Lista 2

Geometria Algébrica I

15 de abril de 2026

- Denote por $S := k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ e por S^h o conjunto de todos os polinômios homogêneos em S.
- Para X um conjunto algébrico projetivo, denote por $I_H(X)$ o ideal homogêneo de X.
- I é polinômio homogêneo, $Z_a(I)$ é o zero de I em $\mathbb{A}^n$ e $Z_p(I)$ é o zero de I em $\mathbb{P}^n$.

1. Seja $I \subset S$ um ideal.
   (a) I é homogêneo se e somente se é gerado por um conjunto (finito) de polinômios homogêneos.
   (b) Se I é homogêneo, então $\sqrt{I}$ é homogêneo.
   (c) A interseção, produto ou soma de ideais homogêneos é homogêneo.

2. Para um ideal homogêneo $I \subset S$, mostre que as seguintes condições são equivalentes:
   (i) $Z(I) = \emptyset$;
   (ii) $\sqrt{I}$ é igual a S ou ao ideal $S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$;
   (iii) $I \supset S_d$ para algum $d > 0$.

3. (a) Se $T_1 \subset T_2$ são subconjuntos de S^h, então $Z(T_1) \supset Z(T_2)$.
   (b) Se $Y_1 \subset Y_2$ são subconjuntos de $\mathbb{P}^n$, então $I(Y_1) \supset I(Y_2)$.
   (c) Para quaisquer dois subconjuntos Y_1, Y_2 de $\mathbb{P}^n$, vale $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.
   (d) Se $a \subset S$ é um ideal homogêneo com $Z(a) \neq \varnothing$, então $I(Z(a)) = \sqrt{a}$.
   (e) Para qualquer subconjunto $Y \subset \mathbb{P}^n$, vale $Z(I(Y)) = \overline{Y}$.

4. Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto algébrico projetivo. Então
   (a) $I(C(X)) = I_H(X)$,
   (b) Se $X = Z_p(I)$ para um ideal homogêneo I, então $C(X) = Z_a(I)$ (Definição

de cone afim, veja as notas de aula).

5. Prove:
   (a) (**Nullstellensatz projetivo fraco**) $Z_p(I) = \emptyset$ se e somente se I contém todas as formas de grau N, para algum N.
   (b) (**Nullstellensatz projetivo forte**) Se $Z_p(I) \neq \emptyset$, então
   $$I_H\big(Z_p(I)\big) = \sqrt{I}.$$

6. (a) $\mathbb{P}^n$ é um espaço topológico noetheriano.
   (b) Todo conjunto algébrico em $\mathbb{P}^n$ pode ser escrito de maneira única como uma união finita de conjuntos algébricos irredutíveis, nenhum contendo outro. Estes são chamados de suas *componentes irredutíveis*.

7. Se Y é uma variedade projetiva com anel de coordenadas homogêneas $S(Y)$, mostre que
$$\dim S(Y) = \dim Y + 1.$$

8. (a) $\dim \mathbb{P}^n = n$.
   (b) Se $Y \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade quase-projetiva, então $\dim Y = \dim \overline{Y}$.

9. Uma variedade projetiva $Y \subset \mathbb{P}^n$ tem dimensão $n-1$ se e somente se é o conjunto de zeros de um único polinômio homogêneo irredutível f de grau positivo. Y é chamada de *hipersuperfície* em $\mathbb{P}^n$.

10. **Variedades lineares em $\mathbb{P}^n$.** Uma hipersuperfície definida por um polinômio linear é chamada de *hiperplano*.
    (a) Mostre que as duas condições seguintes são equivalentes para uma variedade Y em $\mathbb{P}^n$:
       (i) $I(Y)$ pode ser gerado por polinômios lineares.
       (ii) Y pode ser escrito como uma interseção de hiperplanos.

       Nesse caso dizemos que Y é uma *variedade linear em* $\mathbb{P}^n$.
    (b) Se Y é uma variedade linear de dimensão r em $\mathbb{P}^n$, mostre que $I(Y)$ é minimamente gerado por $n-r$ polinômios lineares.
    (c) Sejam Y, Z variedades lineares em $\mathbb{P}^n$, com $\dim Y = r$, $\dim Z = s$. Se $r + s - n \geq 0$, então $Y \cap Z \neq \emptyset$. Além disso, se $Y \cap Z \neq \emptyset$, então $Y \cap Z$ é uma variedade linear de dimensão $r+s-n$. (Pense em $\mathbb{A}^{n+1}$ como um espaço

vetorial sobre k, e trabalhe com seus subespaços.)

