Matrizes

Genericamente: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ notação concisa $A = [a_{ij}]$

matriz $\underbrace{m \times n}_{\text{ordem}}$ (m linhas e n colunas)

matriz-linha = matriz $1 \times n$. Exemplo: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

matriz-coluna = matriz $m \times 1$. Exemplo: $\begin{bmatrix} 5 \\ \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Se $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

então $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, a_i é vetor coluna (matriz)

Se $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$

$\vdots$

$A_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

então $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$

matriz quadrada: $m = n$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ são elementos da diagonal de A

Matriz diagonal: Todos elementos (entradas) fora da diagonal de uma matriz quadrada são zero

Matriz escalar: matriz diagonal cujas entradas diagonais são iguais.

Matriz identidade: matriz escalar com entradas diagonais iguais a 1

Exemplo $A=\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ matriz quadrada

$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ matriz diagonal

$I_3 = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz identidade

Notação: I_n é matriz identidade $n \times n$

Duas matrizes A e B são iguais $\Leftrightarrow$ tem mesmo ordem e todas as entradas são iguais

Em símbolos: $A=[a_{ij}]_{m \times n}$, $B=[b_{ij}]_{r \times s}$

$A=B \Leftrightarrow m=r, n=s$ e $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i,j$

Exemplo $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ $x=3$ e $y=-2$

$A \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$

Operações

$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ matrizes de mesma ordem

Soma: $A+B := [a_{ij}+b_{ij}]$

Se $c \in \mathbb{R}$, então

multiplicação por escalar $cA := [c\,a_{ij}]$

Exemplo $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. $A+B=\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

$A+C=?$ não está definido

$$\frac{5}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & 5 & 0 \\ 10 & -5/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$-A := (-1)A = [-a_{ij}]$ é a oposta de A

$A-B = A+(-1)B$ é a matriz diferença

Multiplicação

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1.2 + (-1)(-2) + 5.3 = 19$$

igual ao produto ~~interno~~ escalar

Em geral $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times r}$ o produto $C = AB = [c_{ij}]$

é matriz $m \times r$ com entradas

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Ilustrando:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \ a_{12} \ a_{13}} \\ \boxed{a_{21} \ a_{22} \ a_{23}} \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{matrix}} \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{22}$$

$$\underbrace{A}_{m\times n} \underbrace{B}_{n\times r} = \underbrace{AB}_{m\times r}$$

triz

una

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$C_{11} = 1.(-4) + 3.5 + (-1)(-1) = 12$

$C_{12} = 1.0 + 3.(-2) + (-1).2 = -8$

$C_{13} = 1.3 + 3.(-1) + (-1).0 = 0$

$C_{14} = 1.(-1) + 3.1 + (-1).6 = -4$

$C_{21} = (-2).(-4) + (-1).5 + 1.(-1) = 2$

$C_{22} =$

$C_{23} =$

$C_{24} =$

$AB = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

Exemplo

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 14$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

equação matricial

$\underbrace{A}_{\text{matriz}}\underbrace{x}_{\text{matriz coluna}} = b$ — matriz coluna

Exemplo $\quad A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ - j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \quad\quad | \\ \quad\quad i \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

Exemplo $\quad A^0 = I_n \quad$ A matriz quadrada

$$A^2 = A \cdot A$$

$$\vdots$$

$$A^k = A^{k-1} A$$

- $A^r A^s = A^{r+s}$, r, s inteiros positivos
- $(A^r)^s = A^{rs}$

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Transposta de uma matriz

A transposta de uma matriz A de ordem $m \times n$ é uma matriz A^T de ordem $n \times m$ obtida pela troca entre linhas e colunas, i.e., i-ésima coluna de A^T é i-ésima linha de A. Alternativamente: $A^T = [c_{ij}]$, $c_{ij}=a_{j}$

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^T =$ $\qquad B^T =$ $\qquad C^T =$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \underbrace{u \cdot v}_{\text{produto escalar}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

$$= [u_1 \; u_2 \; \cdots \; u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= u^T v$$

A Uma matriz quadrada A é simétrica se $A = A^T$.

Álgebra de matrizes

Propriedades

Soma sejam C, A, B $\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

(S1) $A+B=B+A$ comutativa

(S2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (Associativo)

(S3) $A+0=0+A=A$ (0 é matriz nula $m\times n$

multiplicação por escalar: sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

e $c_1, c_2, c \in \mathbb{R}$.

(ME1) $k(A+B)=kA+kB$ distributiva

(ME2) $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$ "

(ME3) $k_1(k_2A)=(k_1k_2)A$

multiplicação Em cada caso considere A, B, C matrizes tal que a operação esteja definida

(M1) $(AB)C=A(BC)$

(M2) $AI_n=I_mA=A$ (A $m\times n$)

(D1) $A(B+C)=AB+AC$

(D2) $(A+B)C=AC+BC$

Obs multiplicação de matrizes não é comutativa

Exemplo $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

$$N=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow N^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

<u>Exemplo</u> A, B matrizes quadradas

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$$

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow A^2+AB+BA+B^2 = A^2+2AB+B^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{BA=AB}$$

Por exemplo, $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$

<u>Propriedades da transposta</u>

Sejam A, B matrizes e $c\in\mathbb{R}$

(i) $(A^T)^T=A$

(ii) $(KA)^T = KA^T$

(iii) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(iv) $(AB)^T=B^TA^T$

(v) $(A^n)^T=(A^T)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

<u>Exemplo</u> $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&-1&0\\2&3&1\end{bmatrix}$

$A^T=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$, $A+A^T=\begin{bmatrix}2&5\\5&8\end{bmatrix}$ simétrica

$B^T=\begin{bmatrix}4&2\\-1&3\\0&1\end{bmatrix}$, $BB^T=\begin{bmatrix}4&-1&0\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\-1&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&5\\5&14\end{bmatrix}$

$$BB^T=\begin{bmatrix}4&2\\-1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1&0\\2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&2&2\\2&10&3\\2&3&1\end{bmatrix}$$

Teorema (i) A é matriz $n \times n \Rightarrow A + A^T$ é simétrica

(ii) A é matriz $m \times n \Rightarrow AA^T$ e A^TA são simétricas

Prova (i) $(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$

(ii) $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$

$(A^TA)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

Inversa de uma matriz.

Considere o SEL

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 4x + 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X$$

Como $A^{-1}(AX) = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -20 \end{bmatrix}$

logo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -20 \end{bmatrix}$.

Um matriz A $n \times n$ é invertível se existe uma matriz A' $n \times n$ tal que

$$AA' = I_n \quad \text{e} \quad A'A = I_n.$$

Neste caso, $A' =: A^{-1}$ é a inversa de A.

<u>Exemplo</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ é invertível com inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Já as matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ <u>não</u> são invertíveis:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ 2y + 4w = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 = -2$ contradição

$\Rightarrow \nexists \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Inversa é única: Suponha que existam duas inversas de A (A' e A''):

$$\begin{cases} A'A = AA' = I_n \\ A''A = A''A = I_n \end{cases} \Rightarrow A' = A'(\underbrace{AA''}_{I_n}) = (\underbrace{A'A}_{I_n})A'' = I_n A'' = A''$$

Propriedades

(1) A é invertível $\Rightarrow$ A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) A é invertível, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ $\Rightarrow$ cA é invertível e
$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$$

(3) A, B matrizes $n \times n$ invertíveis
$\Rightarrow$ AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (regra da meia e sapato)

(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(5) A é invertível e $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ A^n é invertível e
$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

Vamos provar (1), (3) e (5):

(1) A é invertível $\Rightarrow$ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
$\Rightarrow$ A^{-1} é invertível com inversa A
$\underset{\text{unicidade da inversa}}{\Rightarrow}$ $A = (A^{-1})^{-1}$

(3) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$
Pela unicidade da inversa de AB $\Rightarrow$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(5) Indução em n

$n=1 \Rightarrow (A^1)^{-1} = A^{-1} = (A^{-1})^1$

Suponha que $(A^{n-1})^{-1} = (A^{-1})^{n-1}$ p/ $n > 1$

Vamos mostrar que $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

$$A^n (A^{-1})^n = A A^{n-1} (A^{-1})^{n-1} A^{-1} = A A^{n-1} (A^{n-1})^{-1} A^{-1} \quad \text{(por hipótese de indução)}$$

$$= A I_n A^{-1} = I_n$$

$$(A^{-1})^n A^n = A^{-1} (A^{-1})^{n-1} A^{n-1} A$$

$$= A^{-1} (A^{n-1})^{-1} A^{n-1} A \quad \text{(por hip. de indução)}$$

$$= A^{-1} I_n A = I_n$$

Pela unicidade da inversa de $A^n \Rightarrow (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$ ∎

<u>Definição</u> E é uma matriz elementar se foi obtida da matriz identidade por uma operação elementar nas linhas.

