Lista de Exercícios de SMA0353-Cálculo I – Módulo 5

Exercícios iniciais: 1, 2, 7, 13, 15, 17 e 20.

Regras de L'Hôpital

Exercício 1 *(a) Quais as indeterminações que você pode tentar manipular e depois usar a regra de L'Hôpital para resolver o limite?*

(b) Em quais indeterminações se pode aplicar a regra de L'Hôpital diretamente sem nenhuma manipulação anterior na função.

(c) A regra de L'Hôpital pode ser usada para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$*?*

(d) De um exemplo de resolução utilizando L'Hôpital para cada uma das indeterminações do item (a)

Exercício 2 *Calcule os limites usando a regra de de L'Hôpital sempre que possível:*

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\cos(x))}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\ln(x)}$ (c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

(d) $\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ (e) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\ln(x+3\sqrt{x^2-1})}$ (f) $\lim_{x\to +\infty} x^3\left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi 3^x)}{x}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(2x)}$ (i) $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

(j) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)}$

Exercício 3 *Demonstre que*

(a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (b) $g(x) = \frac{\arctan(x^4-x^2)}{x}$

(c) $h(x) = x^2\log|x|$ (d) $u(x) = |x|^x$

podem ser prolongadas por continuidade em $x=0$*. As novas funções assim obtidas são diferenciáveis em* $x=0$*?*

Exercício 4 *Use a Regra de L'Hôpital para calcular limite da forma indeterminada* $\frac{0}{0}$

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ (d) $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t}$

(e) $\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$ (f) $\lim_{\theta\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen}(\theta)}-1}{\theta}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x-1}$

Exercício 5 *Use a Regra de L'Hôpital para calcular limite da forma indeterminada* $\frac{\infty}{\infty}$

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x}{7x^3+3}$ (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2(x)}$

Exercício 6 *Use a Regra de L'Hôpital para calcular o limite de outras formas de indeterminação.*

(a) $\lim_{x\to 0^+} x(\ln(x))^2$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(c) $\lim_{x\to\infty} (\ln(x))^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\ln(x)}}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$

(g) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x-1}\right)$

(h) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$

Primitivas e método da substituição

Exercício 7 *Determine as primitivas das funções abaixo:*

(a) $\int (3x+1)dx$ (b) $\int (x+\frac{1}{x})dx$ (c) $\int \frac{x^2-5x+1}{3x^2}dx$ (d) $\int e^{2x}dx$

(e) $\int \cos 3x dx$, (f) $\int \operatorname{sen}(2x)dx$, (g) $\int 7e^{-3x}dx$ (h) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$

(i) $\int (4\sqrt[5]{x^2}-\sqrt{x})dx$ (j) $\int x\sqrt{x}dx$ (l) $\int (3x-1)^{2003}dx$ (m) $\int \operatorname{sen}^7 x \cos x dx$

(n) $\int \operatorname{tg}^3 x \cos x dx$ (o) $\int e^x\sqrt[3]{2+e^x}dx$ (p) $\int \frac{6}{4x+3}dx$ (q) $\int \frac{1}{(1-x)^4}dx$

(r) $\int \operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2 x}dx$ (s) $\int \operatorname{sen} x \sec x dx$ (t) $\int \frac{\sec^2 x}{3+2\operatorname{tg} x}dx$ (u) $\int x\operatorname{sen}(3x^2)dx$

(v) $\int x\sqrt{32+4x^2}dx$ (x) $\int \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x dx$ (z) $\int 3^{2x}dx$ (a1) $\int \sec x dx$

Exercício 8 *Utilize as fórmulas trigonométricas abaixo para calcular as primitivas das funções dadas a seguir:*

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$
$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen}(a+b))$$
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))$$

(a) $\int \operatorname{sen}(5x)\cos(x)dx$ (b) $\int \operatorname{sen}(4x)\cos(2x)dx$

(c) $\int \cos(5x)\cos(6x)dx$ (d) $\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx$, $m,n\in\mathbb{N}$

(e) $\int \cos(mx)\operatorname{sen}(nx)dx$, $m,n\in\mathbb{N}$.

Exercício 9 *Utilize o algoritmo da divisão entre polinômios para reescrever* f *e facilitar o cálculo das seguintes primitivas:*

(a) $\int \frac{x}{x+1}dx$ (b) $\int \frac{x+2}{x-3}dx$ (c) $\int \frac{2x-5}{3x+1}dx$ (d) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$ (e) $\int (\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x^3}{x-1})dx$.

Exercício 10 *Sabendo que* $\int \frac{1}{1^2+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)$, *determine as seguintes primitivas:*

(a) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx, a>0$ (b) $\int \frac{3x+2}{x^2+1}dx$ (c) $\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$ (d) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

(e) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

Exercício 11 *Determine as seguintes primitivas:*

(a) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ (b) $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ (c) $\int \frac{x}{x^4+16}dx$ (d) $\int e^x(e^{2x}+1)^{-1}dx$

(e) $\int x^{-1}\cos(\ln x)dx$

Exercício 12 *Sabendo que* $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen}(x)$, *determine as seguintes primitivas:*

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\ a>0$ (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}.$

Exercício 13 *Resolva* $\int \tan(x)dx$ *fazendo:*
(a) $u = \operatorname{sen}(x)$
(b) $u = \cos(x)$
(c) Qual é mais fácil? Ambas resolvem?

Exercício 14 *Resolva:*

(a) $\int \frac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}^{1/3}(3x)}dx$ (b) $\int \sqrt{3+x}\,(x+1)^2dx$ (c) $\int \cos^3(x)dx$

(d) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ (e) $\int \frac{t^5+2t}{\sqrt{t^6+6t^2}}dt$

Polinômios de Taylor

Exercício 15 *Em cada um dos itens abaixo, encontre o polinômio de Taylor de grau* n *da função* f *em torno de* x_0.

