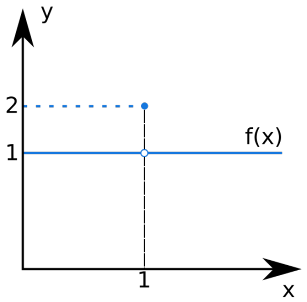
Gabarito da Lista de Exercícios de SMA353-Cálculo I - Módulo 2

Última atualização em 17/05/2022

Exercício 1 *O limite pode não existir. Caso exista não necessariamente deve ser 2, veja por exemplo*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 1 \\ 2, & se\ x = 1 \end{cases},$$

representada pelo gráfico



Nela $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^-}$, *assim* $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$. *Contudo* $f(1) = 2$ *e portanto, não podemos dizer nada sobre a existência de* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *e nem sobre seu possível valor (caso exista).*

Exercício 2 *(a)*

$$\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} = \lim_{t\to -1} \frac{(t+1)(t+2)}{(t+1)(t-2)}$$

$$\lim_{t\to -1} \frac{t+2}{t-2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)+(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{-1\cdot 1} = -2$$

Exercício 3 *(a) Se os limites de* $f(x)$ *e* $g(x)$ *para* $x \to c$ *existem, então* $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = 5 \cdot -2 = -10$

(b) Se o limite de $f(x)g(x)$ *existe para* $x \to c$, *então* $\lim_{x\to c} \alpha \cdot f(x)g(x) = \alpha \cdot \lim_{x\to c} f(x)g(x)$, *sendo* $\alpha = 2$ *temos que* $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x) = 2\lim_{x\to c} f(x)g(x) = -20$

(c) Se os limites de $f(x)$ *e* $g(x)$ *para* $x \to c$ *existem, então* $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = 5 + -2 = 3$

(d) Juntando as regras em (b) e (c) temos que $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} 3g(x) = \lim_{x\to c} f(x) + 3 \cdot \lim_{x\to c} g(x) = 5 + 3 \cdot -2 = -1$

(e) Se os limites de $f(x)$ *e* $f(x)-g(x)$ *para* $x \to c$ *existem, sendo* $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) \neq 0$*, então* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{(f(x)-g(x))} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))} = \frac{5}{5-(-2)} = \frac{5}{7}$

(f) Parecido com a (e), se os limites de $f(x)$ *e* $g(x)$ *para* $x \to c$ *existem, sendo* $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$*, então* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$

Exercício 4 *Os limites laterais dessa função são*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \qquad e \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Pelo limite de $x \to 1$ *ter que ser igual a ambos os laterais e mais ainda ser um número real, concluímos que o* $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ *não existe.*

Exercício 5 *Chamemos*

$$-x^2 + 3x = g(x)$$

$$e$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = h(x),$$

temos que $f(x)$ *é limitada por* $g(x)$ *e* $h(x)$*, e que, de acordo com o Teorema do Confronto, se*

$$\lim_{x\to c} g(x) = L = \lim_{x\to c} h(x)$$

o $\lim_{x\to c} f(x)$ *será também igual a* L*. Assim, temos que verificar se* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *é uma dessas situações:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} g(x) &= \lim_{x\to 1} -x^2 + 3x = -1 + 3 = 2 \\ \lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2. \end{aligned}$$

Como o limite de $g(x)$ *e* $h(x)$ *tendendo a 1 são iguais a 2, o* $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Exercício 6 *Pela questão,* $|g(x)| \leq M$ *para* $x \in A$*, isso significa que* $-M \leq g(x) \leq M$ *para* $x \in A$*, ou seja,* g *é uma função limitada no seu dominio* A*. Agora, pela definição de limite, temos que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A, 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon.$$

Com isto, dado $\epsilon > 0$ *arbitrário, temos que a definição de limite se cumpre em particular para* $\frac{\epsilon}{M}$*, isto é, que para* $\frac{\epsilon}{M} > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $x \in A, 0 < |x-p| < \delta$ *então* $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$*. Observamos que se* g *for a função nula, temos provado o que nos pedem automaticamente. Então suponha que* g *é não nula. Neste caso vamos ter que*

$$|f(x)||g(x)| < \frac{\epsilon}{M}|g(x)| \leq \epsilon$$

se $x \in A$ *e* $0 < |x - p| < \delta$. *Assim, observando que o domínio de* fg *é* A *por hipótese, temos provado em resumem que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x)| < \epsilon,$$

o que significa que $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.