<u>Exemplo</u> $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix}$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Definição</u> Uma matriz está na forma escalonada reduzida (por linhas) se

1. Está na forma escalonada
2. Os elementos líderes são iguais a 1
3. cada coluna com um elemento líder tem zeros nas outras linhas.

<u>Exemplo</u> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ está na forma escalonada reduzida

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Líder} \neq 1}$, $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ñ está na forma escalonada}}$, $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{coluna 2 tem entrada} \neq 0 \text{ fora da linha do líder}}$ <u>não</u> estão na forma escalonada reduzida

<u>Fato</u>: Toda matriz é equivalente a uma matriz na forma escalonada reduzida

<u>Exemplo</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{L_3 + 6L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{27})L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + 4L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 - 2L_3]{L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema Fundamental das matrizes invertíveis

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A é invertível.

(ii) $Ax = b$ tem única solução para cada $b \in \mathbb{R}^n$

(iii) $Ax = 0$ tem apenas a solução trivial (i.e. $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$)

(iv) A forma escalonada reduzida de A é I_n

(v) A é um produto de matrizes elementares

Prova (i) $\Rightarrow$ (ii) A é invertível $\Rightarrow$ $x = A^{-1}b$ é a única solução de $Ax = b$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $Ax = 0$ (i.e. $b = 0$) tem solução única. Como $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ é solução de $Ax = 0$ $\Rightarrow$ $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ é a única solução.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Suponha que $Ax = 0$ (tem apenas sol. trivial). Se $A = [a_{ij}]$, então $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad = 0 \\ \quad \ddots \\ \quad\quad x_n = 0 \end{cases}$$

são SEL equivalentes

Então $\left[A \,\middle|\, \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right]$ e $\left[\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right]$ são equivalentes

$\Rightarrow$ A e I_n são equivalentes

$\Rightarrow$ A forma escalonada reduzida de A é I_n

$(iv) \Rightarrow (v)$ $\quad A \xrightarrow[\text{op. elem.}]{} E_1 A \xrightarrow[\text{op. elem}]{} E_2 E_1 A \to \cdots \to E_k \cdots E_1 A = I_n$

$E_1, \ldots, E_k$ invertíveis $\Rightarrow$ $E_1 \cdots E_k$ é invertível $\Rightarrow$ $A = (E_k \cdots E_1)^{-1} I_n$

$= E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$

~~(inversa é invertível) $\Rightarrow$ A é invertível~~

$(v) \Rightarrow (i)$ $\quad A = E_1 \cdots E_k$, E_i matrizes elementares

$\Rightarrow$ A é produto de mat. invertíveis

$\Rightarrow$ A é invertível $\blacksquare$

Vejamos uma aplicação teórica deste teorema.

<u>Corolário</u> A, B matrizes $n \times n$ e $AB = I_n \Rightarrow B$ é invertível e $A = B^{-1}$ (logo A tbm)

<u>Prova</u> $Bx = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ I_n x = x}}{ABx} = A0 = 0$

$\Rightarrow$ $Bx = 0$ tem apenas solução trivial

$\underset{\text{T.F.M.I}}{\Rightarrow}$ B é invertível

$AB = I_n \Rightarrow A = (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} = B^{-1}$ $\blacksquare$

Cálculo da inversa

A é equivalente a $I_n \Rightarrow E_k \cdots E_1 A = I_n$

$\Rightarrow BA = I_n$

$\Rightarrow B = A^{-1} = E_k \cdots E_1 I_n$

Assim, $[A \mid I_n] \rightarrow [E_1 A \mid E_1 I_n]$

$\rightarrow [E_2 E_1 A \mid E_2 E_1 I_n]$

$\vdots$

$\rightarrow [\underbrace{E_k \cdots E_1 A}_{I_n} \mid \underbrace{E_k \cdots E_1 I_n}_{A^{-1}}]$

Ou seja, se A é invertível, então a forma escalonada reduzida de $[A \mid I_n]$ é $[I_n \mid A^{-1}]$.

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 + 2L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right] \rightarrow \cdots$$

Exemplo (i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$

(ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Solução (i) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 + 4L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{5}\right)L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & -1/5 & -4/5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & -1/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 22/5 & 1 & 3/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{5}{22}\right)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & 0 & -1/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 5/22 & 3/22 & 2/22 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 + \frac{4}{5}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/22 & -1/11 & -8/11 \\ 0 & 0 & 1 & 5/22 & 3/22 & 2/22 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4/22 & -1/11 & 3/11 \\ 0 & 1 & 0 & 4/22 & -1/11 & -8/11 \\ 0 & 0 & 1 & 5/22 & 3/22 & 2/22 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/22 & -5/22 & 4/22 \\ 0 & 1 & 0 & 4/22 & -2/22 & -16/22 \\ 0 & 0 & 1 & 5/22 & 3/22 & 2/22 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & -16 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & -16 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{bmatrix}$$

(ii)

Em $\mathbb{Z}_3$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{2+1=0}{=} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2 \times L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

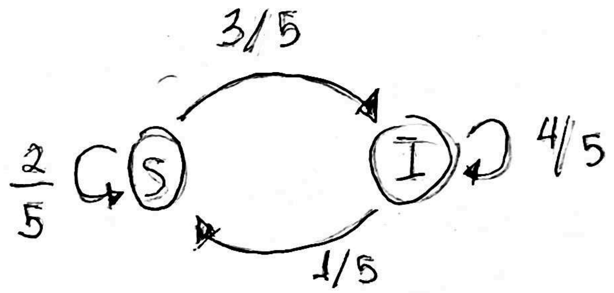
Em $\mathbb{Z}_3$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ pois $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Autovalores e Autovetores

Motivação - Cadeias de Markov

Em uma cidade, os dados sobre a qualidade do ar são classificados como satisfatório (S) e insatisfatório (I)

$\underbrace{P(S|S)}_{\text{Probabilidade de registrado S no outro dia é S}} = \frac{2}{5}$, $P(I|S) = \frac{3}{5}$, $P(S|I) = \frac{1}{5}$, $P(I|I) = \frac{4}{5}$



s_0 = prob. de medir (S) em certo dia "0"
i_0 = " " " I " " " "0"

$X_0 = \begin{bmatrix} s_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$, $X_1 = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$

s_1 = Prob. de medir S no dia "1"
i_1 = " " " I " " "1"

No dia k : $\underset{\text{(Vetor estado)}}{X_k = P X_{k-1}}$, $P = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$ (matriz de transição)

Se $X_k \to X$ p/ k muito grande, então
(se aproxima)

$$\begin{matrix} X_k & = & P X_{k-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & = & PX \end{matrix}$$

x é vetor de estado estacionário.

$$x = Px \Rightarrow (I_2 - P)x = 0$$ (sistema de) equação matricial

$$I_2 - P = \begin{bmatrix} (1-2/5) & -1/5 \\ -3/5 & (1-4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -3/5 & 1/5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{5L_1}{3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$s - \frac{i}{3} = 0$$

$$x = t\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \frac{t}{3} + t = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$ (i.e., no longo prazo $s = 0{,}25\%$, $i = 0{,}75\%$)

Definição: seja A matriz $n \times n$. Um escalar λ é um autovalor de A se existe um vetor $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Esse vetor x é um autovetor de A associado a λ.