(a) $f(x) = \sqrt[k]{x}, k\in\mathbb{N},\ n=2$ *e* $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \ln(1+x),\ n=3$ *e* $x_0=0$

(c) $f(x) = \cos x,\ n\in\mathbb{N}$ *e* $x_0=0$

(d) $f(x) = x^x,\ n=1$ *e* $x_0=1$

(e) $f(x) = e^{x^2},\ n=2$ *e* $x_0=0$

(f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ n=2$ *e* $x_0=0$

Exercício 16 *Seja* $y = f(x)$ *uma função de classe* C^2 *tal que o ponto* $(x, f(x))$ *é solução da equação* $x^2+\frac{y^2}{3} = 1,\ \forall x\in \operatorname{Dom}(f)$. *Sabendo-se que* $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, *determine o polinômio de Taylor de* f *de grau dois em torno de* $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Exercício 17 *Encontre o polinômio de Taylor de ordem cinco em torno da origem da função* $f(x) = \text{sen}(x)$. *Use este polinômio para aproximar* $\text{sen}(x)$ *para* $x \in [-\pi/32, \pi/32]$ *e mostre que o erro cometido nesta aproximação é menor que* 10^{-10}.
Dica: *Use que* $|\text{sen}(c)| \leq c$ *e que* $\pi/32 < 10^{-1}$.

Exercício 18 *Encontre o polinômio de Taylor de ordem cinco em torno da origem da função* $f(x) = \cos(x)$. *Use este polinômio para aproximar* $\cos(x)$ *para* $x \in [-\pi/32, \pi/32]$ *e mostre que o erro cometido nesta aproximação é menor que* $\frac{1}{720}10^{-6}$.
Dica: *Use que* $\pi/32 < 10^{-1}$.

Exercício 19 *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Justifique a validade e estime o erro cometido na aproximação*

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Exercício 20 *Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 3, calcule um valor aproximado de*

(a) $\ln(1.3)$ (b) $\sqrt[3]{8.2}$ (c) $\text{sen}(0.1)$ (d) $\cos(0.1)$

Gabarito da Lista de Exercícios de SMA0353-Cálculo I - Módulo 5

Última atualização em 24/06/2022

Exercício 1 (a) *A regra de L'Hôpital pode ser aplicada em indeterminações do tipo* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$. *Podemos manipular as seguintes indeterminações para aplicar a regra de L'Hôpital*

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

(b) *Podemos aplicar a regra de L'Hôpital diretamente sem nenhuma manipulação nas indeterminações*

$$\frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty}$$

(c) *Como* $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ *e* $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ *não podemos manipular a função para obter uma indeterminação do tipo* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$, *portanto, não podemos aplicar a regra de L'Hôpital*

(d) $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. *Note que*

$$\lim_{x\to 0} x - \operatorname{sen} x = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

Aplicando L'Hopital, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x-\operatorname{sen} x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \quad (= 0/0, \text{ aplicamos novamente L'Hopital}) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = 1/6 \quad \left(\text{usando } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\right) \end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$. *Temos*

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

Então, pela Regra de L'Hospital, vale

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$0 \cdot \infty$: *No caso* $0 \cdot \infty$ *também podemos aplicar regras de L'Hopital, após uma manipulação conveniente das funções no limite.*

Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ *é indeterminado na forma* $0 \cdot \infty$, *isto é,* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. *Neste caso, primeiramente fazemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = 0/0$$

e então, aplicando L'Hopital, calculamos

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{(1/g(x))'}$$

ou então

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \infty/\pm\infty$$

e então, por L'Hopital, calculamos

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{(1/f(x))'}$$

Exemplo: *Calcular* $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$. *Temos* $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = 0\cdot(-\infty)$. *Recorde-se que* $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$. *Neste caso, fazemos*

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (= -\infty/+\infty)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$\infty-\infty$: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen}(x)}\right)$. *Observe que temos uma indeterminação da forma* $\infty-\infty$. *Escrevendo*

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen}(x)}\right) = \frac{\text{sen}(x)-x}{x\,\text{sen}(x)},$$

obtemos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ *e podemos aplicar a Regra de L'Hospital para obtermos*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(x)-x}{x\,\text{sen}(x)} \overset{L'H'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{\text{sen}(x)+x\cos(x)}.$$

Agora, estamos novamente com uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. *Aplicando, de novo, a Regra de L'Hospital, temos*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{\text{sen}(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\text{sen}(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\,\text{sen}(x)} = 0$$

Suponhamos que o limite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ *tem uma das formas indeterminadas* $0^0, \infty^0$ *ou* 1^∞. *Aqui deveremos ter* $f(x) > 0$ *no domínio da função* f^g. *Em qualquer um desses casos, fazemos*

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

e então

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L$$

sendo

$$L = \lim_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]$$

Para as formas indeterminadas $0^0, \infty^0$ *e* 1^∞, *o limite* $L = \lim_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]$ *terá sempre a forma indeterminada* $0\cdot\infty($ *ou* $\infty\cdot 0)$, *e recaímos então em um caso anteriormente estudado.*

0^0: $\lim_{x\to 0+} x^x$. *Aqui temos uma indeterminação* 0^0. *Seguindo procedimento descrito acima, fazemos*

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

e então $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^L$, *sendo* $L = \lim_{x\to 0^+} x \ln x$. *Como calculado no exemplo anterior,* $L = 0$ *e portanto* $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$

∞^0: $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$. *Observe que é uma indeterminação da forma* ∞^0. *Escrevemos*

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Como a função exponencial é contínua, temos

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\right).$$

Observe que, agora, temos uma indeterminação da forma $\frac{\infty}{\infty}$. *Pela Regra de L'Hospital, obtemos*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[\ln(x)]'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

1^∞: $\lim_{x\to 0}(1 + \operatorname{sen}(2x))^{1/x}$. *Aqui temos uma indeterminação* 1^∞. *Fazemos* $(1 + \operatorname{sen}(2x))^{1/x} = e^{\ln(1+\operatorname{sen}(2x))^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\operatorname{sen}(2x))}$. *Então* $\lim_{x\to 0}(1 + \operatorname{sen}(2x))^{1/x} = e^L$, *sendo*

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1 + \operatorname{sen}(2x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen}(2x))}{x} \qquad (= 0/0).$$

Aplicando L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen}(2x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\ln(1 + \operatorname{sen}(2x))]'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}(2x)} \cdot 2\cos(2x) = 2$$

Portanto $\lim_{x\to 0}(1 + \operatorname{sen}(2x))^{1/x} = e^2$.