Exercício 7 *(a) Temos que* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. *Mas como* $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *é limitada entre* $[-1, 1]$ *e se* $x \geq 0$,

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x.$$

Agora, se x *for negativo, teríamos analogamente que*

$$-x \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x.$$

Logo, como $\lim_{x\to 0} x = 0$, *temos pelo Teorema do Confronto em ambas desigualdades anteriores que* $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$. *Fazendo a mudança de variável* $t = \frac{1}{x}$, *o limite se reescreve como*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{t\to\infty} \sin t.$$

Portanto, como pode ser observado graficamente, o valor de $\sin t$ *oscila entre -1 e 1 e não converge para nenhum valor fixo. Assim, o limite não existe.*

Exercício 8 *(a) (*$\Rightarrow$*) Se* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, *temos por definição de limite que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon.$$

E como sabemos da desigualdade vista no Exercício 7 da Lista do Modulo 1, $||f(x)| - 0| \leq |f(x)|$. *Assim, obtemos por definição de limite que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - 0| \leq |f(x)| < \epsilon,$$

isto é, $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

($\Leftarrow$*) Se* $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, *logo* $\lim_{x\to a} -|f(x)| = 0$. *Temos também que, desde que* $|f(x)| \leq |f(x)|$ *logo*

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \ \forall x \in \mathrm{Dom} f.$$

Assim, pelo Teorema do Confronto, obtém-se que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(b) ($\Rightarrow$) *Se* $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$, *então pela ida do item (a) vamos ter que* $\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h)}{h}\right| = 0$. *E como* $\left|\frac{f(h)}{h}\right| = \left|\frac{f(h)}{|h|}\right|$, *vamos ter que* $\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h)}{|h|}\right| = 0$. *Mas pela recíproca do item (a), isto implica que* $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{|h|} = 0$.

($\Leftarrow$) *Se* $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{|h|} = 0$, *temos pela ida do item (a) que* $\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h)}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(h)}{|h|}\right| = 0$. *E pela recíproca do item (a) obtém-se que* $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

Exercício 9 *Note que para todo* $x \in \mathbb{R}$ *vale*

$$-\sqrt{x^3 + x^2} \leq \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} \leq \sqrt{x^3 + x^2},$$

e como $\lim_{x\to 0} \pm\sqrt{x^3 + x^2} = 0$, *concluímos pelo Teorema do Confronto que*

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0.$$

Exercício 10 *Essa questão é parecida com a 5, portanto, para saber se* $\lim_{x\to 4} f(x)$ *pode ser encontrada pelo Teorema do Confronto geradas pelas funções que a limitam, o* $\lim_{x\to 4} 4x - 9$ *tem que ser igual ao* $\lim_{x\to 4} x^2 - 4x + 7$. *Pelo* $\lim_{x\to 4} 4x - 9 = 4 \cdot 4 - 9 = 7$ *e* $\lim_{x\to 4} x^2 - 4x + 7 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 7 = 16 - 16 + 7 = 7$ *serem iguais, então o* $\lim_{x\to 4} f(x) = 7$, *de acordo com o teorema.*

Exercício 11 *(a)* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)\cdot\cos(2x)}$, *então pelo limite trigonométrico fundamental* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ *temos que* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}}{\sin(3x)\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x\cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3\cos(2x)}$. *Pelo* $\lim_{x\to 0} \cos(2x) = 1$, *determinamos que* $\lim_{x\to 0} \frac{2}{3\cos(2x)} = \frac{2}{3}$.

(b) $\lim_{x\to 0}(1 - x)\tan(\frac{\pi x}{2}) = \lim_{x\to 0}(1 - x)\frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$. *Como em (a), podemos reescrever o limite como* $\lim_{x\to 0} \frac{\pi x}{2}(1-x)/\cos(\frac{\pi x}{2})$, *e pelo* $\lim_{x\to 0} \cos(\frac{\pi x}{2}) = 1$, *temos* $\lim_{x\to 0}(1-x)\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x^2}{2}$, *e assim determinamos que* $\lim_{x\to 0} \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x^2}{2} = 0$.