<u>obs</u> Outros nomes: valor/vetor próprio; valor/vetor característico

<u>Exemplo</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Mostre que $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é autovetor de A associado a $\lambda = 5$.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5X \Rightarrow Ax = 5X$$

com $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Quais são os outros autovetores de A associados a $\lambda = 5$?

$$Ax = 5X \Rightarrow (A - 5I_2)X = 0$$

$$\left[A - 5I_2 \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} (1-5) & 2 & 0 \\ 4 & (3-5) & 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1/4)L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $x - \frac{1}{2}y = 0$

autovetor de A associado a $\lambda = 5$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{2}t \\ y = t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ou $X = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. são todos os autovetores de A associados a $\lambda = 5$.

Definição Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um autovalor de A. O conjunto de todos os autovetores de A associados a λ, junto com o vetor nulo, é chamado de autoespaço de λ.

Notação: E_λ

Exemplo Vimos que, se $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$, então $E_5=\left\{\begin{bmatrix}t\\2t\end{bmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}$

Exemplo $A=\begin{bmatrix}7 & 1 & -2\\-3 & 3 & 6\\2 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $\lambda=6$. Encontre os autovetores.

$$A-6I_3=\begin{bmatrix}(7-6) & 1 & -2\\-3 & (3-6) & 6\\2 & 2 & (2-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+1 & 1 & -2\\-3 & -3 & 6\\2 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

$$\left[A-6I\,\middle|\,\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}+1 & 1 & -2 & 0\\-3 & -3 & 6 & 0\\2 & 2 & -4 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-3L_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ autovetor de A associado a $\lambda=6$

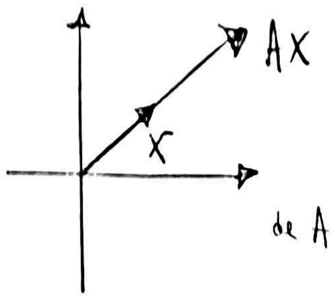
$$\Rightarrow \quad x+y-2z=0$$

ou $\quad x=2s$, $y=2t$, $z=s+t$ $\quad$ ou $X=\begin{bmatrix}2s\\2t\\s+t\end{bmatrix}$, $s,t\in\mathbb{R}$

Note que $X= s\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$ combinação linear

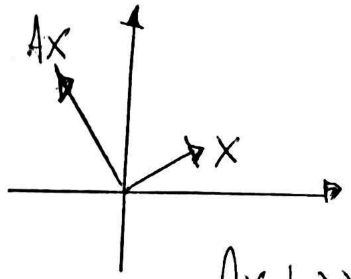
$E_6=\left\{s\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} : s,t\in\mathbb{R}\right\}$ (dizemos que $\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$ gera E_6)

Interpretação geométrica



$Ax = \lambda x$

x é autovetor de A associado a λ.

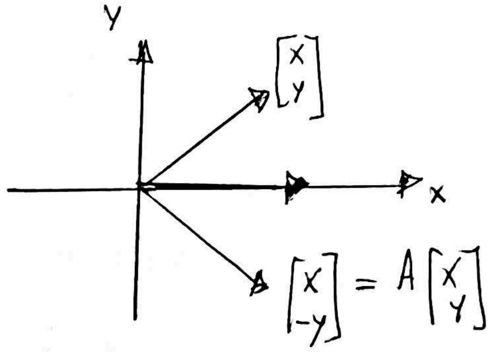


$Ax \neq \lambda x$

→ x não é autovetor de A associado a λ

Exemplo $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é reflexão de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em relação ao eixo x.

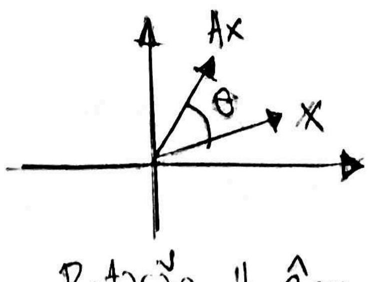
Autovetores ? $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ é autovetor de A em relação a $\lambda = 1$

$$A\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que A não possui outro autovalor $\neq 1$.

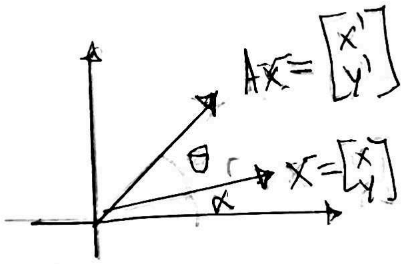
$$E_1 = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo



Note que A não possui autovetor se $\theta \neq 0$, $\theta < 2\pi$

Rotação de ângulo θ (sentido anti-horário)



$x = r\cos(\alpha)$

$y = r\,\text{sen}(\alpha)$

$x' = r\cos(\alpha+\theta)$

$y' = r\,\text{sen}(\alpha+\theta)$

$\cos(\alpha+\theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) - \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\theta)$

$\text{sen}(\alpha+\theta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos(\alpha)$

$\Rightarrow \quad x' = r\left(\cos(\alpha)\cos(\theta) - \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\theta)\right)$

$= \cos(\theta)\,x - \text{sen}(\theta)\,y$

$y' = r\left(\text{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos(\alpha)\right)$

$= \cos(\theta)\,y + \text{sen}(\theta)\,x$

$= \text{sen}(\theta)\,x + \cos(\theta)\,y$

Assim, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Logo, $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

é matriz de rotação

Como encontrar autovalores de uma matriz A?

$(A - \lambda I)x = 0$ deve ter solução não-trivial

$\Rightarrow A - \lambda I$ não deve ser invertível.

Veremos mais um critério de invertibilidade que nos permitirá calcular os autovalores.

Determinantes

Seja A uma matriz $n \times n$

$n=1 \Rightarrow \det A = |A| := a$ onde $A = [a]$

$n=2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = |A| := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n=3 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $\det A = |A| := a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

se A_{ij} é a submatriz de A obtida pela eliminação de linha i e coluna j

$$\Rightarrow \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \underbrace{\det A_{1j}}_{(1,j)\text{- menor complementar de } A}$$

$\det A_{ij}$ é (i,j)- menor complementar de A

Obs A $3\times 3 \Rightarrow \det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$
$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

$\neq$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$n \geq 4 \Rightarrow A = [a_{ij}]$ e $\det A = |A| := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

$C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ é o (i,j)-cofator de A

$\Rightarrow \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$. expansão de cofatores pela 1ª linha.

Teorema da Expansão de Laplace

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Então

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$ (Expansão de Cofatores pela i-ésima linha)

ou

$$\det A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$ (expansão de cofatores pela j-ésima coluna)

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Expansão por cofatores pela 3ª coluna

$$\det A = 0 . C_{13} + 2 . C_{23} + 0 . C_{33} + 0 . C_{43} = 2\, C_{23}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{exp.} \\ \text{por cof.} \\ \text{pela 3ª linha}}}{=} (-1)\left(2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -(2.(8) - 5)$$

$$= -11$$

$$\Rightarrow \boxed{\det A = -22}$$

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

matriz triangular superior

$[a_{ij}]$. com $a_{ij} = 0$ se $i > j$

Expansão por cofatores pela 1ª coluna

$$\det A = 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\left(2 . \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = 3 . 2 . 4 (-1)$$

Em geral, se $A=[a_{ij}]$ é triangular, então

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

matriz $n \times n$

nº total de operações p/ cálculo do determinante $(T(n))$

$n!$ parcelas (da forma $a_{1j_1} a_{12} \cdots a_{1n}$ ou $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$)

- cada parcela $n-1$ produtos
- $n!-1$ somas

$$T(n) = (n-1)n! + n! - 1 = n\,n! - 1 > n!$$

$$\underbrace{50! \approx 3 \times 10^{64}}_{\substack{\text{computador} \\ \text{em } 10^{45} \text{ anos}}} \gg 10^{10}$$ (idade do universo em anos)

Propriedades dos determinantes

Teorema Seja $A=[a_{ij}]$ matriz $n \times n$.