Exercício 2 (a) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\cos(x))} = \lim_{x\to 0} -\frac{2x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x))} = -2,$$

onde a última igualdade sai do limite trigonométrico fundamental.

(b) *Dada a indeterminação* $-\infty/-\infty$, *usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}(x))}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = 1,$$

pelo mesmo argumento que no item (a).

(c) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{x\ln(x)+x-1}\right).$$

Observando que tem-se a indeterminação 0/0 *de novo, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{\ln(x)+1+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

(d) *Observe que* $\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$, *onde temos a indeterminação 0/0. Assim, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}-\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{\csc\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=-\frac{2}{\pi}.$$

(e) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\ln(x+3\sqrt{x^2-1})}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{\frac{1+\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+3\sqrt{x^2-1}}}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)(x+3\sqrt{x^2-1})}{3x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{3}.$$

(f) *Observemos que* $\lim_{x\to+\infty}x^3\Big(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\Big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^3}}$ *e notamos a indeterminação 0/0. Assim, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\Big(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\Big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{3}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{3(x^2)(x^2+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{3}.$$

(g) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi 3^x)}{x}=\lim_{x\to 0}\pi\ln(3)3^x\cos(\pi 3^x)=-\pi\ln 3.$$

(h) *Dada a indeterminação 0/0, usamos a Regra de L'Hôpital e temos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))2\cos(2x)}=\frac{1}{2}.$$

(i) *Observemos que* $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln((e^x+x)^{\frac{1}{x}})}$. *Como a função exponencial é contínua, basta calcular o limite* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln(e^x + x)$ *e logo aplicar a função exponencial ao limite obtido. Assim,* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln(e^x + x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+1}{(e^x+x)} = 2$. *Logo,* $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

(j) *Observemos que não podemos aplicar a Regra de L'Hôpital em* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)}$ *pois não temos nenhuma das indeterminações conhecidas. O limite não existe pois* $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)} = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(x)} = +\infty$.

Exercício 3 (a) *Vamos calcular os limites laterais de quando* $x \to 0$. *Então, fazendo a mudança de variável* $\frac{1}{x} = u$ *temos que se* $x \to 0^-$ *temos* $u \to -\infty$, *logo*

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{u\to -\infty} e^{-u^2} = \lim_{u\to -\infty}\frac{1}{e^{u^2}} = 0.$$

Analogamente, provamos que $\lim\limits_{x\to 0^+} = 0$. *Defina,* $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *se* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 0$. *Portanto, estendemos* f *por continuidade.*

Agora, utilizando a definição de derivada e calculando o limite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

Fazendo, $u = \frac{1}{x}$ *temos que se* $x \to 0$ *então* $u \to \pm\infty$. *Logo,* $\lim\limits_{u\to\pm\infty}\frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u}} = \lim\limits_{u\to\pm\infty}\frac{u}{e^{u^2}}$. *Note que, temos indeterminação do tipo* $\frac{-\infty}{\infty}$, *aplicando L' Hôspital, segue que*

$$\lim_{u\to\pm\infty}\frac{u}{e^{u^2}} = \lim_{u\to\pm\infty}\frac{1}{2ue^{u^2}} = 0.$$

Portanto, f *é diferenciável.*

(b) *Note que temos uma indeterminação do tipo* $\frac{0}{0}$ *no limite,* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(x^4 - x^2)}{x}$, *por L'Hôspital, segue que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^4 - x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3 - 2x}{1 + (x^4 - x^2)^2} = 0.$$

Basta definir, $g(0) = 0$ *e assim* g *é contínua. Para a diferenciabilidade, aplicamos L'Hôspital duas vezes no limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^4 - x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3 - 2x}{2x(1 + (x^4 - x^2))} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2 - 1}{(1 + (x^4 - x^2))} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Portanto, g é diferenciável.

(c) *Vamos calcular os limites laterais, obtemos que se* $x \to 0^+$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(|x|)}{\frac{1}{x^2}}$ *que é uma indeterminação do tipo* $\frac{\infty}{\infty}$. *Por L'Hôspital, segue que*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(|x|)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3}{2x\ln(10)} = 0.$$

Defina, $h(0) = 0$. *Por definição de diferenciabilidade, fazendo por limites laterais*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\log(|x|)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(|x|)}{\frac{1}{x}}.$$

Por L'Hôspital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(|x|)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x\ln(10)}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2\ln(10)} = 0.$$

Para o outro limite lateral, também teremos zero pois obtemos $\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{2\ln(10)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2\ln(10)}$, *como o limite existe, então* h *é diferenciável.*

(d) *Para* $x \to 0^+$ *segue que* $x^x = e^{x\ln(x)}$, *logo* $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$, *indeterminação do tipo* $\frac{\infty}{\infty}$, *logo*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Analogamente, para $x \to 0^-$*segue,* $(-x)^x$, *seguindo os mesmos passos* $\lim_{x\to 0^-} (x) = 0$. *Em ambos os casos, temos*

$$\lim_{x\to 0} = e^0 = 1.$$

Basta definir, $u(0) = 1$ *e assim* f *é contínua. Para a diferenciabilidade, por definição* $\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x}$, *uma indeterminação do tipo* $\frac{0}{0}$, *logo* $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)}(\ln(x) + 1) = -\infty$, *portanto* f *não é diferenciável em* 0.