(c) Pelo limite trigonométrico fundamental, como em (a), podemos reescrever $\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos(x)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x\cos(x)}{(\sin(2x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x\cos(x)}{(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x\cos(x)}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{4}\right)\frac{1-\cos(x)}{x^2}$. *Agora, lembrando o limite trigonométrico* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, *temos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos(x)}{\sin^2(2x)} = 0.\frac{1}{2} = 0.$$

(d) Pelo limite trigonométrico fundamental, como em (a), podemos reescrever $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin(x)}{x^2-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{x^2}{x}-\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$.

Exercício 12 *(a) Vamos determinar uma variável* $x=\sqrt{2\theta}$*, quando* $\theta \to 0$*,* $x \to 0$*, assim podemos reescrever o limite como* $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\sqrt{2\theta})}{\sqrt{2\theta}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$*, que é o limite trigonométrico fundamental, portanto* $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\sqrt{2\theta})}{\sqrt{2\theta}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(b) *Como o item (b) do exercício 7, sabemos que* $\sin(y)$ *é limitada entre* $[-1,1]$*, e que, quando* $y \to \infty$*, seus valores poderão ser qualquer um que esteja dentro desse intervalo, o que graficamente pode ser observado que não converge a nenhum valor real e, portanto, esse limite não existe.*

(c) *Pelo limite trigonométrico fundamental, como no exercício 11 item (a), podemos reescrever* $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{2x} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$*. Observar que a segunda igualdade pode ser escrita como soma de limites pois cada um dos limites existe.*

(d) *Pelo limite trigonométrico fundamental, como no exercício 11, podemos reescrever* $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(2\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta}{\sin 2\theta}.\frac{1-\cos(\theta)}{2\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos(\theta)}{2\theta}$*. Agora, pelo limite trigonométrico usado no item (c) do exercício 11, o limite se reescreve como* $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(2\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{2}.\frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} = 0.\frac{1}{2} = 0$.

(e) *Pelo* $\lim_{\theta\to 0}\cos(\theta) = 1$ *temos que* $\lim_{\theta\to 0}\theta\cos(\theta) = \lim_{\theta\to 0}\theta = 0$.

Exercício 13 *(a) Denotemos* $f(x) = x^2$*. Devemos provar que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ *arbitrário. Temos que* $|x^2-4| = |(x-2)^2+4(x-2)|$*. Logo, se escolhemos* $\delta = \sqrt{\epsilon+4}-2 > 0$*, e supondo que* $x \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom} f, 0 < |x-2| < \delta$*, obtemos pela desigualdade triangular que*

$$|x^2-4| < \delta^2 + 4\delta = (\delta+2)^2 - 4 = \epsilon.$$

Assim, temos provado que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\epsilon+4}-2 > 0; x \in \mathrm{Dom} f = \mathbb{R}, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \epsilon.$$

Isto significa que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

(b) *Denotemos* $f(x) = 4x+1$*. Devemos provar que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in \mathrm{Dom} f, 0 < |x-(-2)| < \delta \Rightarrow |4x+1-(-7)| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ *arbitrário. Temos que* $|4x+1+7| = |4(x+2)|$*. Logo, se escolhemos* $\delta = \frac{\epsilon}{4} > 0$*, e supondo que* $x \in \mathbb{R} = \mathrm{Dom} f, 0 < |x+2| < \delta$*, obtemos que*

$$|4x+1+7| < 4\delta = \epsilon.$$

Assim, temos provado que

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta = \frac{\epsilon}{4} > 0; x \in \text{Dom}f = \mathbb{R}, 0 < |x-(-2)| < \delta \Rightarrow |4x+1-(-7)| < \epsilon.$$

Isto significa que $\lim_{x\to -2}(4x+1) = -7$.

Exercício 14 *Para que uma função seja contínua em p, o* $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

(a) Temos que $p = 1$ *e que* $f(x) = -3x$, *portanto* $f(1) = -3$. *Agora, provemos que* $\lim_{x\to 1} -3x = -3$. *Seja* $\epsilon > 0$ *arbitrário. Temos que* $|-3x+3| = |-3(x-1)| = 3|x-1|$. *Logo, se escolhemos* $\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$, *e supondo que* $x \in \text{Dom}f, 0 < |x-1| < \delta$, *obtemos que*

$$|-3x+3| < 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = \epsilon.$$

Assim, temos provado que

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0; x \in \text{Dom}f, 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |-3x-(-3)| < \epsilon.$$

Isto significa que $\lim_{x\to 1}(-3x) = -3 = f(1)$. *Portanto,* f *é contínua em* $p = 1$.