(1) A tem linha ou coluna só com zeros $\Rightarrow \det A = 0$

(2) B é obtida por A pela troca de duas linhas ou colunas $\Rightarrow \det B = -\det A$.

(3) A tem duas linhas iguais $\Rightarrow \det A = 0$.

(4) B é obtida de A pela multiplicação de uma linha (ou coluna) por k $\Rightarrow$ $\det B = k \det A$

(5) $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}}_{=A} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}}_{=B} = A + B$

C_i, A_e, B_e são linhas

$\Rightarrow \det C = \det A + \det B$

(6) $B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + kA_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$, $i \neq j$

B é obtida de $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ por somar uma linha de A por um múltiplo de outra linha

$\Rightarrow \det B = \det A$.

<u>Prova</u> (1) $A = [a_{ij}]$ e $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0$ (Linha i é nula)

Expandindo por cofatores pela linha i

$\det A = 0.C_{i1} + 0.C_{i2} + \dots + 0.C_{in} = 0$

(2) Provaremos mais tarde

(3) $B = \begin{bmatrix} \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_j \\ \vdots \end{bmatrix}$ $B_i = B_j$ Linhas iguais

$\Rightarrow$ $B = \begin{bmatrix} B_j \\ B_i \end{bmatrix}$ e por (2) $\det(B) = -\det B$
trocando linhas

$\Rightarrow \det B = 0$

(4)

$$B = \begin{bmatrix} A_1 \\ kA_i \\ A_n \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = (ka_{i1})C_{i1} + (ka_{i2})C_{i2} + \dots + (ka_{in})C_{in}$$

$$= k \det B$$

(5)

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = A + B$$

$$\Rightarrow \det C = (a_{i1}+b_{i1})C_{i1} + \dots + (a_{in}+b_{in})C_{in}$$

$$= \det A + \det B$$

(6)

$$B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + kA_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ kA_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det B = \det A + \det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 \\ kA_j \\ A_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Linha } i \\ \\ \end{array} \end{array} = \det A + k \det \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_j \\ A_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{duas} \\ \text{linhas} \\ \text{iguais}}} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Linha } i \\ \\ \end{array}$$

$$= \det A$$

S

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{3}L_2}{=} 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_3 - 2L_1 \\ L_4 - 5L_1}}{=} (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}L_2}{=} (-6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 5/2 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_3 - 4L_2 \\ L_4 + L_2}}{=} (-6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 15 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -13/2 \end{vmatrix}$$

$-9 + \frac{5}{2} = -\frac{13}{2}$

$$= (-6) \cdot 15 \cdot (-13/2) = 3 \cdot 15 \cdot 13 = 585$$

Determinantes de matrizes elementares

Exemplo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{k \neq 0}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

~~Teorema~~ Seja E uma matriz elementar $n \times n$

(1) Se E é obtida pela troca de duas linhas em I_n, $\det E = -1$. ($\det E = -\det I_n$)

(2) Se E é obtida por multiplicação de uma linha de I_n por k, então $\det E = k$ ($\det E = k \det I_n$)

(3) Se E é obtida pela soma de um múltiplo de uma linha de I_n com outra linha, $\det E = 1$.
($\det E = \det I_n$)

Exemplo $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

$\cancel{\det}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

$= EB$

$\det C = -\det B = (\det E)(\det B)$

logo, $\det(EB) = (\det E)(\det B)$

Seja $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ a matriz elementar troca linha i e j de I_n

E_{kL_i} " " " multiplica linha i de I_n por k

$E_{L_i+kL_j}$ " " " obtida pela soma da linha i e um múltiplo da linha j $(j \neq i)$ de I_n

$$\det(E_{L_i \leftrightarrow L_j} B) = -\det B = \underbrace{(\det E_{L_i \leftrightarrow L_j})}_{=-1} \det B$$

$$\det(E_{kL_i} B) = k \det B = \det(E_{kL_i}) \det B$$

$$\det(E_{L_i+kL_j} B) = \det B = (\det E_{L_i+kL_j})(\det B)$$

Assim, para qualquer matriz elementar E $n \times n$

$$\boxed{\det(EB) = (\det E)(\det B)}$$

Teorema Uma matriz A $n \times n$ é invertível $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Prova Considere R a forma escalonada reduzida de A. Logo

$$E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A = R$$

onde $E_1, E_2, \ldots, E_r$ são matrizes elementares.

$$\Rightarrow \det R = \det(E_r \cdots E_1 A)$$
$$= \det(E_r (E_{r-1} \cdots E_1 A))$$
$$= \det(E_r) \cdot \det(E_{r-1} \cdots E_1 A)$$
$$\vdots$$
$$= \det(E_r) \cdots (\det E_1) \det A$$

Como $\det(E_s), \dots, \det(E_1) \neq 0$, temos que

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det R \neq 0.$$

Suponha que A é invertível. Então, pelo teorema fundamental das matrizes invertíveis, $R = I_n$.

Assim, $\det R \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$

Agora, suponha $\det A \neq 0$. Então $\det R \neq 0$

Assim, R não contém linha nula (senão $\det R = 0$)
ou coluna

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = I_n.$$

Pelo teorema fundamental das matrizes inversas A é invertível ■

<u>Determinante e operações com matrizes</u>

Queremos saber se existem fórmulas simples para $\det(kA)$, $\det(A+B)$ e $\det(AB)$, onde A, B matrizes $n \times n$ e k constante.

(i) kA: se $A = [a_{ij}]$, então $kA = [k a_{ij}]$

$$\det(kA) = \begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ ka_{31} & & ka_{3n} \\ \vdots & & \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$\dots = K^n \det A$

Logo, $\det KA = K^n \det A$, onde A é matriz $n \times n$.

(ii) $A+B$: Em geral, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(A+B) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$

e $\det A + \det B = 1$

Obs. Existe fórmula p/ $\det(A+B)$, porém é complicada!

(iii) AB: $\det(AB) = (\det A)(\det(B))$

Prova caso 1: A é invertível.

Como A é invertível $\underset{\text{T.F.M.I}}{\Rightarrow}$ $A = E_1 \cdots E_r$, E_i é matriz elementar

$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_r B)$
$= \det E_1 \cdots \det E_r \det B$
$= \det(E_1 \cdots E_r) \det B = \det A \det B$

caso 2: A n/ é invertível $\Rightarrow AB$ não é invertível ($AB(AB)^{-1} = I$.) $\Rightarrow \det AB = 0 = \det A \det B$

Formalmente devemos provar por indução em r:

$r = 1 \Rightarrow A = E_1$ e $\det AB = \det E_1 B = \det E_1 \det B = \det A \det B$

$r > 1$ suponha que $\det(E_2 \cdots E_r B) = \det E_2 \cdots E_r \det B$

$\Rightarrow \det(E_1 E_2 \cdots E_r B) = \det E_1 \det(E_2 \cdots E_r B)$
$= \det E_1 \det E_2 \cdots E_r \det B = \det(E_1 \cdots E_r) \det B = \det A \det B$

Exemplo $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det AB = \det \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 16 & 5 \end{bmatrix} = 60-48 = 12$$

$$\det A \det B = 4 \cdot 3 = 12$$

Teorema (i) A é matriz $n\times n$ invertível $\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

(ii) $\det A = \det A^T$ (iii) $\operatorname{adj} A = [C_{ij}]^T$, onde C_{ij} é (i,j)-cofator

A é invertível, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$

Prova (i) $AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det AA^{-1} = \det I_n = 1$

$$\det AA^{-1} = (\det A)(\det A^{-1}) \qquad \det A \neq 0$$

$$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

(ii) (Ideia) $n=2$ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$$\det A^T = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$n=3$ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = \det A^T$$

primeira linha de A

primeira coluna de A^T

Autovalores e Autovetores de matrizes $n \times n$

Lembrando que λ é autovalor de A (matriz $n \times n$)

se existe um vetor $\neq \vec{0}$ $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\vec{X} = \lambda \vec{X}.$$

logo, ~~existe~~ $\vec{X}$ é solução (não trivial) da equação $(A - \lambda I_n)\vec{X} = 0$

$\Rightarrow$ $A - \lambda I_n$ ~~invertível~~ não é invertível

$\Rightarrow$ $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Lembre-se que um polinômio na variável x com coeficientes reais é uma expressão (formal)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{(de grau } n \text{ se } a_n \neq 0\text{)}$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Um número α é raiz de $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$.

