

Lista 6

Álgebra Comutativa - SMA5771

June 22, 2025

Exercícios

- Para $1 \leq i \leq n$, sejam $A_i \subset B_i$ extensões de anéis. Mostre que
 - $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n B_i$ é integral $\prod_{i=1}^n A_i$ se e somente se x_i é integral sobre A_i para todo i .
 - $\prod_{i=1}^n A_i$ é integralmente fechado em $\prod_{i=1}^n B_i$ se e somente se A_i é integralmente fechado em B_i para todo i .
- Seja \mathbb{K} um corpo, X e Y variáveis. Faça
$$A := \mathbb{K}[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$$
e seja $x, y \in A$ as classes de X, Y , respectivamente. Prove que A é um domínio, mas não é um corpo. Fazendo $t := x/y \in \text{Frac}(A)$. Prove que $\mathbb{K}[t]$ é o fecho integral de A em $\text{Frac}(A)$.
- Seja $A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^2(X + 1))$. Mostre que as localizações $A_{\mathfrak{m}}$ são normais para todos os ideais maximais \mathfrak{m} de A com exceção de $\mathfrak{m} = (\bar{X}, \bar{Y})$.
- Mostre que $\mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3 + X)$ é normal.
- Diremos que uma extensão de anéis $B \supset A$ satisfaz o going-up ou o going-down se as conclusões dos respectivos teoremas valem para todo para de ideais $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}'$ em A ou $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}'$ em B . Para cada extensão $B \supset A$ a seguir, decidir se o going-up/ going-down é satisfeito.
 - $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}[1/7]$.
 - $A = \mathbb{C}[X, Y], B = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(Z^2 - X)$.
 - $A = \mathbb{C}[X], B = \mathbb{C}[X, Y]$.
 - $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}[i, \frac{1}{2+i}]$.
 - $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}[i, \frac{1}{14+7i}]$.
 - $A = \mathbb{C}[X], B = \mathbb{C}[X, Y, \frac{1}{XY-1}]/(Y^2 - Y)$.