

Lista 1

André Duarte
Geometria Algébrica I

March 20, 2026

1. Seja k um corpo arbitrário, seja $f \in k[x, y]$ um polinômio irredutível, e seja $g \in k[x, y]$ um polinômio arbitrário. Se g não é divisível por f , então o sistema de equações $f(x, y) = g(x, y) = 0$ tem apenas um número finito de soluções.
2. Sejam $F_1, \dots, F_m \in k[x_1, \dots, x_n]$. Seja $\varphi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ definida por $\varphi(p) = (F_1(p), \dots, F_m(p))$. Mostre que o gráfico $\Gamma_\varphi = \{(p, q) \in \mathbb{A}^{n+m} \mid q = \varphi(p)\}$ é um conjunto algébrico afim.
3. (a) Prove que o conjunto de matrizes simétricas e antissimétricas $n \times n$ sobre k são conjuntos algébricos em \mathbb{A}^{n^2} .
(b) Prove que $\text{GL}_n(k)$ é um (Zariski) aberto em \mathbb{A}^{n^2} e que pode ser visto como um conjunto algébrico afim em \mathbb{A}^{n^2+1} .
4. Dê um exemplo de uma coleção enumerável de conjuntos algébricos afins em \mathbb{A}^n cuja união não é um conjunto algébrico afim.
5. (a) Seja Y a curva plana afim $y = x^2$ (isto é, Y é o conjunto de zeros do polinômio $f = y - x^2$). Mostre que $A(Y)$ é isomorfo a um anel de polinômios em uma variável sobre k .
(b) Seja Z a curva plana $xy = 1$. Mostre que $A(Z)$ não é isomorfo a um anel de polinômios em uma variável sobre k .
(c)* Seja f um polinômio quadrático irredutível em $k[x, y]$, e seja W a cônica definida por f . Mostre que $A(W)$ é isomorfo a $A(Y)$ ou $A(Z)$. Qual deles é, e quando?
6. O conjunto $X \subset \mathbb{A}^2$ é definido pelas equações
$$f : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad g : x = 1.$$
Determine o ideal $I(X)$. É verdade que $I(X) = \langle f, g \rangle$?
7. Seja $I = \langle x^2 + y^2 - 1, x - 1 \rangle$. Determine $X := Z(I)$ e determine $I(X)$. Mostre que $I(Z(I)) \neq I$.
8. Prove que a recíproca do Teorema da Base de Hilbert: Se $R[x]$ is Noetheriano, então R é Noetheriano.
9. (a) Prove que uma variedade afim é conexa na topologia de Zariski.
(b) Prove que o conjunto algébrico afim X é conexo na topologia de Zariski se e somente se $A(X)$ não é soma direta de dois ideais não nulos. Deduzir daí que uma variedade é conexa na topologia de Zariski.

10. Seja $Y \subset \mathbb{A}^3$ a curva dada parametricamente por

$$x = t^3, \quad y = t^4, \quad z = t^5.$$

Mostre que $I(Y)$ é um ideal primo de altura 2 em $k[x, y, z]$ que não pode ser gerado por 2 elementos. Dizemos que Y não é uma *interseção completa local*.

11. Se I, J são ideais em $A = k[x_1, \dots, x_n]$, então

$$I : J = \{ f \in A \mid fg \in I \text{ para todo } g \in J \}$$

é chamado o *quociente de ideais* (ou *ideal quociente*) de I por J .

- (a) Prove que $I : J$ é um ideal contendo I .

- (b) Mostre que

$$Z(I : J) \supset \overline{Z(I) - Z(J)}$$

e que, se k é algebricamente fechado e I é um ideal radical, então vale a igualdade (use o Nullstellensatz de Hilbert).

- (c) Se X e Y são conjuntos algébricos afins em \mathbb{A}^n , então

$$I(X) : I(Y) = I(X - Y).$$

12. Mostre que uma k -álgebra B é isomorfa ao anel de coordenadas afim de algum conjunto algébrico em \mathbb{A}^n , para algum n , se e somente se B é uma k -álgebra finitamente gerada sem elementos nilpotentes.

13. Seja Y uma variedade afim de dimensão r em \mathbb{A}^n . Seja H uma hipersuperfície em \mathbb{A}^n , e suponha que $Y \not\subseteq H$. Então toda componente irredutível de $Y \cap H$ tem dimensão $r - 1$.

14. Seja $\mathfrak{a} \subset A = k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal que pode ser gerado por r elementos. Então toda componente irredutível de $Z(\mathfrak{a})$ tem dimensão $\geq n - r$.

15. (a) Se Y é qualquer subconjunto de um espaço topológico X , então $\dim Y \leq \dim X$.

- (b) Se X é um espaço topológico que é coberto por uma família de abertos $\{U_i\}$, então

$$\dim X = \sup \dim U_i.$$

- (c) Dê um exemplo de um espaço topológico X e de um aberto denso U tal que $\dim U < \dim X$.

- (d) Se Y é um subconjunto fechado de um espaço topológico irredutível X de dimensão finita, e se $\dim Y = \dim X$, então $Y = X$.

- (e) Dê um exemplo de um espaço topológico noetheriano de dimensão infinita.

16. Seja \mathbb{H} a álgebra dos quatérnios de Hamilton e $\mathbb{H}[x_1, \dots, x_n]$ o anel dos polinômios nas variáveis centrais x_1, \dots, x_n sobre \mathbb{H} . Se $p = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{H}^n$ tal que $a_i a_j \neq a_j a_i$ para algum $1 \leq i, j \leq n$, mostre que

$$\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle = \mathbb{H}[x_1, \dots, x_n].$$