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $A - xI_2 = \begin{bmatrix} 3-x & (-2) \\ 4 & 1-x \end{bmatrix}$

$p_A(x) = \det(A - xI_n) = (3-x)(1-x) + 8 = x^2 - 4x + 11$ polinômio

raízes de $p_A(x)$: $\lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 44}}{2} \notin \mathbb{R}$

logo, $p_A(\lambda)$ não possui raízes em $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A não possui autovalores reais

Em geral, se A é matriz $n \times n$ então

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

é o polinômio característico de A

e $P_A(\lambda) = 0$ é a equação característica de A,

Algoritmo para encontrar autovalores e autovetores

Entrada: A matriz $n \times n$

(1) Encontre $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$

(2) Encontre as raízes de $P_A(\lambda)$ $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

(3). Para cada λ_i autovalor encontre ~~as~~ o conjunto solução E_{λ_i} da equação $(A - \lambda_i I_n)X = 0$

saída: Autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Auto espaços $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$

Exemplo. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

(1) $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & (\lambda-4) \end{vmatrix}$

não usar propriedades pois λ pode ser zero

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 5 & (\lambda-4) \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & (\lambda-4) \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) + (-2) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

(2) Raízes de $P_A(\lambda)$: Existem diversos métodos p/ encontrar raízes ou aproximações. Em casos simples podemos usar:

- $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$

$= (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda-\lambda_m)^{n_m} q_1(\lambda) \dots q_t(\lambda)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$n_i = \alpha(\lambda_i)$ é a multiplicidade algébrica de λ_i. e $q_i(\lambda)$ são polinômios de grau 2 sem raízes reais.

Exemplo $\lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$

$\lambda_1 = 1$ e $q_1(\lambda) = \lambda^2+\lambda+1$,

No nosso caso, $\lambda_1 = 1$ é raiz de $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = P_A(\lambda)$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = (\lambda-1)\,p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+2) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$\alpha(1) = 2,\ \alpha(2) = 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 & \lambda - 1 \\
\cline{3-3}
- & \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\
\cline{2-2}
 & -3\lambda^2 + 5\lambda - 2 & \\
- & -3\lambda^2 + 3\lambda & \\
\cline{2-2}
 & 2\lambda - 2 & \\
- & 2\lambda - 2 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$= \dfrac{3 \pm 1}{2} = 2$ e 1

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$ são os autovalores de A

(3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: $A - 1 I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

$$[A - I_2 | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 + 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a $\lambda_1 = 1$

$$\Rightarrow \quad x_1 = t \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$x_2 = t$$
$$x_3 = t$$

$\Rightarrow E_1 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ é autoespaço associado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

- $\lambda_3 = 2$

$$[A - 2I_2 | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}L_2]{L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 + 5L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} t \\ x_2 = \frac{1}{2} t \\ x_3 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$E_2 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ é o autoespaço associado a $\lambda_3 = 2$.

Em geral, se A é uma matriz $n \times n$ com entradas reais, então o polinômio característico de A, $P_A(\lambda)$ é um polinômio com coeficientes reais, i.e.

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{com } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

Como vimos podemos fatorar $P_A(\lambda)$ como

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} q_1(\lambda) \dots q_s(\lambda)$$

onde $q_1(\lambda), \dots, q_s(\lambda)$ são polinomios de grau 2 sobre $\mathbb{R}$, i.e.
(sem raízes reais)

$$q_i(\lambda) = \lambda^2 + b_i \lambda + c_i \quad \text{com } b_i, c_i \in \mathbb{R}.$$

~~Pa~~ Como $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são raízes de $P_A(\lambda)$, temos que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são os autovalores reais de $P_A(\lambda)$

Os números inteiros n_i é a multiplicidade algébrica do autovalor λ_i (com $i = 1, \dots, r$)

<u>Exemplo</u> vimos que se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

Logo, $\lambda = 1$ é autovalor de A com multiplicidade algébrica 2

$\lambda = 2$ é autovalor com multiplicidade algébrica 1

$\lambda \in \mathbb{R}$
autovalor

Lembrando que dado o sistema $[A-\lambda I \| 0]$ temos a forma escalonada $[E|0]$. O número de variáveis livres é

$$n - \text{posto}(A-\lambda I) = n - n^{\underline{o}} \text{ de entradas pivô de } E$$
(ou Líder)

Neste caso, o número $n - \text{posto}(A-\lambda I)$ é a multiplicidade geométrica do autovalor λ.

<u>Obs</u>. Quando estudarmos sobre dimensão de subespaços vetoriais, veremos que $n - \text{posto}(A-\lambda I)$ = dimensão do autoespaço E_λ

· ~~cor~~ Na literatura multiplicidade geométrica é definida como a dimensão de E_λ.

<u>Exemplo</u> $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Autovalores / Autoespaço

(1) Polinômio ~~ca~~ característico

$$\lambda I_3 - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+1) & 0 & -1 \\ -3 & \lambda & 3 \\ -1 & 0 & (\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \underset{\substack{\uparrow \\ 2^{\underline{a}} \text{ coluna}}}{(-1)^{2+2}} \lambda \begin{vmatrix} (\lambda+1) & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda((\lambda+1)^2 - 1) = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda) ~~\cancel{+1-1}~~$$

~~$= \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1$~~

(6)

Logo, $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+2)$

(2) As raízes (reais) de $P_A(\lambda)$ são $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ e $\lambda_3 = -2$

multiplidade algébrica de $\lambda_1 = 0$ $= 2$

" " " $\lambda_3 = -2$ $= 1$

(3) Autoespaços

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: $[A - 0.I_3 \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[(-1)L_1]{L_2+3L_1,\ L_3+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. um coef. líder

multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = 0$ $= 3 - \text{Posto}(A) = 3 - 1 = 2$

Autovetor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (relativo) associado a $\lambda = 0$ $\Rightarrow x_1 - x_3 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$ $t, s \in \mathbb{R}$

$E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$ autoespaço associado a $\lambda = 0$.

$\lambda = -2$: $\left[A - (-2)I_3 \,|\, 0\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} (-1+2) & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & (-1+2) & 0 \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

multiplicidade geométrica de $(\lambda_3 = -2) = 3 - 2 = 1$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ autovetor de A associado a $\lambda_3 = -2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$E_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Observe que mult. alg. de $\lambda = 0$ = mult. geo. de $\lambda = 0$
" " " $\lambda = -2$ = " " " $\lambda = -2$

Espaços vetoriais

Definição Um conjunto não-vazio V com uma adição $+$ e um produto ~~esc~~ por escalar é um <u>espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$</u> (escalares, tipicamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Adição: (A1) $u+v$ está em V
$(\forall u,v,w \in V)$

(A2) $(u+v)+w = u+(v+w)$

(A3) Existe $0 \in V$ tal que $0+u = u+0 = u$

(A4) Dado $u \in V$ existe $(-u) \in V$ com $u+(-u) = 0$
$= (-u)+u$

(A5) $u+v = v+u$

multiplicação por escalar: $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$, $\forall u,v \in V$

(ME1) $\alpha u \in V$

(ME2) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

(ME3) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

(ME4) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

(ME5) $1.u = u$

<u>Obs.</u> Ideia introduzida por Hermann Grassmann, axiomatizada por Giuseppe Peano e popularizada por Hermann Weyl.

