
$t\vec{v}$

dá origem a $\boxed{X = 0 + t\vec{v}}$ forma vetorial de r

e $\vec{v}$ é o vetor diretor de r.

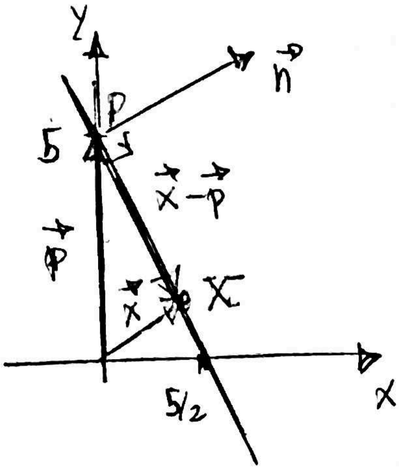
Exemplo

$s: 2x + y = 5$. ~~note~~ note que r (exemplo anterior) e s tem mesmo vetor diretor e normal.



$$\boxed{X = P + t\vec{v}} \quad (t \in \vec{v})$$

(x,y) $P = (5,0)$ em s



$$\boxed{\vec{n}\cdot\underbrace{(\vec{x}-\vec{p})}_{\overset{u}{\overrightarrow{PX}}}=0}$$ forma normal

verificando:

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right)$$

$$= 2x+y-5=0$$

$$\Rightarrow \underline{2x+y=5}$$

Definição A forma normal da equação de uma reta r em $\mathbb{R}^2$ é ~~$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p})$~~ $\boxed{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PX}=0}$

onde P é um ponto de r e $\vec{n}\neq 0$ é um vetor normal de r.

A forma geral da equação de r é

$$ax+by=c$$

em que $\vec{n}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ é um vetor normal à r.

No exemplo $s: 2x+y=5$, $\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}}_{\vec{p}}+t\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}}_{\vec{v}}$,

$$\Rightarrow s:\begin{cases}x=0+t\\ y=5-2t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$ parâmetro

equações paramétricas de s.

Note que $\vec{v}$ faz o papel de coeficiente angular

Def. A forma vetorial da ~~reta~~ equação de uma reta r em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ é

$$\boxed{X = P + t\vec{v}}$$

(soma ponto e vetor)

onde P é um ponto de r e $\vec{v}=\vec{0}$ ~~um~~ Um vetor diretor de r.

Em $\mathbb{R}^3$, ~~$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$~~ z_0, ~~Pt~~ ~~$P = (x_0, y_0, z_0)$~~ ~~$P = x, y$~~

$$X = (x, y, z) \quad , \quad \vec{v} = [a, b, c] \left(= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right)$$

$$P = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = y_0 + tc \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\underbrace{x_0, y_0, y_0}_{P}$ $\quad$ $\underbrace{a, b, c}_{\vec{v}}$

equação paramétrica de r.

Exemplo Encontre uma equação vetorial para a reta em $\mathbb{R}^3$ passando por $P = (-1, 5, 0)$ e $Q = (2, 1, 1)$.

Solução $$\vec{v} = \vec{PQ} = \text{“}Q - P\text{''} = \begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 1-5 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\vec{OQ} - \vec{OP}$

$$X = P + t\vec{v} = (-1, 5, 0) + t \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - 4t \\ z = 0 + t \end{cases}$$ (eq. Paramétricas)

Produto vetorial

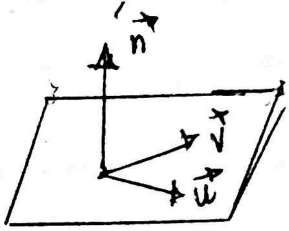
Dado um ponto P e um vetor $\vec{n}$, o plano π passando por P com vetor normal $\vec{n}$ tem equação geral

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{PX}=0}$$

Se já sabemos a equação vetorial de π, da forma

$$X = P + s\vec{u} + t\vec{v},$$

onde $P\in\pi$ e $\vec{u},\vec{v}$ são vetores diretores, como obter um vetor $\vec{n}$ normal a π?