(b) Temos que $p = 4$ *e que* $f(x) = \sqrt{x}$, *portanto* $f(4) = 2$. *Agora, provemos que* $\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$. *Seja* $\epsilon > 0$ *arbitrário. Temos que* $|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|}$. *Observemos que para* $\delta = 1$, *se* $0 < |x-4| < \delta = 1$, *então* $3 < x < 5$ *com* $x \neq 4$ *e assim* $\frac{1}{\sqrt{5}+2} < \frac{1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{\sqrt{3}+2}$, *com* $x \neq 4$. *Então* $|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{|x-4|}{\sqrt{3}+2}$ *se* $0 < |x-4| < \delta = 1$. *Assim, escolhendo* $\delta = \min\{1, (\sqrt{3}+2)\epsilon\}$ *e supondo que* $x \in \text{Dom}f, 0 < |x-4| < \delta$, *obtemos que*

$$|\sqrt{x}-2| < \frac{(\sqrt{3}+2)\epsilon}{\sqrt{3}+2} = \epsilon.$$

Assim, temos provado que

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta = \min\{1, (\sqrt{3}+2)\epsilon\}; x \in \text{Dom}f, 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < \epsilon.$$

Isto significa que $\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2 = f(4)$. *Portanto,* f *é contínua em* $p = 4$.

Exercício 15 *a) Colocando z em evidencia no numerador, teremos*

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2+2z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{z(z+2)}{z} = \lim_{z\to 0} z+2 = 2$$

b) Note que $x = 2$ *é raiz do polinômio* $2x^2-6x+4$. *De fato,*

$$2(2)^2 - 6\cdot 2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

Portanto, é possível realizar a seguinte fatoração

$$2x^2 - 6x + 4 = (2-x)\cdot P(x).$$

Aplicando o algoritmo de divisão de polinômios, temos que $p(x) = -2x+2$. *Portanto,* $2x^2-6x+4 = (2-x)(2-2x)$. *Logo,*

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{2-x} = \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2-2x)}{2-x} = \lim_{x\to 2} 2-2x = 2-4 = 2$$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{t-1}{t^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}.$

Exercício 16 *a) Multiplicando* $\frac{\mathrm{sen}(6x)}{2x}$ *por* $\frac{3}{3}$, *teremos*

$$\frac{\mathrm{sen}(6x)}{2x}=3\frac{\mathrm{sen}(6x)}{6x}.$$

Realizando a seguinte transformação de variáveis, $y=6x$, *teremos*

$$3\frac{\mathrm{sen}(6x)}{6x}=3\frac{\mathrm{sen}(y)}{y}.$$

Note que, quando $x\to 0$, $y\to 0$, *logo,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(6x)}{2x}=\lim_{y\to 0}3\frac{\mathrm{sen}(y)}{y}.$$

Como $\lim_{y\to 0}3=3$ *e* $\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}(y)}{y}=1$, *temos que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(6x)}{2x}=\lim_{y\to 0}3\frac{\mathrm{sen}(y)}{y}=\lim_{y\to 0}3\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}(y)}{y}=3\cdot 1=3$$

b) Multiplicando $\frac{\mathrm{sen}(5x)}{\mathrm{sen}(9x)}$ *por* $\frac{9\cdot 5\cdot x}{9\cdot 5\cdot x}$, *teremos*

$$\frac{5}{9}\cdot\frac{\mathrm{sen}(5x)}{5x}\cdot\frac{9x}{\mathrm{sen}(9x)}.$$

Analogamente ao item a), teremos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(5x)}{\mathrm{sen}(9x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{9}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(5x)}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{9x}{\mathrm{sen}(9x)}=\frac{5}{9}$$

ginitemize

c) Multiplicando $\frac{\cos(x)-1}{x}$ *por* $\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}$, *teremos*

$$\frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}=\frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)}=\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)+1}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=1\cdot 0=0$$

Exercício 17 *a) Multiplicando* $\frac{f(3x)}{x}$ *por* $\frac{3}{3}$, *teremos*

$$\frac{f(3x)}{x}=3\frac{f(3x)}{3x},$$

portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{3x}=3$$

b) Multiplicando $\frac{f(x^2)}{x}$ *por* $\frac{x}{x}$, *teremos*

$$\frac{f(x^2)}{x} = x\frac{f(x^2)}{x^2},$$

portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x} = 0\cdot 1 = 0$$

c) Multiplicando $\frac{f(x^2-1)}{x-1}$ *por* $\frac{x+1}{x+1}$, *teremos*

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)\frac{f(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} x+1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x^2-1} = 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x^2-1},$$

fazendo $u = x^2-1$, *quando* $x\to 1$ *então* $u\to 0$, *portanto*

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x-1} = 2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = 2\cdot 1 = 2.$$