<u>Exemplos</u> (1) $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ Soma e multiplicação por escalar usual

matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ matrizes $m \times n$ com coeficientes em $\mathbb{R}$

$0 =$ matriz nula, $-[a_{ij}] = [-a_{ij}]$

E

(2) Conjunto-solução de equações lineares homogêneo
Sistema

$$\circledast \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m1}x_n = 0 \end{cases}$$ é SEL homogeneo

Podemos escrever $A\vec{x} = \vec{0}$, onde $A = [a_{ij}]$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\vec{0}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Suponha que $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ são soluções

de $\circledast$ $\Rightarrow$ $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0}_m + \vec{0}_m = \vec{0}_m$

logo, $\vec{u}+\vec{v}$ é solução de $\circledast$

Além disso, $\vec{0}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ é solução de $\circledast$ pois

$A\vec{0}_n = \vec{0}_m$. e $A(-\vec{u}) = -A\vec{u} = -\vec{0}_m = \vec{0}_m$

Como vale assocuativa e comutatividade da soma temos
uma adição no conjunto-solução de $\circledast$

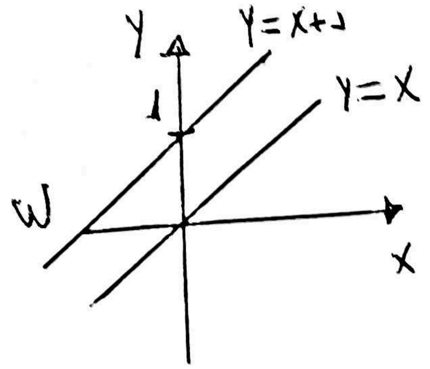
$\alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow A(\alpha\vec{u}) = \alpha A\vec{u} = \alpha\vec{0}_m = \vec{0}_m \Rightarrow \alpha\vec{u}$ é solução

~~claramente~~ $\cancel{A(\alpha(u+v)) = \alpha(Au+Av) = \alpha(\vec{0}_m+\vec{0}_m) = \vec{0}_m}$

$\cancel{\Rightarrow \alpha(u+v)}$ ~~é~~

claramente,
$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$$
$$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$$
$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$
$$1u = u$$

Ex (3)



$V = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$

é espaço vetorial

pois é conjunto-solução

$y - x = 0$ ou $-x + y = 0$

equação linear homogênea

$W = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$ não é espaço vetorial com a soma e mult. por escalar usuais

. $\vec{0} \notin W$ não satisfaz A3

$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ estão em W

mas $u + v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ com $1 \neq -1 + 1 = 0$

$\Rightarrow u + v \notin W$ (não satisfaz A1)

Teorema seja V um espaço vetorial, $\vec{u} \in V$ vetor e $\alpha \in \mathbb{F}$ um escalar.

(i) $0.\vec{u} = \vec{0}$

(ii) $\alpha.\vec{0} = \vec{0}$

(iii) $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

(iv) se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Prova (i) $0\vec{u} = (0+0)\vec{u} = 0\vec{u} + 0\vec{u} \Rightarrow \vec{0} = 0.\vec{u} - 0\vec{u}$

$-0\vec{u}$

$= 0\vec{u} + 0\vec{u} - 0\vec{u}$

$= 0\vec{u}$

(ii) $\alpha.\vec{0} = \alpha(\vec{0}+\vec{0}) = \alpha.\vec{0} + \alpha.\vec{0} \xrightarrow{-\alpha.\vec{0}}$

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha.\vec{0} - \alpha.\vec{0} \\ &= \alpha.\vec{0} + \alpha.\vec{0} - \alpha.\vec{0} \\ &= \alpha.\vec{0}\end{aligned}$$

(iii) $\vec{0} = 0.\vec{u} = (1+(-1))\vec{u} = \vec{u} + (-1)\vec{u}$

$\underset{\text{unicidade do elemento oposto}}{\Rightarrow} \quad (-1)\vec{u} = -\vec{u}$

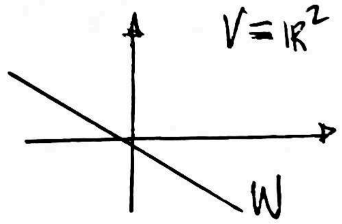
(iv) Suponha $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, e $\alpha \neq 0$. Então

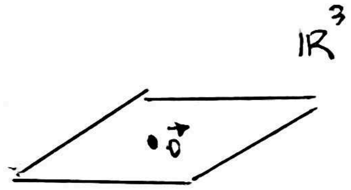
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha\vec{u}) = \frac{1}{\alpha}\vec{0} = \vec{0}$$

Por outro lado, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha\vec{u}) = \left(\frac{1}{\alpha}.\alpha\right)\vec{u} = 1.\vec{u} = \vec{u}$

Logo, $\vec{u} = \vec{0}$ $\boxtimes$

<u>Subespaços</u>





<u>Definição</u> Um subconjunto $W \neq \emptyset$ de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se W com a mesma adição e multiplicação por escalares de V é um espaço vetorial.

(4)

L espaço vet. das matrizes 2x2 (5)

Como verificar se W é subespaço:

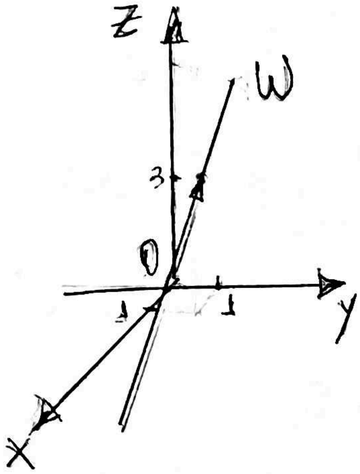
(i) u, v estão em $W \Rightarrow u+v$ está em W

(ii) $u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ (escalar) $\Rightarrow \alpha u$ está em W

(0) $\{0\}$ e V são subespaços de V

<u>Exemplo</u> (1) $\begin{cases} x \mp 2y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow W = \left\{ \begin{bmatrix} 3t \\ t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

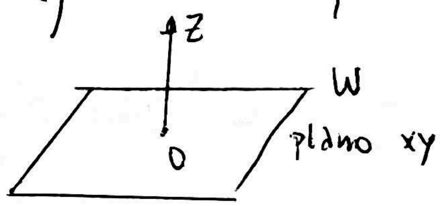
é conjunto solução



Já vimos que W é ~~[...]~~ espaço vetorial com a soma e mult. por escalar de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$

(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$



(3) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ matrizes triangular superior 2x2

(1) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+a') & (b+b') \\ 0 & (c+c') \end{bmatrix}$ triangular superior (i.e. está em W)

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & \alpha c \end{bmatrix}$ está em W

Logo, W é subespaço de $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\llcorner$ espaço vet. das matrizes 2x2

(4) A matriz $n \times n$, λ um autovalor e E_λ o auto-espaço associado a λ, i.e. 2

$$E_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \lambda \vec{x}\}$$

(i) $\vec{u}, \vec{v}$ ~~são~~ estão em E_λ $\Rightarrow$
$$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} = \lambda(\vec{u}+\vec{v})$$

Logo, $\vec{u}+\vec{v}$ está em E_λ

(ii) $\alpha \in \mathbb{F}$ (escalar), $\vec{u}$ está em E_λ
$$\Rightarrow A(\alpha\vec{u}) = \alpha A\vec{u} = \alpha(\lambda\vec{u}) = (\alpha\lambda)\vec{u} = \lambda\alpha\vec{u} = \lambda(\alpha\vec{u})$$

Assim $\alpha\vec{u}$ está em E_λ

Portanto, E_λ é subespaço de $\mathbb{F}^n$ (i.e. auto espaço é subespaço vetorial)

(5) $V = \mathbb{F}[x] = \{$polinômios na variável x com coeficientes em $\mathbb{F}\}$

é um espaço vetorial (deve ser checado)

Por exemplo,
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$$

$$\Rightarrow f(x)+g(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0+b_0) \in V$$

α escalar, $\alpha f(x) = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \dots + \alpha a_0 \in V$