Exercício 4 (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{4x^3 - x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{12x^2 - 1} = \frac{3}{11}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = \frac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{4}$

(d) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}(t^2)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}=\dfrac{2t\cos(t^2)}{1}=0$

(e) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2}{-1(-\mathrm{sen}(2\pi-\theta))}=-2$

(f) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{3^{\mathrm{sen}(\theta)}-1}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{3^{\mathrm{sen}(\theta)}\cos(\theta)\ln 3}{1}=\ln 3$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x2^x}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+(2^x\ln(2))x}{2^x\ln 2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x(1+x\ln 2)}{2^x\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 2}$

Exercício 5 (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x}{x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{6x}=0$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x}{7x^3+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2-2}{21x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{30x}{42x}=\dfrac{30}{42}=\dfrac{5}{7}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\log_2 x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x\ln 2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln 2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 2}{1}=\ln 2$

Exercício 6 (a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln(x))^2=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln(x))^2}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{((\ln(x))^2)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{2\ln(x)}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$
$\lim\limits_{x\to 0^+}-2x\ln(x)=-2\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x)=-2\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=-2\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln(x))'}{(\frac{1}{x})'}=-2\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$
$-2\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}-x=0.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e=\exp[\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(1+\dfrac{1}{x})]=\exp[\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}]\overset{\text{L.H.}}{=}\exp[\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}]=$
$\exp[\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x+1}]=\exp(0)=1.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(x))^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\exp[\dfrac{1}{x}\ln((\ln(x)))]=\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\ln(x))}{x}]=\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\ln(x)))'}{(x)'}]=$
$\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x\ln(x)}}{1}]=\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x\ln(x)}]=e^0=1.$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{2\ln(x)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\exp[\dfrac{1}{2\ln(x)}\ln(1+2x)]=\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2\ln(x)}\ln(1+2x)]=$
$\frac{1}{2}\cdot\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(x)}]=\dfrac{1}{2}\cdot\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln(1+2x))'}{(\ln(x))'}]=\dfrac{1}{2}\cdot\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{1}{x}}]=\dfrac{1}{2}\cdot\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+2x}]=$
$\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+2x}]=\exp[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}+2}]=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$

(e) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp[\frac{1}{x}\ln(\frac{x^2+1}{x+2})] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{x^2+1}{x+2})}{x}] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(\frac{x^2+1}{x+2}))'}{x'}] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)(x+2)}}{1}] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)(x+2)}] = \exp[\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{4x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{x+2}] = \exp[\frac{1}{\infty}] = e^0 = 1.$

(f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}\ln(x)} = \exp[\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}\ln(x)] = \exp[\lim_{x\to 1^+} \frac{(\ln(x))'}{(1-x)'}] = \exp[\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1}] = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-\ln(x+1)}{\ln(1+x)(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1-\ln(x+1))'}{(\ln(1+x)(e^x-1))'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-\frac{1}{x+1}}{\frac{e^x-1}{x+1}+e^x\ln(x+1)} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{xe^x+1}{(x+1)^2}+e^x\ln(1+x)+\frac{e^x}{x+1}} = 1.$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}(1-\frac{1-\cos(x)}{x^2}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} \cdot \lim_{x\to 0} 1 - \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} \cdot (\lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} \cdot (1 - \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} \cdot (1 - \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} \cdot (1 - \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{(2x)'}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} \cdot (1 - \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)} \cdot (1-\frac{1}{2}) = \infty \cdot \frac{1}{2} = \infty.$

Exercício 7 *(a)* $\frac{3x^2}{2} + x + c.$

(b) $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + c.$

(c) $\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\ln|x| - \frac{1}{3x} + c.$

(d) Denote por $u = 2x$ *temos,* $du = 2dx$ *e assim,* $dx = \frac{du}{2}$*. Logo,* $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} + c = \frac{e^{2x}}{2} + c.$

(e) Se $u = 3x$ *temos,* $dx = \frac{du}{3}$ *e assim,* $\frac{1}{3}\int \cos(u)du = \frac{\text{sen}(3x)}{3} + c.$

(f) $u = 2x$*, logo* $\frac{du}{2} = dx$*. Então,* $\frac{1}{2}\int \text{sen}(u)du = -\frac{\cos(2x)}{2} + c.$

(g) Se $u = -3x$ *temos,* $dx = -\frac{du}{3}$ *e assim,* $-\frac{7}{3}\int e^u du = \frac{7e^{-3x}}{3} + c.$

(h) $\frac{1}{2}\int e^{x}dx + \frac{1}{2}\int e^{-x}dx = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} + c$. *Na segunda integral, basta chamar* $u = -x$.

(i) $4\int x^{\frac{2}{5}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{20\sqrt[5]{x^{7}}}{7} - \frac{\sqrt{x^{3}}}{3} + c$.

(j) $\int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2\sqrt{x^{5}}}{5} + c$.

(l) *Denote por* $u = 3x-1$, *então,* $dx = \frac{du}{3}$. *Logo,* $\int (3x-1)^{2003}dx = \frac{1}{3}\int u^{2003}du = \frac{u^{2004}}{2004} + c = \frac{(3x-1)^{2004}}{2004} + c$.

(m) *Se* $\text{sen}(x) = u$, *temos* $du = \cos(x)dx$. *Logo,* $\int \text{sen}^{7}(x)\cos(x)dx = \int u^{7}du = \frac{u^{8}}{8} + c = \frac{\text{sen}^{8}(x)}{8} + c$.

(n) $\int \text{tg}^{3}(x)\cos(x)dx = \int \frac{\text{sen}^{3}(x)}{\cos^{3}(x)}\cos(x)dx = \int \frac{\text{sen}^{2}(x)}{\cos^{3}(x)}\text{sen}(x)\cos(x)dx =$
$= \int \frac{(1-\cos^{2}(x))}{\cos^{3}(x)}\text{sen}(x)\cos(x)dx$. *Agora, denote por* $u = \cos(x)$.
Logo, $\text{sen}(x)dx = -du$. *Então,*

$$-\int \frac{(1-u^{2})}{u^{3}}u\,du = -\int \frac{u-u^{3}}{u^{3}}du = -\int \frac{1}{u^{2}}du + \int du = \frac{1}{u} + u + c = \frac{1}{\cos(x)} + \cos(x) + c$$

$= \sec(x) + \cos(x) + c$.