Exercício 18 *a) Como*

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\frac{1}{x},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1\cdot 1 = 1.$$

b) Como

$$\frac{x}{\mathrm{sen}(x)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{sen}(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) Realizando a transformação de variáveis, $y = x-\pi$, *teremos*

$$\frac{\mathrm{sen}(x)}{x-\pi} = \frac{\mathrm{sen}(y+\pi)}{y} = -\frac{\mathrm{sen}(y)}{y}.$$

Note que, quando $x\to\pi$, $y\to 0$, *portanto,*

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} -\frac{\mathrm{sen}(y)}{y} = -1.$$

Exercício 19 *a) Como*

$$\frac{\tan(2x)}{x} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\frac{2}{2x},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x}\frac{2}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos(x)} = 1\cdot 2 = 2.$$

b) Como

$$\frac{7x}{6\,\mathrm{sen}(x)} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}},$$

teremos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{6\,\mathrm{sen}(x)} = \frac{\frac{7}{6}}{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}} = \frac{\frac{7}{6}}{1} = \frac{7}{6}.$$

c) Realizando a transformação de variáveis, $y = x - \frac{\pi}{2}$, *teremos*

$$\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos(y+\frac{\pi}{2})}{y} = -\frac{\mathrm{sen}(y)}{y}.$$

Note que, quando $x \to \frac{\pi}{2}$, $y \to 0$, *portanto,*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} -\frac{\mathrm{sen}(y)}{y} = -1.$$

d) Como $\tan(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$, *teremos*

$$\frac{\cos(x)-\mathrm{sen}(x)}{\tan(x)-1} = \frac{\cos(x)-\mathrm{sen}(x)}{\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}-1} = \frac{\cos(x)-\mathrm{sen}(x)}{\frac{\mathrm{sen}(x)-\cos(x)}{\cos(x)}} = -\cos(x).$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)-\mathrm{sen}(x)}{\tan(x)-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

e) Como $\tan(\pi x) = \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\cos(\pi x)}$, *teremos*

$$\frac{\tan \pi x}{x-2} = \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{(x-2)\cos(\pi x)}$$

Note que, $\lim_{x\to 2}\frac{1}{\cos(\pi x)} = 1$. *Vamos agora, calcular* $\lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{(x-2)}$. *Realizando a transformação de variáveis,* $y = x-2$, *teremos*

$$\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{(x-2)} = \frac{\mathrm{sen}(\pi y - 2\pi)}{(y)} = \frac{\mathrm{sen}(\pi y)}{(y)}.$$

Note que, quando $x \to 2$, $y \to 0$. *Multiplicando por* $\frac{\pi}{\pi}$, *teremos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{(x-2)} = \lim_{y\to 0}\pi\frac{\mathrm{sen}(\pi y)}{\pi y} = \pi.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\tan \pi x}{x-2} = 1\cdot\pi = \pi.$$

f) Note que,

$$\frac{\tan(x-p)}{x^2-p^2} = \frac{\operatorname{sen}(x-p)}{\cos(x-p)}\frac{1}{(x-p)(x+p)} = \frac{\operatorname{sen}(x-p)}{x-p}\frac{1}{\cos(x-p)(x+p)}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to p}\frac{\tan(x-p)}{x^2-p^2} = \lim x \to p\frac{\operatorname{sen}(x-p)}{x-p}\frac{1}{\cos(x-p)(x+p)}.$$

Realizando a mudança de variável $y = x-p$, *teremos*

$$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos(y)}(y+2p) = \frac{1}{2p}$$

g) Realizando a mudança de variável $h = x-p$, *teremos*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(p)}{x-p} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p+h)-\operatorname{sen}(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p)\cos(h)+\cos(p)\operatorname{sen}(h)-\operatorname{sen}(p)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\cos(p) + \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p)}{h}(\cos(h)-1)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\cos(p) + \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p)\operatorname{sen}^2(h)}{h(\cos(h)+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\cos(p) + \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\frac{\operatorname{sen}(h)\operatorname{sen}(p)}{(\cos(h)+1)}\\
&= 1\cdot\cos(p) + 0 = \cos(p).
\end{aligned}$$

h) Pela mesma mudança de variável do item anterior, teremos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(p+h)}{\cos(p+h)} - \frac{\operatorname{sen}(p)}{\cos(p)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p+h)\cos(p)-\cos(p+h)\operatorname{sen}(p)}{h\cos(p+h)\cos p}.$$