$0 =$ polinômio nulo $= 0.x^n + \dots + 0$

$-f(x) = (-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \dots + (-a_0)$

Checando ME2: $\alpha(f(x)+g(x)) = \alpha(a_n+b_n)x^n + \alpha(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \dots + \alpha(a_0+b_0)$
$$= \alpha(a_n x^n + \dots + a_0) + \alpha(b_n x^n + \dots + b_0) = \alpha f + \alpha g$$

6

(7)

$W = P_2 = \{ f(x) \in V : f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \}$ polinômios de grau menor ou igual a 2

(i) $(a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)$

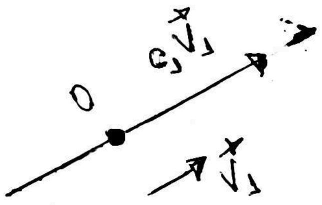
$= (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + a_0 + b_0 \in P_2 = W$

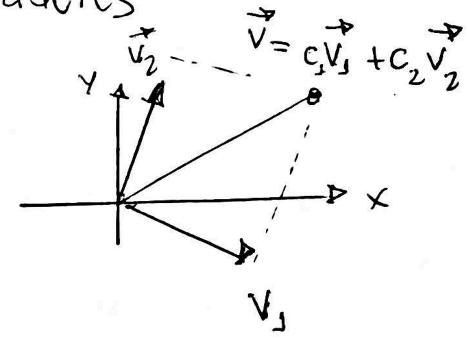
(ii) $\alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (\alpha a_2)x^2 + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0) \in P_2 = W$

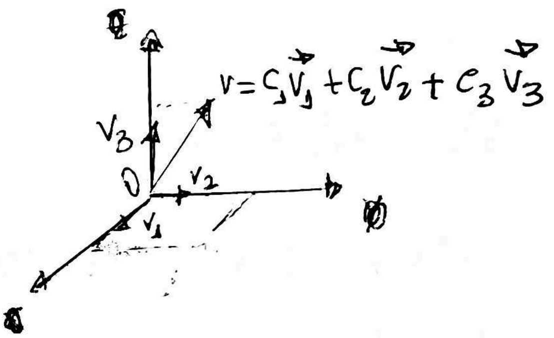
Logo, W é subespaço de V.

!

Conjuntos geradores







Em geral, dado V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}_p$) e vetores $v_1, \dots, v_k \in V$

o vetor
$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{F}$ (escalares) é uma combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_k$.

→ coeficientes da comb. linear

<u>Exemplo</u>
$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v = (-1)\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

é uma combinação linear de v_1 e v_2

Definição Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. O subconjunto

$$\text{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \;\middle|\; c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{F} \right\}.$$

(i.e. conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, \ldots, v_k$) é o subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$. Neste caso, ~~W = Span~~ $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é um conjunto gerador de $W = \text{Span}(v_1, \ldots, v_k)$.

Vamos checar que $W = \text{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ é um subespaço de V:

Suponha $u, v \in W$. Então $u = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^{k} d_i v_i$ para algum $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{F}$.

(1) $u + v = \sum c_i v_i + \sum d_i v_i = \sum (c_i + d_i) v_i$ comb. linear de $v_1, \ldots, v_k$

(2) $\alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha u = \alpha \sum c_i v_i \overset{\text{distr.}}{=} \sum \alpha (c_i v_i)$

$= \sum (\alpha c_i) v_i$ comb. linear de $v_1, \ldots, v_k$

Exemplo $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dado $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$, $u = x v_1 + y v_2 = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = a \\ 2x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = b/2 \\ y = a + b/2 \end{array}, \text{ i.e. } u = \left(\frac{b}{2}\right) v_1 + (a + b/2) v_2$$

logo, $\text{Span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$

Exemplo $V = \mathcal{P}_2 = \{ a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{F} \}$

$\{1, x, x^2\}$ é conjunto gerador de V

$$a + bx + cx^2 = a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 \quad \text{onde} \quad v_i = x^{i-1}$$

<u>Exemplo</u> $\mathcal{F} = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é uma função} \}$

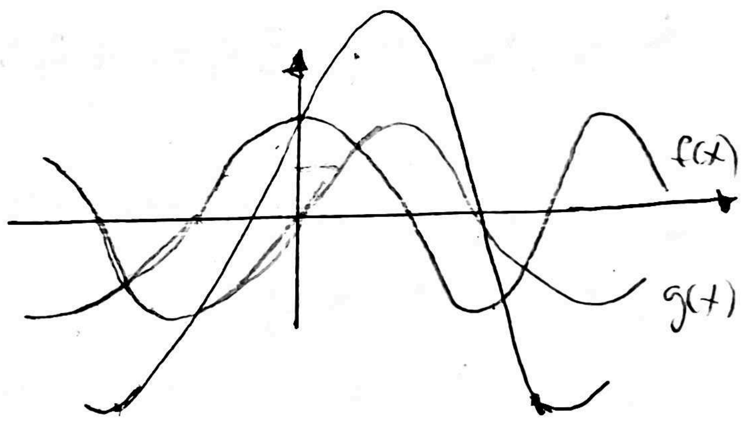
Soma: $(f+g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mult. por escalar: $(\alpha f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$
$g(x) = \cos(x)$



$h(x) = \operatorname{sen}(2x)$ está em $W = \operatorname{Span}(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$?

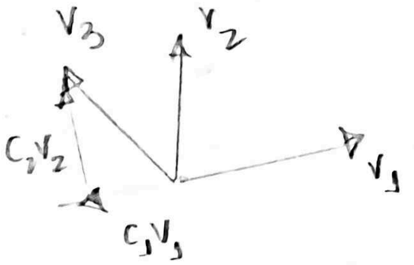
$$\operatorname{sen}(2x) = c_1 \operatorname{sen}(x) + c_2 \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 \Rightarrow c_2 = 0$

$x = \pi/2 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$
(ou $90°$)

Logo, $\operatorname{sen}(2x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
No entanto, $\operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 1 \neq 0$. Portanto $h(x) = \operatorname{sen}(2x) \notin W$.

Independência linear



$$v_3 = c_1v_1 + c_2v_2 + 0.v_3$$
$$v_3 = 0.v_1 + 0.v_2 + 1.v_3$$

Quando dado $v_1, \dots, v_k$ vetores os coeficientes são unicamente determinados?

$$v = b_1v_1 + \dots + b_kv_k \iff \underbrace{(b_1-d_1)}_{c_1}v_1 + \dots + \underbrace{(b_k-d_k)}_{c_k}v_k = 0$$
$$= d_1v_1 + \dots + d_kv_k$$

Logo, v é unicamente determinado pelos coef. da comb. linear de $v_1, \dots, v_k$ $\iff$ $c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0$ implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

<u>Definição</u> Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $v_1, \dots, v_k \in V$. O conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente (LI) se a combinação linear

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$$

tem apenas como coef. $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ (i.e. não existe outra possibilidade p/ os c_i's)

Caso contrário, $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente dependente. (LD)

<u>Obs</u> $\{v_1, \dots, v_k\}$ é LD $\Rightarrow$ Existem $c_1, \dots, c_k$ escalares não todos nulos com

$$c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0.$$

Exemplo. $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI? Suponha que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_3 \\ c_1 + c_2 \\ c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (*) \begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Note que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI $\Leftrightarrow$ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ é única solução do sistema $(*)$

$$\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ é invertível}$$

Como

$$\det A \underset{L_1 - L_2}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ A é invertível $\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ é LI

Obs. Poderíamos ter resolvido o sistema e encontrado $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ como única solução

Exemplo $V = P_n = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in F\}$

$v_i = x^{i-1} \Rightarrow \{v_1, \dots, v_{n+1}\} = \{1, x, \dots, x^n\}$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_0 v_1 + a_1 v_2 + \dots + a_n v_{n+1} = 0$$

$\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i \Rightarrow \{1, x, \dots, x^n\}$ é LI

Exemplo $V = \mathcal{F}$, $V = \{\underbrace{\text{sen}\,2x}_{v_1}, \underbrace{\text{sen}(x)\cos(x)}_{v_2}\}$

Como $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$

$$\Rightarrow 0 = 1.\,\text{sen}(2x) + (-2)\,\text{sen}(x)\cos(x)$$

$$= 1.\,v_1 + (-2)\,v_2$$

Logo, $\{\text{sen}(2x), \text{sen}(x)\cos(x)\}$ não é LI (é LD)

Base

Definição Um subconjunto de um espaço vetorial V é uma base de V se

(i) B gera V (i.e. B é um conjunto gerador p/ V)

(ii) B é LI.