(o) *Se* $u = 2 + e^{x}$ *então,* $du = e^{x}dx$. *Logo,* $\int e^{x}\sqrt[3]{2+e^{x}}dx = \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3\sqrt[3]{u^{4}}}{4} + c = \frac{3\sqrt[3]{2+e^{x}}}{4} + c$.

(p) *Se* $u = 4x+3$ *temos* $dx = \frac{du}{4}$, *então* $\frac{3}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{3\ln|4x+3|}{2} + c$.

(q) *Se* $u = 1-x$, *temos* $dx = -du$. *Logo,* $-\int \frac{1}{u^{4}}du = \frac{1}{3u^{3}} + c = \frac{1}{3(1-x)^{3}} + c$.

(r) *Lembre que* $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$. *Dessa forma, obtemos* $\int 2\text{sen}(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^{2}(x)}dx$.
Fazendo a mudança de variável, $u = 1+\cos^{2}(x)$, *obtemos que* $-du = 2\cos(x)\text{sen}(x)dx$.
Então, $-\int \sqrt{u}du = -\frac{2\sqrt{u^{3}}}{3} + c = -\frac{2\sqrt{(1+\cos^{2}(x))^{3}}}{3} + c$.

(s) *Lembre que* $\text{sex}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, *logo* $\int \sec(x)\text{sen}(x)dx = \int \text{tg}(x)dx = -\ln|\cos(x)| + c$.

(t) *Fazendo a mudança de varável,* $u = 3{+}2\mathrm{tg}(x)$ *temos* $\dfrac{du}{2} = \sec^2(x)dx$. Logo, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{du}{u} = \dfrac{\ln|u|}{2} + c = \dfrac{\ln|3+\mathrm{tg}(x)|}{2} + c.$

(u) *Se* $u = 3x^2$ *temos* $\dfrac{du}{6} = xdx$. *Logo,* $\dfrac{1}{6}\displaystyle\int \mathrm{sen}(u)du = -\dfrac{\cos(u)}{6} + c = -\dfrac{\cos(3x^2)}{6} + c.$

(v) *Se* $u = 32 + 4x^2$ *temos* $\dfrac{du}{8} = xdx$. *Logo,* $\dfrac{1}{8}\displaystyle\int u^{\frac{1}{2}}du = \dfrac{\sqrt{u^3}}{12} + c = \dfrac{\sqrt{(32+4x^2)^3}}{12} + c.$

(x) *Denote por* $u = \mathrm{tg}(x)$ *então* $du = \sec^2(x)dx$. *Logo,* $\displaystyle\int \sec^2(x)\mathrm{tg}(x)dx = \int u^2du = \dfrac{u^3}{3} + c = \dfrac{\mathrm{tg}^3(x)}{3} + c.$

(z) *Se* $u = 2x$ *temos* $\dfrac{du}{2} = dx$. *Logo,* $\displaystyle\int 3^{2x}dx = \dfrac{1}{2}\int 3^u du = \dfrac{3^u}{2\ln(3)} + c = \dfrac{3^{2x}}{2\ln(3)} + c.$

(A1) *Primeiramente vamos multiplicar e dividir dentro da integral por* $\sec(x) + \mathrm{tg}(x)$. *Obtemos,* $\displaystyle\int \sec(x)\dfrac{\sec(x)+\mathrm{tg}(x)}{\sec(x)+\mathrm{tg}(x)}dx = \int \dfrac{\sec^2(x)+\sec(x)\mathrm{tg}(x)}{\sec(x)+\mathrm{tg}(x)}$. *Agora,* *denote por* $u = \sec(x){+}\mathrm{tg}(x)$ *e assim,* $du = (\sec^2(x){+}\sec(x)\mathrm{tg}(x))dx$. *Substituindo na integral, temos*

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec(x) + \mathrm{tg}(x)| + c.$$

Exercício 8

(a) *É possível notar que* $\mathrm{sen}(5x)\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{sen}(4x){+}\mathrm{sen}(6x))$. *Assim,* $\displaystyle\int \mathrm{sen}(5x)\cos(x)dx = \int \frac{1}{2}(\mathrm{sen}(4x) + \mathrm{sen}(6x))dx = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{sen}(4x)dx + \int \mathrm{sen}(6x)dx\right)$. *Utilizando a manipulação algébrica*

$$\int \mathrm{sen}(ax)dx = \frac{1}{a}\int \mathrm{sen}(ax)d(ax) = \frac{1}{a}\int \mathrm{sen}(y)dy = \frac{-\cos(y)}{a} + C,$$

onde $y = ax$ *e* $a \neq 0$. *Desse modo*

$$\frac{1}{2}\left(\int \mathrm{sen}(4x)dx + \int \mathrm{sen}(6x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(4x)}{4} + \frac{-\cos(6x)}{6}\right) = -\frac{\cos(4x)}{8} - \frac{\cos(6x)}{12} + C.$$

(b) *É possível notar que* $\mathrm{sen}(4x)\cos(2x) = \frac{1}{2}(\mathrm{sen}(2x) + \mathrm{sen}(6x))$. *Utilizando a mesma manipulação algébrica do item anterior, temos*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(4x)\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int \operatorname{sen}(2x)\,dx + \int \operatorname{sen}(6x)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(2x)}{2} + \frac{-\cos(6x)}{6}\right)\\ &= -\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{\cos(6x)}{12} + C.\end{aligned}$$

(c) *É possível notar que* $\cos(5x)\cos(6x) = \frac{1}{2}(\cos(-x) + \cos(11x)) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \cos(11x))$, *pois a função cosseno é uma função par. Utilizando a mesma manipulação algébrica do item* a, *temos*

$$\int \cos(5x)\cos(6x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \cos(x)\,dx + \int \cos(11x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x) + \frac{\operatorname{sen}(11x)}{11}\right) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(11x)}{22} + C.$$

(d) *É possível notar que* $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}(\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x))$. *Utilizando a mesma manipulação algébrica do item* a, *temos*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int \cos((m-n)x)\,dx + \int \cos((m+n)x)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{m-n} + \frac{\operatorname{sen}((m+n)x)}{m+n}\right)\\ &= \frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{2(m-n)} + \frac{\operatorname{sen}((m+n)x)}{2(m+n)} + C.\end{aligned}$$