11. * **A imersão d-upla.** Para dados $n, d > 0$, sejam $M_0, M_1, \ldots, M_N$ todos os monômios de grau d nas $n+1$ variáveis $x_0, \ldots, x_n$, onde

$$N = \binom{n+d}{n} - 1.$$

Definimos uma aplicação $\rho_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ enviando o ponto $P = (a_0, \ldots, a_n)$ ao ponto

$$\rho_d(P) = (M_0(a), \ldots, M_N(a))$$

obtido substituindo os a_i nos monômios M_j. Isto é chamado de *imersão d-upla de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{P}^N$*. Por exemplo, se $n = 1$, $d = 2$, então $N = 2$, e a imagem Y da imersão 2-upla de $\mathbb{P}^1$ em $\mathbb{P}^2$ é uma cônica.

   (a) Seja $\theta : k[y_0, \ldots, y_N] \to k[x_0, \ldots, x_n]$ o homomorfismo definido enviando y_i em M_i, e seja $\mathfrak{a}$ o núcleo de θ. Então $\mathfrak{a}$ é um ideal primo homogêneo, e portanto $Z(\mathfrak{a})$ é uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^N$.

   (b) Mostre que a imagem de ρ_d é exatamente $Z(\mathfrak{a})$. (Uma inclusão é fácil. A outra exigirá alguns cálculos.)

12. * **A imersão de Segre.** Seja $\psi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^N$ a aplicação definida enviando o par ordenado

$$(a_0, \ldots, a_r) \times (b_0, \ldots, b_s)$$

em $(\ldots, a_i b_j, \ldots)$ em ordem lexicográfica, onde $N = rs + r + s$. Note que ψ está bem definida e é injetiva. Ela é chamada de *imersão de Segre*. Mostre que a imagem de ψ é uma subvariedade de $\mathbb{P}^N$. *Dica:* Sejam as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^N$ $\{z_{ij} \mid 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s\}$, e seja $\mathfrak{a}$ o núcleo do homomorfismo

$$k[\{z_{ij}\}] \to k[x_0, \ldots, x_r, y_0, \ldots, y_s]$$

que envia z_{ij} em $x_i y_j$. Então mostre que $\operatorname{Im} \psi = Z(\mathfrak{a})$.

13. A cúbica torcida em $\mathbb{A}^3$ é $C := Z(y - x^2, z - x^3)$. Mostre que C é isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

14. Mostre que $Z(xy) \subset \mathbb{A}^2$ não é isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

15. Se dois conjuntos algébricos afins são isomorfos, mostre que eles têm a mesma dimensão.

16. Seja $C := Z(y^2 - (x^3 + x^2))$. Mostre que C não é isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

17. Quais das seguintes variedades afins são isomorfas?

   (a) $\mathbb{A}^1$,

(b) $Z(x^2+y^2) \subset \mathbb{A}^2$,

(c) $Z(x^2-y^3) \subset \mathbb{A}^2$,

(d) $Z(xy) \subset \mathbb{A}^2$,

(e) $Z(y-x^2, z-x^3) \subset \mathbb{A}^3$

(a) Mostre que qualquer cônica em $\mathbb{A}^2$ é isomorfa ou a $\mathbb{A}^1$ ou a $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

(b) Qualquer cônica em $\mathbb{P}^2$ é isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

18. Seja $\varphi : X \to Y$ um morfismo entre variedades afins. Seja $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ a aplicação correspondente. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

    (a) φ^* é injetiva se, e somente se, φ é sobrejetiva.

    (b) φ^* é sobrejetiva se, e somente se, φ é injetiva.

    (c) φ^* é um isomorfismo se, e somente se, φ é um isomorfismo.

    Prove ou dê contraexemplos. Se uma afirmação for falsa, você pode modificá-la um pouco para que se torne verdadeira?

19. Um morfismo cuja aplicação subjacente nos espaços topológicos é um homeomorfismo não precisa ser um isomorfismo.

    (a) Por exemplo, seja $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ definida por $t \mapsto (t^2, t^3)$. Mostre que φ define um morfismo bijetivo e bicontínuo de $\mathbb{A}^1$ sobre a curva $y^2 = x^3$, mas que φ não é um isomorfismo.

    (b) Para outro exemplo, seja a característica do corpo base k igual a $p > 0$, e defina uma aplicação $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ por $t \mapsto t^p$. Mostre que φ é bijetiva e bicontínua, mas não é um isomorfismo. Isso é chamado o morfismo de Frobenius.

20. Seja $\varphi : X \to Y$ um morfismo.

    (a) Mostre que, para cada $p \in X$, φ induz um homomorfismo de anéis locais

    $$\varphi_p^* : \mathcal{O}_{\varphi(p),Y} \to \mathcal{O}_{p,X}.$$

    (b) Mostre que φ é um isomorfismo se, e somente se, φ é um homeomorfismo, e a aplicação induzida φ_p^* é um isomorfismo, para todo $p \in X$.

    (c) Mostre que, se $\varphi(X)$ é denso em Y, então a aplicação φ_p^* é injetiva para todo $p \in X$.