Como $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(b)\cos(a)$, *teremos*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(p+h-p)}{h\cos(p+h)\cos(p)} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\frac{1}{\cos(p+h)\cos(p)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(p+h)\cos(p)} = 1\cdot\frac{1}{\cos^2(p)} = \sec^2(x).
\end{aligned}$$

i) Note que,

$$\frac{13^x-8^x}{x} = \frac{13^x-8^x+1-1}{x} = \frac{(13^x-1)-(8^x-1)}{x}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{13^x-8^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(13^x-1)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{(8^x-1)}{x}$$

Utilizando o limite fundamental $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$, *temos que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{13^x-8^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(13^x-1)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{(8^x-1)}{x} = \ln(13)-\ln(8).$$

j) Vamos mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = 0.$$

Como $\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^2}$ *é uma função impar, o resultado segue.*

Como estamos calculando um limite a direita do zero, temos que $x > 0$*, portanto,*

$$0 < \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} < \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \tan(x)\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{\tan(x)}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2,$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x)}{2} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0 \cdot 1 = 0.$$

k) Fazendo a mudança de variável $y = x^2 - x^4$*, temos que, quando* $x \to \infty$, $y \to -\infty$*, portanto*

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x^2 - x^4) = \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{-\pi}{2}.$$

l) Note que,

$$\frac{x^{1/4}-1}{x^{1/5}-1} = \frac{x^{1/4}-1}{x^{1/5}-1}\frac{(1+x^{1/5}+x^{2/5}+x^{3/5}+x^{4/5})}{(1+x^{1/5}+x^{2/5}+x^{3/5}+x^{4/5})} = \frac{1+x^{1/5}+x^{2/5}+x^{3/5}+x^{4/5}}{1+x^{1/4}+x^{1/2}+x^{3/4}}$$

portanto,

$$\lim x \to 1 \frac{x^{1/4}-1}{x^{1/5}-1} = \lim x \to 1 \frac{1+x^{1/5}+x^{2/5}+x^{3/5}+x^{4/5}}{1+x^{1/4}+x^{1/2}+x^{3/4}} = \frac{1+1+1+1+1}{1+1+1+1} = \frac{5}{4}.$$

Exercício 20 *a) Primeiramente, note que*

$$\frac{2\sqrt{x}-6}{x-9} = 2\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}.$$

Agora, multiplique a função a cima por $\frac{(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)}$*, teremos assim,*

$$2\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = 2\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 9} \frac{2\sqrt{x}-6}{x-9} = \lim_{x\to 9} 2\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} 2\frac{1}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) Multiplique a função por $\frac{(5+\sqrt{4+3x})}{(5+\sqrt{4+3x})}$*, teremos,*

$$\frac{(5-\sqrt{4+3x})}{(7-x)} = \frac{(5-\sqrt{4+3x})}{(7-x)}\frac{(5+\sqrt{4+3x})}{(5+\sqrt{4+3x})} = \frac{(25-4-3x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})}$$
$$= \frac{(21-3x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})} = \frac{3(7-x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 7}\frac{(5+\sqrt{4+3x})}{(5+\sqrt{4+3x})}=\lim_{x\to 7}\frac{3(7-x)}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})}=\lim_{x\to 7}\frac{3}{(5+\sqrt{4+3x})}=\frac{3}{5+5}=\frac{3}{10}$$

c) Multiplique a função por $\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))}$, *teremos,*

$$\frac{(1-\cos(x))}{x^2}=\frac{(1+\cos^2(x))}{x^2(1+\cos(x))}=\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\cos(x))}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos(x))}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercício 21 *a) Note que* $x=1$ *é uma raiz comum dos polinomios* x^2-3x+2 *e* x^3-x^2+x-1, *portanto, podemos realizar a seguinte fatoração:*

$$\begin{aligned}x^2-3x+2&=(x-1)(x-2)\\x^3-x^2+x-1&=(x-1)(x^2+1).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{(x^2+1)}=\frac{-1}{2}$$

b) Multiplicando a função por $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ *teremos*