(e) *É possível notar que* $\cos(mx)\operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}((n-m)x) + \operatorname{sen}((n+m)x))$. *Utilizando a mesma manipulação algébrica do item* a, *temos*

$$\int \cos(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \operatorname{sen}((n-m)x)\,dx + \int \operatorname{sen}((n+m)x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos((n-m)x)}{n-m} + \frac{-\cos((n+m)x)}{n+m}\right) = -\frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)} - \frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} + C.$$

Exercício 9

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x - \ln|x+1| + C.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x-3}dx = \int \left(1 + \frac{5}{x-3}\right) dx = x + 5\ln|x-3| + C.$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{3x+1}dx = \int \left(\frac{2}{3} - \frac{17}{3(3x+1)}\right) dx = \frac{2x}{3} - \frac{17}{9}\ln|3(3x+1)| + C.$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$

(e) $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{x^2+1} - \frac{x^3}{x-1}\right) dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} - x^2 - x - 1 - \frac{1}{x-1}\right) dx = -\int \frac{x}{x^2+1}dx -$
$\displaystyle\int x^2 dx - \int 1 dx - \int \frac{1}{x-1}dx = -\frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{x^3}{3} - x - \ln|x-1| + C.$

Exercício 10

(a) *Aplicando a integração por substituição e tomando* $x = au$ *e* $dx = adu$, *temos*

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1}{a^2+(au)^2}adu = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(u) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+1}dx = \int \frac{3x}{x^2+1}dx + \int \frac{2}{x^2+1}dx = 3\int \frac{x}{x^2+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx.$

Para resolver a primeira integral, deve-se aplicar integração por substituição, assim, tomando $u = x^2+1$ *e* $dx = \frac{1}{2x}du$, *temos*

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{u}\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|$$

Portanto,

$$\int \frac{3x+2}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + 2\operatorname{arctg}(x) + C.$$

(c) *Aplicando integração por substituição e tomando* $u = x+1$ *e* $du = dx$, *temos*

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \operatorname{arctg}(u) = \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx.$ *Tomando* $u = x+2$ *e* $dx = du$, *temos*

$$\int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \operatorname{arctg}(u) = \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

(e) *Tomando* $u = x^3$ *e* $dx = \frac{1}{3x^2}du$, *temos*

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{x^2}{1+u^2}\frac{1}{3x^2}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{3}\,\text{arctg}(u) = \frac{1}{3}\,\text{arctg}(x^3) + C.$$

Exercício 11 *(a) Usando a substituição* $u = \ln(x)$, *teremos:* $du = \frac{1}{x}dx$. *Assim, teremos:*

$$F(x) = \int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$

.

(b) Usando a substituição $u = \ln(x)$, *teremos:* $du = \frac{1}{x}dx$. *Assim, teremos*

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln(x))} + C$$

.

(c) Usando a substituição $u = x^2$, *teremos:* $du = 2xdx$. *Assim, teremos*

$$\int \frac{x}{x^4+16}dx = \int \frac{1}{2(u^2+16)}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{16(\frac{u^2}{16}+1)}du,$$

utilizando a substituição $v = u/4$, *e* $4dv = du$, *teremos:*

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{16(\frac{u^2}{16}+1)}du = \frac{1}{8}\text{arctg}(v) + C = \frac{1}{8}\text{arctg}(\frac{x^2}{4}) + C$$

.

(d) Usando a substituição $u = e^x$, *com* $du = e^x dx$. *Portanto, teremos*

$$\int e^x(e^{2x}+1)^{-1}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \text{arctg}(u) + C = \text{arctg}(e^x) + C$$

.

(e) Usando a substituição $u = \ln(x)$, *com* $du = dx/x$, *teremos*

$$\int x^{-1}\cos(\ln x)dx = \int \cos(u)du = \text{sen}(u) + C = \text{sen}(\ln(x)) + C$$

.

Exercício 12 *(a) Utilizando a substituição* $u = \frac{x}{a}$, *com* $du = \frac{dx}{a}$, *temos*

$$\int \frac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dx = \text{arcsen}(\frac{x}{a}) + C$$

.

(b) Utilizando a substituição $u = x+1$, *com* $du = dx$, *teremos* $\text{arcsen}(u) = \text{arcsen}(x+1)$.

Exercício 13 *(a) Se* $u = \text{sen}(x)$, *então* $du = \cos(x)dx$, *ou* $dx = du/\cos(x)$, *portando, na integral, teremos*

$$\int udu\frac{1}{\cos^2(x)} = \int u\frac{1}{1-\text{sen}^2(x)}dx = \int u\frac{1}{1-u^2}du,$$

fazendo $v = 1 - u^2$ *e* $dv = -2udu$, *teremos*

$$\int udu\frac{1}{1-u^2} = -1/2\int\frac{1}{v}dv = -1/2\ln(v) = -1/2\ln(1-u^2) = -1/2\ln(\cos^2(x)) = -\ln(\cos(x)).$$

(b) Se $u = \cos(x)$, *então* $du = -\text{sen}(x)dx$, *portanto* $\text{tg}(x)dx = -\frac{1}{u}du$. *Integrando, teremos* $-\ln(u) = -\ln(\cos(x))$.

(c) A segunda forma. Porém, ambas nos levam ao resultado.

Exercício 14 *(a) Fazendo as substituições* $u = 3x$, *com* $du = 3dx$, *e, em seguida* $v = \text{sen}(u)$ *com* $dv = \cos(u)du$. *Teremos*

$$\int\frac{\cos(3x)}{\text{sen}^{1/3}(3x)}dx = 1/3\int\frac{1}{\sqrt[3]{[v]}} = 1/2v^{2/3} = 1/2\text{sen}^{2/3}(u) = 1/2\text{sen}^{2/3}(3x) + C$$

.

