

Lista 4

Álgebra Comutativa - SMA5771

May 27, 2025

Um anel B é dito **Booleano** se $b^2 = b$, para todo $b \in B$.

Exercícios

1. Descreva $\text{Spec } A$, quando
 - (a) $A = \text{Spec } \mathbb{Z}[X]$
 - (b) $A = \text{Spec } \mathbb{R}[X]$
 - (c) $A = \text{Spec } \mathbb{C}[X]$
 - (d) $A = \text{Spec } \mathbb{C}[X]/(X^2 - 5)$
 - (e) $A = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]$
 - (f) $A = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - 3X)$.
2. Seja A um anel e $X := \text{Spec}(A)$. Sejam $X_1, X_2 \subset X$ subconjuntos fechados. Mostre que $X_1 \cup X_2 = X$ com $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ se e somente se existem idempotentes $e_1, e_2 \in A$ tais que $1 = e_1 + e_2$, $e_1 e_2 = 0$ e $V((e_i)) = X_i$.
3. Seja A um anel, $X := \text{Spec}(A)$ e U um subconjunto aberto. Mostre que U é compacto se e somente se $X - U = V(I)$, onde I é um ideal finitamente gerado.
4. Seja B um anel Booleano, e seja $X := \text{Spec}(B)$. Mostre que um subconjunto $U \subset X$ é fechado e aberto se e somente se $U = D(f)$ para algum $f \in B$. Mostre que X é um espaço compacto e Hausdorff.
5. Seja M um A -módulo finitamente gerado. Mostre que se A é noetheriano, então M é noetheriano.
6. Prove que se A é noetheriano, então $A[[X]]$ é noetheriano.
7. Seja \mathbb{K} um corpo e $\mathbb{K}(X, Y)$ o corpo das funções racionais. Mostre que o subanel $A := \mathbb{K}[X, Y, X/Y, X/Y^2, X/Y^3, \dots]$ de $\mathbb{K}(X, Y)$ não é anel Noetheriano.
8. Seja A um anel noetheriano e $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in A[[X]]$. Mostre que f é nilpotente se e somente se a_n é nilpotente para todo $n \geq 0$.
9. Determine quais dos anéis abaixo são Noetherianos:
 - (a) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
 - (b) $A = \mathbb{Z}[1/3]$.
 - (c) $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3, 4Y^2 - 5X^2Y + X^4)$.
 - (d) $A = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid 3 \nmid b\}$.
 - (e) $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$.
 - (f) o anel A das funções racionais complexas na variável z sem polos no círculo $|z| = 1$.

(g) o anel A das séries de potências na variável complexas z com raio de convergência positivo.

10. Prove ou dê um contra-exemplo.

(a) Subanéis de anéis noetherianos são noetherianos.

(b) Se $A_{\mathfrak{p}}$ é noetheriano para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, então A é noetheriano.

(c) Todo anel noetheriano é DFU.