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

c) Multiplicando a função por $\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$ *teremos*

$$\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))}=\frac{x\,\mathrm{sen}(x)(1+\cos(x))}{\mathrm{sen}^2(x)}=\frac{x}{\mathrm{sen}(x)}+\frac{x\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\mathrm{sen}(x)}+\frac{x\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}=1+1=2.$$

d) *Como* $|\mathrm{sen}(\frac{1}{x})| \leq 1$, *logo limitada, e* $\lim_{x\to 0} x = 0$, *teremos*

$$\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) = 0.$$

e) *Multiplicando a função por* $\frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}$, *teremos*

$$\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5})}\frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2x+3-5} = \frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{x}+1)}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5})} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{2+3}+\sqrt{5}}{2(1+1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

f) *Realizando a mudança de variável* $y = x - \pi$, *teremos*

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\mathrm{sen}(x-\pi)}{x-\pi} = \lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}(y)}{y} = 1$$

g) *Como* $(x^n - y^n) = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$, *teremos*

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n - a^n)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{x-a}(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = na^n$$

h) *A derivada é definida pelos seguintes limites:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}.$$

Desta forma, teremos que os items que representam uma derivada são:

b) $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f(x) = x^n$.

Exercício 22 *a)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^{+}2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)+1-(3x+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x+3h+1-3x-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

Exercício 23 *a)*

$$\lim_{x\to p}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{p}}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{p-x}{x\cdot p}\frac{1}{(x-p)}=\lim_{x\to p}\frac{-1}{x\cdot p}=\frac{-1}{p^2}$$

b)

$$\lim_{x\to p}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{p^2}}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{p^2-x^2}{x^2\cdot p^2}\frac{1}{(x-p)}=\lim_{x\to p}-\frac{(x-p)(x+p)}{x^2\cdot p^2}\frac{1}{(x-p)}=-\lim_{x\to p}\frac{(x+p)}{x^2\cdot p^2}=\frac{-2p}{p^4}=\frac{-2}{p^3}$$

c) Considere o limite

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p},$$

considere a seguinte mudança de variável $h=x-p$. *Note que, quando* $x\to p$, $h\to 0$, *portanto teremos que*

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h},$$

provando assim, a igualdade entre os limites. Vamos agora checar a igualdade dos limites a cima para a função $f(x)=x^2$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(p+h)^2-p^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p^{+}2hp+h^2-p^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hp+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2p+h=2p.$$

Por outro lado,

$$\lim x\to p\frac{x^2-p^2}{x-p}=\lim x\to p\frac{(x-p)(x+p)}{x-p}=\lim x\to px+p=2p.$$

d) Estes limites, são a definição de derivada.

Exercício 24 *Se* $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, *etão* $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ *tal que*

$$|x-p|<\delta\implies\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\epsilon.$$

Como $g(x)\neq 0$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\frac{|f(x)|}{|g(x)|}<\epsilon\implies|f(x)|<\epsilon|g(x)|.$$

escolhendo ϵ_0 suficientemente pequeno, isto é, $\epsilon_0<1$, teremos que $\exists\delta_0>0$ tal que

$$|x-p|<\delta\implies|f(x)|<\epsilon|g(x)|<|g(x)|$$

Exercício 25 *a) Se* $\lim_{x\to p} f(x) = L$, *etão* $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ *tal que*

$$|x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para a primeira implicação, basta definir $g(x) = f(x) - L$. *Como* $|g(x) - 0| = |f(x) - L|$, *dado um* $\epsilon > 0$, *o mesmo* δ *do limite anterior servira.*

Para a ultima implicação, basta definir $h(x) = -g(x)$ *e notar que* $|h(x) - 0| = |-g(x)| = |g(x)|$ *e o resultado seguira utilizando o mesmo* δ.

b) Se $\lim_{x\to p} f(x) = L$, *etão* $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ *tal que*

$$|x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Da desigualdade triangular, sabemos que

$$||f(x)| - |L|| \leq ||f(x) - L|| = |f(x) - L|.$$

Desta forma, dado $\epsilon > 0$, *o mesmo* δ *do limite anterior fara com que*

$$|x-p| < \delta \implies ||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \epsilon.$$

