Lista 3

André Duarte
Álgebra Comutativa - SMA5771

May 1, 2025

Exercícios

1. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis e $S \subseteq A$ um conjunto multiplicativo. Mostre que se f satisfaz as propriedades abaixo, então $B \cong S^{-1}A$.
   (a) $f(S) \subset B^{\times}$.
   (b) $ker\, f = \{a \in A \,|\, as = 0 \text{ para algum } s \in S\}$.
   (c) Para cada $b \in B$, existem $a \in A$ e $s \in S$ tais que $b = f(a)/f(s)^{-1}$.

2. Seja $\phi : M \to N$ um homomorfismo de A-módulos. Mostre que
   (a) $ker\, S^{-1}\phi \cong S^{-1} ker\, \phi$
   (b) $coker\, S^{-1}\phi \cong S^{-1} coker\, \phi$
   (c) $im\, S^{-1}\phi \cong S^{-1} im\, \phi$

3. Seja $\phi : M \to N$ um homomorfismo de A-módulos. Mostre que são equivalentes:
   (a) ϕ é sobrejetor
   (b) $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ é sobrejetor para todo $\mathfrak{p} \in Spec\, A$.
   (c) $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ é sobrejetor para todo $\mathfrak{m} \in Specm\, A$.

   (Dica: Mostre que $M'_{\mathfrak{m}} = 0,\ \forall \mathfrak{m} \in Specm\, A \Rightarrow M' = 0$)

4. Seja M um A-módulo. Mostre que são equivalentes:
   (a) M é um A-módulo plano
   (b) $M_{\mathfrak{p}}$ é $A_{\mathfrak{p}}$-módulo plano para todo $\mathfrak{p} \in Spec\, A$.
   (c) $M_{\mathfrak{m}}$ é $A_{\mathfrak{m}}$-módulo plano para todo $\mathfrak{m} \in Specm\, A$.

   (Dica: Usar o fato de que o exercício anterior vale trocando "sobrejetor" por "injetor").

5. Seja A um anel, $S \subseteq A$ um subconjunto multiplicativo e I um ideal de A. Considerando o mapa quociente $\pi : A \to A/I$ e definindo $\overline{S} := \pi(S)$, mostre que
   $$S^{-1}A/S^{-1}I \cong \overline{S}^{-1}(A/I).$$
   Em particular, conclua que se $\mathfrak{p} \in Spec\, A$ e $S = A \setminus \mathfrak{p}$ então, $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} := A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong Frac(A/\mathfrak{p})$, é chamado o **corpo residual** de $\mathfrak{p}$.

6. Seja S um conjunto multiplicativo de A, e seja M um A-módulo finitamente gerado. Prove que $S^{-1}M = 0$ se e somente se existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

7. Seja I um ideal de um anel A, e seja $S = 1 + I$. Mostre que $S^{-1}I$ está contido no radical de Jacobson de $S^{-1}A$.

8. Seja A um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Seja M um A-módulo finitamente gerado e $s_1, \ldots, s_n \in M$; escreva $\overline{s_1}, \ldots \overline{s_n} \in \overline{M} = M/\mathfrak{m}M$ as imagens de $s_1, \ldots, s_n$ pelo mapa quociente.

   (a) Mostre que $\overline{s_1}, \ldots \overline{s_n}$ é forma uma base de $\overline{M}$ se e somente se $s_1, \ldots, s_n$ forma um conjunto gerador minimal de M.

   (b) Seja $B = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^2(X + 1))$ e $\mathfrak{m} = (\overline{X}, \overline{Y})$. Encontre geradores minimais para o ideal maximal do anel local $A = B_{\mathfrak{m}}$.