(b) Fazendo $v = x + 3$, *com* $dv = dx$, *teremos,* $\sqrt{3+x}(x+1)^2 = \sqrt{v}(v-2)^2$, *então*

$$\int v^{\frac{5}{2}} - 4v^{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{v} = \frac{2}{7}v^{7/2} - \frac{8}{5}v^{5/2} + \frac{8}{3}v^{3/2} + C = \frac{2}{7}(x+3)^{7/2} - \frac{8}{5}(x+3)^{5/2} + \frac{8}{3}(x+3)^{3/2} + C.$$

(c) Fazendo $\cos^3(x) = (1 - \text{sen}^2(x))\cos(x)$, *e com* $u = \text{sen}(x)$ *e* $du = \cos(x)dx$, *teremos*

$$\int(1-u^2)du = u - \frac{1}{3}u^3 = \text{sen}(x) - \frac{1}{3}\text{sen}^3(x) + C$$

.

(d) Fazendo $e^x + e^{-x} = e^{-x}(e^{2x}+1)$ *e, com* $u = e^x$ *e* $du = e^x dx$. *Teremos*

$$\int\frac{1}{u^2+1}du = \text{arctg}(u) = \text{arctg}(e^x) + C$$

.

(e) Fazendo $u = t^6 + 6t^2$, *com* $du = (6t^5 + 12t)dt$, *assim, teremos,*

$$1/6\int\frac{1}{\sqrt{u}}du = 1/3\sqrt{u} + C = 1/3\sqrt{t^6+6t^2} + C$$

.

Exercício 15 *Lembremos que o polinômio de Taylor de* f *de grau* n *em torno de* x_0 *é dado por*

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

(a) $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}} \implies f(1) = 1;$

$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k} = \frac{x^{\frac{1-k}{k}}}{k} \implies f'(1) = \frac{1}{k};$

$f''(x) = \frac{(1-k)x^{\frac{1-k}{k}-1}}{k^2} = \frac{(1-k)x^{\frac{1-2k}{k}}}{k^2} \implies f''(1) = \frac{(1-k)}{k^2};$

Portanto,

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{k}(x - 1) + \left(\frac{1-k}{2k^2}\right)(x - 1)^2.$$

(b) $f(x) = \ln(1 + x) \implies f(0) = 0;$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(0) = 1;$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -1;$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \implies f'''(0) = 2;$

Portanto,

$$p_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

(c) $f(x) = \cos(x) \implies f(0) = 1;$

$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) \implies f'(0) = 0;$

$f''(x) = -\cos(x) \implies f''(0) = -1;$

$f'''(x) = \operatorname{sen}(x) \implies f'''(0) = 0;$

Note que essa sequência começará a se repetir. Dividindo n *por 2, escrevemos* $n = 2k$ *(caso* n *seja par), ou* $n = 2k + 1$ *(caso* n *seja ímpar), portanto*

$$p_n(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

(d) $f(x) = x^x \implies f(1) = 1;$

$f'(x) = x^x(\ln x + 1) \implies f'(1) = 0;$

Portanto,

$$p_1(x) = 1 + (x - 1).$$

(e) $f(x) = e^{x^2} \implies f(0) = 1;$

$f'(x) = 2xe^{x^2} \implies f'(0) = 0;$

$f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2 + 1) \implies f''(0) = 2;$

Portanto,

$$p_2(x) = 1 + x^2.$$

(e) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies f(0) = 1;$

$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \implies f'(0) = 0;$

$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \implies f''(0) = -2;$

Portanto,

$$p_2(x) = 1 - x^2.$$

Exercício 16 *Sabemos que* $(x, f(x))$ *é solução da equação* $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1, \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, *então*

$$x^2 + \frac{f(x)^2}{3} = 1 \implies f(x)^2 = 3(1-x^2) \implies f(x) = \pm\sqrt{3(1-x^2)},$$

como $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, *portanto*

$$f(x) = -\sqrt{3(1-x^2)}.$$

$f'(x) = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{1-x^2}} \implies f'(-\frac{1}{2}) = -1;$

$f''(x) = \frac{\sqrt{3}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \implies f''(-\frac{1}{2}) = \frac{8}{3};$

Portanto,

$$p_2(x) = -\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Exercício 17 *Como queremos* $x \in [-\frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{32}]$, *vamos fazer o polinômio de Taylor em torno do ponto* $x_0 = 0$. *Dessa forma,*

$$p_5(x) = \mathrm{sen}(0) + \cos(0)(x-0) - \frac{\mathrm{sen}(0)(x-0)^2}{2!} - \frac{\cos(0)(x-0)^3}{3!} + \frac{\mathrm{sen}(0)(x-0)^4}{4!} + \frac{\cos(0)(x-0)^5}{5!} \Rightarrow$$

$$p_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

O polinômio de Taylor de grau seis também é o polinômio acima. Então, pelo Teorema da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange, o resto é

$$\left|\mathrm{sen}(x) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| = \frac{|\,\mathrm{sen}^{(7)}(c)|}{7!}|x|^7, \ c \in \left(-\frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{32}\right).$$

Pela dica do enunciado, sabemos que $|\mathrm{sen}(c)| \leq c$. *Por outro lado,* $|\mathrm{sen}(c)| \leq 1, \forall c \in \mathbb{R}$, *logo* $|\mathrm{sen}^6(c)| \leq 1$. *Multiplicando* $|\mathrm{sen}(c)|$ *dos dois lados, obtemos* $|\mathrm{sen}^7(c)| \leq |\mathrm{sen}(c)| \leq c \ \forall c \in \mathbb{R}^+$ *então, do termo de cima, temos:*

$$\frac{|\,\mathrm{sen}^{(7)}(c)|}{7!}|x|^7 \leq \frac{1}{7!}c|x|^7$$

e como temos que $c < \frac{\pi}{32}$, *pelo Teorema da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange usado acima, e* $x \leq \frac{\pi}{32}$, *pelo intervalo de* x, *podemos seguir majorando esse termo por*

$$\frac{1}{7!}c|x|^7 < \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{32}\right)^8 < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{32}\right)^8 < \frac{1}{100}\left(\frac{\pi}{32}\right)^8 < 10^{-2}(10^{-1})^8 = 10^{-10},$$

portanto o erro é menor que 10^{-10}.

