

Lista 1

André Duarte

Álgebra Comutativa - SMA5771

March 10, 2025

Lembrem-se que aqui todo anel é assumido comutativo com 1, todo subanel de A tem o mesmo 1 e que os homomorfismos de anéis $\phi : A \rightarrow B$ satisfazem $\phi(1_A) = 1_B$.

1. Seja A um anel não nulo e I um ideal próprio de A .
 - (a) Prove que I está contido num ideal maximal.
 - (b) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
 - i. A é um corpo.
 - ii. os únicos ideais de A são 0 e A .
 - iii. todo homomorfismo de A num anel não-nulo B é injetivo.
 - (c) Mostre que I é primo se e somente se A/P é um domínio de integridade.
2. Seja $\phi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis.
 - (a) Mostre que se J é ideal de B , então $\phi^{-1}(J)$ é ideal de A . Use este fato para deduzir que quando A é subanel de B e J é ideal de B , temos que $J \cap A$ é ideal de A .
 - (b) Mostre que se Q é ideal primo de B , então $\phi^{-1}(Q)$ é ideal primo de A .
 - (c) Suponha que ϕ é sobrejetor. Mostre que se I é ideal de A então $\phi(I)$ é ideal de B e que, se J é ideal maximal de B então $\phi^{-1}(J)$ é ideal maximal de A . Dê exemplos em que tais fatos não ocorrem quando ϕ não é sobrejetor.
3. Sejam I, J e K ideais de A . Mostre que
 - (a) $I + J$ é o menor ideal de A contendo ambos I e J .
 - (b) $I \cap J$ é ideal de A .
 - (c) $IJ \subseteq I \cap J$.
 - (d) Se $I + J = A$, então $IJ = I \cap J$. Prove que volta não necessariamente é verdadeira (dê um contra-exemplo), mas se verifica se A for um domínio euclidiano.
 - (e) $I(J + K) = IJ + IK$.
 - (f) Se $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$, então $I \cap (J + K) = (J \cap I) + (I \cap K)$ (**Lei Modular**).
4. Sejam I, I_i, J, J_i e K ideais de A . Definimos o ideal quociente de I por J com sendo $(I : J) = \{a \in A \mid a \cdot J \subseteq I\}$. Mostre que:
 - (a) $(I : J)$ é um ideal de A que contém I .

- (b) $((I : J) : K) = (I : J \cdot K) = ((I : K) : J)$.
- (c) $(\cap_i I_i : J) = \cap_i (I_i : J)$.
- (d) $(I : \sum_i J_i) = \cap_i (I, J_i)$.
5. Prove o **Teorema da Correspondência de Ideais**: os ideais de A/I estão em bijeção com os ideais de A que contém I . Mostre que esta bijeção preserva ideais primos e maximais.
6. Mostre que o conjunto dos elementos nilpotentes de um anel forma um ideal.
7. Se I é ideal de um anel A , definimos o **radical de I** por
 $rad I = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ para algum } n > 0\}$.
 Mostre que
- (a) $rad I$ é um ideal de A contendo I .
- (b) $rad(rad I) = rad I$ e $rad(IJ) = rad(I \cap J) = rad I \cap rad J$.
- (c) $rad(I + J) = rad(rad I + rad J)$
- (d) se I é primo então $rad(I^n) = rad I, n > 0$.
8. Um ideal I de um anel A é dito **radical** se $rad I = I$.
- (a) Prove que todo ideal primo é radical.
- (b) Seja $n > 1$ um inteiro. Prove que (0) é ideal radical de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se, e somente se, n é livre de quadrados. Deduza que (n) é ideal radical de \mathbb{Z} se, e somente se, n é livre de quadrados.
- (c) Mostre que I é radical se, e somente se, A/I é anel reduzido.
9. Seja A um domínio e $a \in A \setminus \{0\}$. Mostre que $(a) + (X)$ é ideal principal de $A[X]$ se, e somente se, $a \in A^\times$. Conclua que $A[X]$ é PID se, e somente se, A é corpo.

10. Seja \mathbb{K} um corpo. Definimos o **anel das séries de potências**

$$\mathbb{K}[[X]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mid a_n \in \mathbb{K} \right\}$$

com adição e multiplicação dados por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n.$$

onde $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$.

- (a) Mostre que um elemento $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ é unidade em $\mathbb{K}[[X]]$ se, e somente se, $a_0 \neq 0$.
- (b) Mostre que os únicos ideais de $\mathbb{K}[[X]]$ são os ideais do tipo (X^n) e que, portanto, $\mathbb{K}[[X]]$ é um PID.
- (c) Mostre que

$$\mathbb{K}((X)) = \left\{ \sum_{n \geq k} a_n X^n \mid a_n \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

é o corpo de frações de $\mathbb{K}[[X]]$.

11. Prove a **propriedade universal do corpo de frações**: Seja A um domínio, $Frac(A)$ seu corpo de frações e $\iota : A \rightarrow Frac(A)$ a imersão natural. Se \mathbb{K} é um corpo e $\phi : A \rightarrow \mathbb{K}$ um homomorfismo de anéis injetor, então existe um único homomorfismo de anéis $\tilde{\phi} : Frac(A) \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\phi = \tilde{\phi} \circ \iota$.
12. Seja A um anel, mostre que
- (a) $A[X_1, \dots, X_n]/(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \cong A$.
- (b) Se $A = \mathbb{K}$ é corpo algebricamente fechado, então todo ideal maximal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ é da forma $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.

13. Mostre que se A é um domínio, então $A[X]^\times = A^\times$. Dê exemplo de um anel A pro qual tal igualdade não ocorre.
14. Seja A um anel e I um ideal de A . Mostre que I é o único ideal maximal de A se, e somente se, $I = A \setminus A^\times$.
- Um anel satisfazendo tal condição é chamado **anel local**.
15. Prove que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um anel local se e somente se existe um primo p tal que $n = p^k$, $k \in \mathbb{N}$.