

Lista 2

André Duarte

Álgebra Comutativa - SMA5771

April 24, 2025

A abreviação f.g. significa finitamente gerado.

\mathbb{F}_q é um corpo com q elementos.

$\bar{f} = \sum \bar{a}_i X^i \in \mathbb{Z}_n[X]$ se $f = \sum a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercícios

- Sejam M' e M'' A -módulos e $M := M' \oplus M''$.
 - Se $N \subset M'$ um A -submódulo, mostre que $M/N = M'/N \oplus M''$.
 - Se N é um A -submódulo de M com $M' \subset N$ e $N'' := N \cap M''$, mostre que $N = M' \oplus N''$.
- Seja $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata de A -módulos. Mostre que se M' e M'' são f.g. então M é f.g.
- Se I e J são ideais de A , mostre que $A/I \otimes_A A/J \cong A/(I + J)$, como A -módulos. Verifique que alguns fatos familiares podem ser recuperados a partir de certos casos particulares, como $I = 0$ ou $J = 0$, ou mesmo $A = \mathbb{Z}$.
- Para A -módulos L , M e N , mostre que $\text{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \cong \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, L))$.
- Mostre ou dê um contra-exemplo.
 - Seja d um inteiro livre de quadrados e $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Se $p \in \mathbb{Z}$ um primo, então $A/(p) \cong \mathbb{Z}[X]/(p, X^2 - d) \cong \mathbb{F}_p[X]/(X^2 - \bar{d})$.
- $A = \mathbb{Z}_n$ é \mathbb{Z} -módulo livre.
 - $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(f(X))} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_n[X]/(\bar{f}(X))$.
 - $A = \mathbb{K}[X, Y]$ (\mathbb{K} corpo), $M = (X, Y)$ é A -módulo plano.
- Seja $\phi : A \rightarrow B$ uma A -álgebra, M um A -módulo e N um B -módulo (e portanto um A -módulo também via ϕ). Mostre que há um isomorfismo de B -módulos
$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A N.$$
- Seja A um anel local e sejam M e N dois A -módulos finitamente gerados. Mostre que
$$M \otimes_A N = 0 \Leftrightarrow N = 0 \text{ ou } M = 0.$$
Dê um contra-exemplo mostrando que isto falso para anéis em geral.
- Seja $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de A -módulos. Prove que, $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ é plano $\Leftrightarrow M_\lambda$ é plano para todo $\lambda \in \Lambda$.

9. Seja $A[X]$ o anel de polinômios em X sobre A . Prove que $A[x]$ é uma A -álgebra plana (use o exercício 8).
10. Seja M um A -módulo. Denote $M[X]$ o conjunto de todos os polinômios em X com coeficientes em M , ou seja, expressões da forma $m_0 + m_1X + \cdots + m_rX^r$ ($m_i \in M$). Definindo o produto de um elemento de $A[X]$ e um elemento de $M[X]$ de modo óbvio, mostre que $M[X]$ é um $A[X]$ -módulo. Mostre que $M[X] \cong A[X] \otimes_A M$.
11. Seja P um ideal primo em A . Mostre que $P[X]$ é um ideal primo em $A[X]$. Se M é um ideal maximal em A , então $M[X]$ é um ideal maximal em $A[X]$?
12. Seja I um ideal de A contido no radical Jacobson de A ; seja M um A -módulo e N um A -módulo finitamente gerado, e seja $\mu : M \rightarrow N$ um A -homomorfismo. Se o homomorfismo induzido $M/IM \rightarrow N/IN$ é sobrejetivo então μ é sobrejetivo.
13. Seja M um A -módulo f.g. e $\phi : M \rightarrow A^n$ um A -homomorfismo sobrejetivo. Mostre que $\ker \phi$ é f.g.