

# Lista 5

## Álgebra Comutativa - SMA5771

June 12, 2025

### Exercícios

1. Seja  $M$  um  $A$ -módulo. Mostre que  $M$  é simples se e somente se  $M \cong A/\mathfrak{m}$  para algum  $\mathfrak{m} \in \text{Specm } A$ .
2. Mostre que, se  $A$  é artiniano com  $\text{Specm } A = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$ , então existe  $n$  inteiro positivo tal que
$$A \cong A/\mathfrak{m}_1^n \times \dots \times A/\mathfrak{m}_r^n,$$
e cada  $A/\mathfrak{m}_i^n$  é um anel artiniano local.
3. Considere o  $\mathbb{Z}$ -módulo quociente  $M = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ . Prove que qualquer submódulo  $N \subset M$  é finito (como conjunto) ou igual a  $M$ . Conclua que  $M$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo artiniano e prove que não é f.g. (logo não é noetheriano).
4. Seja  $p$  um número inteiro primo. Para cada inteiro  $n \geq 0$ , considere  $M_n = \{q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid p^n q = 0\}$  e  $M := \cup_{n \geq 0} M_n$ . Mostre que
  - (a)  $\mathbb{Z}/(p^n) \xrightarrow{\cong} M_n$  isomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos;
  - (b) se  $N$  é  $\mathbb{Z}$ -submódulo de  $M$ , então  $N = M_n$  para algum  $n$ ;
  - (c) Deduza que  $M$  é  $\mathbb{Z}$ -módulo Artiniano mas não é  $\mathbb{Z}$ -módulo Noetheriano.
- (d) Encontre  $\text{Ann } M$ , e deduza que  $\mathbb{Z}/\text{Ann } M$  não é  $\mathbb{Z}$ -módulo Artiniano.
5. Seja  $A$  um anel artiniano. Mostre que:
  - (a) Se  $A$  é domínio Artiniano, então  $A$  é corpo.
  - (b)  $\text{Specm } A = \text{Spec } A$ .
6. Seja  $p$  um número inteiro primo. Considere  $M := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p^n)$  e  $Q := 0$  em  $M$ . Mostre que  $Q$  é  $(p)$ -primário.
7. Seja  $\mathfrak{m} := (2, X)$  e  $\mathfrak{q} := (4, X)$  ideais de  $\mathbb{Z}[X]$ . Mostre que  $\mathfrak{q}$  é  $\mathfrak{m}$ -primário e  $\mathfrak{q}$  não é uma potência de  $\mathfrak{m}$ .
8. Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Considere  $\mathfrak{p}_1 := (X, Y)$ ,  $\mathfrak{p}_2 := (X, Z)$ ,  $\mathfrak{m} := (X, Y, Z)$  e  $I := \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$  ideais de  $\mathbb{K}[X, Y, Z]$ . Mostre que  $I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$  é uma decomposição primária de  $I$ . Quais primos associados são minimais?
9. Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Considere  $I := (XY, X - YZ)$  e  $\mathfrak{q}_1 := (X, Z)$ ,  $\mathfrak{q}_2 := (Y^2, X - YZ)$ . Mostre que  $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$  é uma decomposição primária de  $I$ .
10. Quais dos seguintes anéis é Artiniano, justifique.
  - (a)  $\mathbb{Z}[1/6]$

(b)  $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 2X^2 + X)$

(c)  $\mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)}$  (Localização em  $(X, Y)$ )

(d)  $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3, 4Y^2 - 5X^2Y + X^4)$