Exemplo $V = \mathbb{R}^n$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ..., $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

ou seja, e_i é a coluna i da matriz Identidade I_n.

$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^n \Rightarrow u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

Logo, todo vetor de $\mathbb{R}^n$ é uma comb. linear de $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ .. Portanto, B gera $\mathbb{R}^n$

$\vec{0} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow x_i = 0, \forall i \Rightarrow B$ é LI

(6)

Bases

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ (conjunto de escalares)

Lembrando: (i) Um subconjunto $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V gera V se todo vetor $v \in V$ é combinação linear de $v_1, \dots, v_n$, ou seja, $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$.

(ii) $\mathcal{B}$ é LI se a combinação linear do vetor nulo

$$\vec{0} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

tem como única possibilidade $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

<u>Definição</u> $\mathcal{B}$ é uma base de V se

(i) $\mathcal{B}$ gera V

(ii) $\mathcal{B}$ é LI.

Exemplos (1) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ é <u>base</u> de $\mathbb{R}^3$

verificação:

(i) $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3 \Rightarrow \mathcal{B} \text{ gera } \mathbb{R}^3$$

(ii) $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \vec{0} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

(2) $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & -5 & 4\end{bmatrix}$ Vimos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$ são os autovalores de A

e que $E_1 = \left\{ t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_1}\Big)$

$E_2 = \left\{ t\begin{bmatrix}1/4\\1/2\\1\end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1/4\\1/2\\1\end{bmatrix}}_{v_2}\Big)$

Note que $B_1 = \{v_1\}$ e $B_2 = \{v_2\}$ são LI

$c_1 v_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ pois $v_1 \neq 0$

$c_2 v_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ pois $v_2 \neq 0$

Logo, B_1 é base de E_1

B_2 " " " E_2.

$B_1 \cup B_2 = \{v_1, v_2\}$ é LI

$\left.\begin{array}{l}\vec{0} = c_1 v_1 + c_2 v_2\\ \Rightarrow 0 = c_1 v_1 + c_2 2 v_2\end{array}\right\} \Rightarrow c_2 v_2 = 0$

$c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 = 0$.

<u>Obs</u> (1) $B = \{v\}$ subconjunto de um espaço vetorial é LI se e somente se $v \neq 0$. //

$\Rightarrow A\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = v$ tem solução

(2) Note que $v_1 = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix}$

A é inver-

$\Rightarrow$ tível

$A = [a_{ij}]$ (1)

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é LI $\Leftrightarrow$ $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ tem única solução $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $A\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ tem única sol. (2)

logo, [illegible]

(3) $\mathcal{B} = \{\overset{v_1(x)}{1+x}, \overset{v_2(x)}{x+x^2}, \overset{v_3(x)}{1+x^2}\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$.

Solução 1: (i) $p(x) = a+bx+cx^2$

$$a+bx+cx^2 = p(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x)$$
$$= c_1(1+x) + c_2(x+x^2) + c_3(1+x^2)$$
$$= (c_1+c_3) + (c_1+c_2)x + (c_2+c_3)x^2$$

$$\Rightarrow \ (*) \begin{cases} c_1 + c_3 = a \\ c_1 + c_2 = b \\ c_2 + c_3 = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 = a \\ c_2 - c_3 = b-a \\ c_2 + c_3 = c \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 = a \\ c_2 - c_3 = b-a \\ 2c_3 = \underbrace{a+b+c}_{a-b+c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_3 = \frac{a-b+c}{2}, \quad c_2 = b-a+\frac{a-b+c}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$$

$$c_1 = a - \frac{a-b+c}{2} = \frac{a+b-c}{2}$$

Logo, $\mathcal{B}$ gera $\mathcal{P}_2$.

(ii) $\overset{a}{0} + \overset{b}{0}x + \overset{c}{0}x^2 = c_1(1+x) + c_2(x+x^2) + c_3(1+x^2)$

$\rightarrow c_1 = 0, \ c_2 = 0, \ c_3 = 0$

$\rightarrow \mathcal{B}$ é LI.

Solução 2: matriz de coef. de (*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível pois $\det A = 1+1 = 2 \neq 0$

Logo o sistema tem única solução

Coordenadas

Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V. Vimos que, pelo fato de B ser LI, uma combinação linear

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

é unicamente determinada pelos coef. $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Como B gera, significa que todo $v \in V$ é escrito

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

e assim, unicamente determinado pelos coef. $c_1, \dots, c_n$.

~~Definição Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V e $v =$~~

Neste caso, $c_1, c_2, \dots, c_n$ são as coordenadas de v relativas à base B e o vetor

$$[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

é o vetor de coordenadas de v relativo à base B.

Exemplo $p(x) = 2 - 3x + 5x^2$. Encontre $[p(x)]_B$ onde

(a) $B = \{1, x, x^2\}$

(b) $B = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$

(a) $p(x) = 2 - 3x + 5x^2 = \boxed{2} + \boxed{(-3)}x + \boxed{5}x^2$

$$\Rightarrow [p(x)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(b) $P(x) = c_1(1+x) + c_2(x+x^2) + c_3(1+x^2)$

$$\underbrace{2}_{a} + \underbrace{(-3)}_{b}x + \underbrace{5}_{c}x^2$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{a+b-c}{2} = \frac{2-3-5}{2} = -3$$

$$c_2 = \frac{-a+b+c}{2} = \frac{-2-3+5}{2} = 0$$

$$c_3 = \frac{a-b+c}{2} = \frac{2+3+5}{2} = 5$$

$$\Rightarrow [P(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Em geral, se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de um espaço vetorial V, u, v vetores em V, então

(a) $[u+v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$

(b) $[\alpha u]_{\mathcal{B}} = \alpha [u]_{\mathcal{B}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (escalar)

(c) $\{[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_n]_{\mathcal{B}}\}$ é base canonica de $\mathbb{R}^n$.

<u>Exemplo</u> $V = \mathcal{P}_2$, vimos que $\mathcal{B} = \{\underbrace{1+x}_{v_1}, \underbrace{x+x^2}_{v_2}, \underbrace{1+x^2}_{v_3}\}$ é base de V

$$v_1 = 1 v_1 + 0.v_2 + 0.v_3 \Rightarrow [v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = 0.v_1 + 1.v_2 + 0.v_3 \Rightarrow [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = 0.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3 \Rightarrow [v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>obs</u>

Em geral, $\{u_1, \dots, u_k\}$ é LI em V

$\Leftrightarrow \{[u_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [u_k]_{\mathcal{B}}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é LI.

Dimensão

$\dim V$
$\parallel$

Seja $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ uma base de V, então n é a dimensão de V, ou seja, a dimensão de um espaço vetorial é o número de elementos de uma base.

Perguntas:

(1) Todo espaço vetorial possui base? sim

(2) Quaisquer duas bases tem o mesmo número de vetores? sim

obs. É possível que V tenha uma base com quantidade infinita de vetores

Exemplo (1) $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$

e_i é a coluna i da matriz identidade I_n

i.e. $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ — linha i $\Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$

(2) $P_n=\{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \mid a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}=\{1,x,\dots,x^n\}$ é base de P_n $\Rightarrow \dim P_n = n+1$

③ $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 18\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$

$P_A(x)=x^3+4x^2-3x-18$

$P_A(x)=(x-2)(x+3)^2$

$\gamma_A(2)$
$\parallel$
$\boxed{\dim E_3=2}$

$[A+3I \mid 0]=\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & 18 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ (6)