Definição O produto vetorial de $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ e $\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$ é o vetor $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}$

Cálculo do produto vetorial ("Regra de Sarrus")

Seja e_1, e_2, e_3 vetores canônicos de $\mathbb{R}^3$, i.e

$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Fazendo $\vec{i}=e_1$, $\vec{j}=e_2$, $\vec{k}=e_3$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2\\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2\end{array}\right|$$

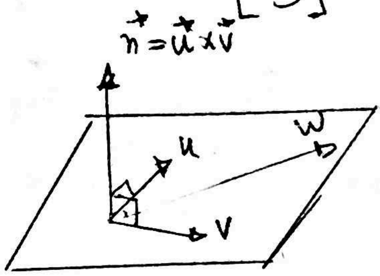
$$\begin{aligned}&\vec{i}\,u_2v_3+\vec{j}\,u_3v_1+\vec{k}\,u_1v_2\\&-\vec{j}\,u_1v_3-\vec{i}\,u_3v_2-\vec{k}\,u_2v_1\\&=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\vec{j}\\&\quad+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}\end{aligned}$$

$$=\vec{u}\times\vec{v}$$

Exemplo $\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{u}\times\vec{v} = ?$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1\end{array}\right| = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 0.\vec{k} - 0.\vec{j} - (-1)\vec{i} - 3\vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} = \begin{bmatrix}3\\3\\-3\end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\3\\-3\end{bmatrix}$$



$$\vec{n}.\vec{u} = 0.3 + 3.1 - 3.1 = 0$$
$$\vec{n}.\vec{v} = 3.3 - 3.1 - 3.2 = 0$$

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, $a, b \in \mathbb{R}$

combinação linear

$$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}(a\vec{u} + b\vec{v}) = n.(a\vec{u}) + n.(b\vec{v}) = a\underbrace{(\vec{n}.\vec{u})}_{=0} + b\underbrace{(\vec{n}.\vec{v})}_{=0} = 0$$

Em geral, $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix}u_2v_3 - u_3v_2\\ u_3v_1 - u_1v_3\\ u_1v_2 - u_2v_1\end{bmatrix}$

$$\vec{n}.\vec{u} = (u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3$$
$$= \underline{u_2v_3u_1} - \underline{u_3v_2u_1} + \underline{u_3v_1u_2} - \underline{u_1v_3u_2} + \underline{u_1v_2u_3} - \underline{u_2v_1u_3} = 0$$

Analogamente, $\vec{n}.\vec{v} = 0$ (verifique)

Conclusão $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo Seja π o plano passando por $P=(1,0,-2)$ e paralelo a $\vec{u}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ e $\vec{v}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$. Encontre a equação geral de π.

Vamos aproveitar este exemplo para encontrar uma fórmula para a equação geral.

Lembrando $\pi: \ \vec{n}\cdot\vec{PX}=0$

aremos $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ e $\vec{PX}=\text{"}X-P\text{"}=\begin{bmatrix}x-1\\y-0\\z-(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-1\\y\\z+2\end{bmatrix}$

$$\vec{n}\cdot\vec{PX}=\begin{bmatrix}1.2-1(-1)\\1.3-0.2\\0.(-1)-1.3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x-1\\y\\z+2\end{bmatrix}=3(x+1)+3y-3(z+2)=0$$

$$\Rightarrow \pi: \ 3x+3y-3z-3=0 \Rightarrow \boxed{\pi: \ x+y-z-1=0}$$

Assim, no caso geral, um plano π ~~com~~ passando por $P=(x_0,y_0,z_0)$ e paralelo a $u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ e $v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$

tem equação geral

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=0.$$

Propriedades do produto vetorial

Sejam u, v, w vetores no $\mathbb{R}^3$ e $c \in \mathbb{R}$ uma constante (escalar)

(1) $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$

(2) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$

(3) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

(4) $\vec{u} \times c\vec{v} = c(\vec{u} \times \vec{v})$

(5) $\vec{u} \times c\vec{u} = c(\vec{u} \times \vec{u}) = \vec{0}$

(6) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

(7) $u.(\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$
(produto misto de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$)

(8) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$

vamos utilizar as propriedades (7) e (8) para calcular:

$$\|u \times v\|^2 = (u \times v).(u \times v) \overset{(7)}{=} ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}).\vec{v} = (-u \times (u \times v)).v$$

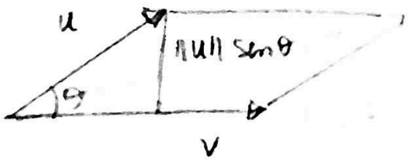
$$= ((\vec{u}.\vec{u})v - (u.v)\vec{u}).\vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

Seja θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (\|u\| \|v\| \cos(\theta))^2 = [\|u\| \|v\| \operatorname{sen}(\theta)]^2$$

Logo, $\boxed{\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen}\theta}$



Área do paralelogramo $\overset{u}{\underset{v}{\angle}}$ é

$$A = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$