Exercício 18 *Como queremos $x \in [-\frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{32}]$, vamos fazer o polinômio de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$. Dessa forma,*

$$p_5(x) = \cos(0) - \text{sen}(0)(x-0) - \frac{\cos(0)(x-0)^2}{2!} + \frac{\text{sen}(0)(x-0)^3}{3!} + \frac{\cos(0)(x-0)^4}{4!} - \frac{\text{sen}(0)(x-0)^5}{5!} \Rightarrow$$

$$p_5(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Assim como no Exercício 17, usando o Teorema da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange, temos que o erro é

$$\left|\cos(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right)\right| = \frac{|\cos^6(c)|}{6!}|x|^6 \leq \frac{1}{720}\left(\frac{\pi}{32}\right)^6 < \frac{1}{720}(10^{-1})^6 = \frac{1}{720}10^{-6}.$$

Exercício 19 *Uma maneira de estimar o valor de e é utilizando o polinômio de Taylor a partir da função e^x. Para se construir o polinômio de Taylor se utiliza a equação*

$$p(x) = e^{x_0} + (x - x_0) \cdot \frac{d}{dx}e^x(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}e^x(x_0)}{2!} +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}e^x(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{(x-x_0)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n}e^x(x_0)}{n!}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

Por $\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x$, temos que

$$p(x) = e^{x_0} + (x-x_0)e^{x_0} + \frac{(x-x_0)^2 e^{x_0}}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 e^{x_0}}{3!} + \ldots + \frac{(x-x_0)^n e^{x_0}}{n!}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

e escolhendo $x_0 = 0$, temos por fim que

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Por querermos a aproximação para $e = e^1$, apenas temos que resolver

$$p(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N},$$

portanto a estimativa dada pela questão é verdadeira.

Agora para estimar o erro temos que voltar ao erro criado pela aproximação do polinômio de Taylor. Ele tem um erro que segue a relação

$$e^x = p(x) + E(x)$$

$$E(x) = \frac{(c-x_0)^{n+1}e^c}{(n+1)!}$$

assim,

$$|e^x - p(x)| = E(x) = \left|\frac{(c-x_0)^{n+1}e^c}{(n+1)!}\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1} \cdot M}{(n+1)!}, \forall x \in (a,b), \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $M > e^x$. *Por nossa aproximação apenas necessitar de* $x \in (0,1)$, *temos que o maior valor de* e^x *será* e, *ou seja, podemos escolher* $M = 3 > e$, *assim temos que*

$$E(x) \leq \frac{(1-0)^{n+1} \cdot 3}{(n+1)!} = \frac{3}{(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso nos diz que, conforme o valor de n *aumenta, o erro cometido na aproximação diminui.*

Exercício 20 (a) *Para estimar* $\ln(1.3)$ *temos que fazer o polinômio de Taylor de* $\ln(x)$ *com* $x = 1.3$. *Por conhecermos o valor de* $\ln(1) = 0$, *usaremos* $x_0 = 1$. *Assim, para ordem* $n = 3$, *temos* $p_3(x) = \ln(x_0) + (x-x_0) \cdot \frac{d}{dx}\ln(x)(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}\ln(x)(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}\ln(x)(x_0)}{3!} = \ln(1) + (x-1) \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{1^2}\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{1^3}\frac{1}{6}(x+1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$. *Então* $\ln(1.3) \approx p_3(1.3) = 0.264$.

(b) *Para estimar* $\sqrt[3]{8.2}$ *temos que fazer o polinômio de Taylor de* $\sqrt[3]{x}$ *com* $x = 8.2$. *Por conhecermos o valor de* $\sqrt[3]{8} = 2$, *usaremos* $x_0 = 8$. *Assim, para ordem* $n = 3$, *temos* $p_3(x) = \sqrt[3]{x_0} + (x-x_0) \cdot \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}\sqrt[3]{x}(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}\sqrt[3]{x}(x_0)}{3!} = \sqrt[3]{8} + 1/3 \cdot (x-8) \cdot (8)^{-2/3} - 2/9\frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot (8)^{-5/3} + 10/27\frac{1}{6}(x+1)^3 \cdot (8)^{-8/3} = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20736}(x-8)^3$. *Então* $\sqrt[3]{8.2} \approx p_3(8.2) = 2,0165297\overline{0679012345}$.

(c)*Para estimar* $\operatorname{sen}(0.1)$ *temos que fazer o polinômio de Taylor de* $\operatorname{sen}(x)$ *com* $x = 0.1$. *Por conhecermos o valor de* $\operatorname{sen}(0) = 0$, *usaremos* $x_0 = 0$. *Assim, para ordem* $n = 3$, *temos* $p_3(x) = \operatorname{sen}(x_0) + (x-x_0) \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x)(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen}(x)(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen}(x)(x_0)}{3!} = \operatorname{sen}(0) + (x) \cdot \cos(0) - \operatorname{sen}(0)\frac{1}{2}(x)^2 - \cos(0)\frac{1}{6}(x)^3 = x - \frac{1}{6}x^3$. *Então* $\operatorname{sen}(0.1) \approx p_3(0.1) = 0.099833\overline{3}$.

(d) *Para estimar* $\cos(0.1)$ *temos que fazer o polinômio de Taylor de* $\cos(x)$ *com* $x = 0.1$. *Por conhecermos o valor de* $\cos(0) = 1$, *usaremos* $x_0 = 0$. *Assim, para ordem* $n = 3$, *temos* $p_3(x) = \cos(x_0) + (x-x_0) \cdot \frac{d}{dx}\cos(x)(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}\cos(x)(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}\cos(x)(x_0)}{3!} = \cos(0) - (x) \cdot \operatorname{sen}(0) - \cos(0)\frac{1}{2}(x)^2 + \operatorname{sen}(0)\frac{1}{6}(x)^3 = 1 - \frac{1}{2}x^2$. *Então* $\cos(0.1) \approx p_3(0.1) = 0.995$.