O contra exemplo para a volta desta implicação é $\lim_{x\to 0}|3| = |-3| = 3$, *mas* $\lim_{x\to 0} 3 \neq -3$

c) A ida da implicação é exatamente o item b) com $L = 0$, *então nada precisa ser feito. Vamos, agora, demonstrar a volta. Se* $\lim_{x\to p}|f(x)| = 0$, *etão* $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ *tal que*

$$|x-p| < \delta \implies ||f(x)| - 0| < \epsilon.$$

Note que, $||f(x)| - 0| = |f(x)| = |f(x) - 0|$, *portanto,* $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ *tal que*

$$|x-p| < \delta \implies |f(x) - 0| < \epsilon.$$

Exercício 26 *Note que,*

$$|g(x)| \leq x^4 \implies -x^4 \leq g(x) \leq x^4 \implies -x^3 \leq \frac{g(x)}{x} \leq x^3.$$

Como,

$$\lim_{x\to 0} -x^3 = \lim_{x\to 0} x^3 = 0,$$

teremos que, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

Exercício 27 *Note que, fazendo o*

$$\lim_{x \to 0} 0 \leq \lim_{x \to 0} |ax^2 + bx + c| \leq \lim_{x \to 0} |x|^3$$

temos $0 \leq |c| \leq 0$, *pelo teorema do confronto, temos que* $|c| = 0 \Rightarrow c = 0$. *Temos, em seguida, que* $0 \leq |ax^2 + bx| \leq |x|^3$. *Dessa forma, podemos reescrever:*

$$0 \leq |x(ax + b)| \leq |x|^3 \Rightarrow 0 \leq |x||ax + b| \leq |x|^3$$

Como a desigualdade vale $\forall x \in \mathbb{R}$, *considere* $x \neq 0$. *Logo, podemos dividir os dois lados da igualdade por* $|x|$, *obtendo* $0 \leq |ax + b| \leq |x|^2$. *Dessa forma, pelo teorema do confronto em* $x \to 0$, *obtemos que* $b = 0$. *Da mesma forma, conseguimos provar que* $a = 0$. *Note que, mesmo considerando* $x \neq 0$, *ainda podemos fazer* $\lim\limits_{x \to 0}$ *por se tratar de um ponto de acumulação.*

Exercício 28 *(a)* $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

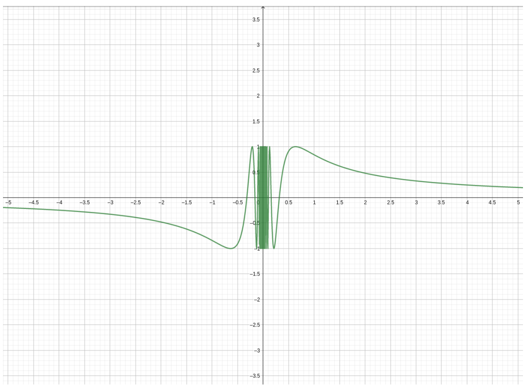


Figura 1: $sen\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) Como $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *e como* $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, *então* $\lim\limits_{x \to 0} x\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

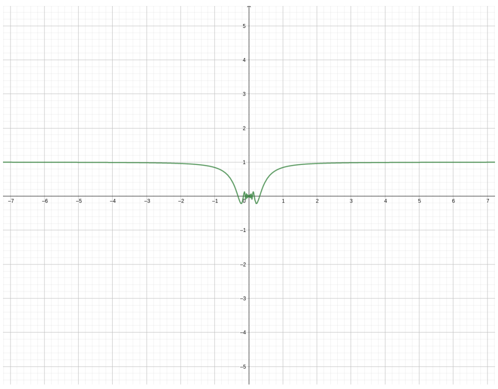


Figura 2: $xsen\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercício 29 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ -1, & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

então $\nexists \lim\limits_{x \to p} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to p} |f(x)| = 1$.

Exercício 30 *Falsa, pois a igualdade dos limites laterais garante apenas a existência do limite* $\lim\limits_{x \to p} f(x)$, *mas não garante a existência de* $f(p)$ *e nem a igualdade* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Tome como contraexemplo $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ *e* $f(0) = 0$.

Exercício 31 *(a) Basta dividir numerador e denominador por* x^4 *e obtemos*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2} = \frac{5}{4}.$$

(b) Basta dividir numerador e denominador por x^4 *e obtemos*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3} = 0.$$

(c) Basta colocar x^2 *em evidência no numerador e* x *em evidência no denominador assim obtemos* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2} = \dfrac{1}{3}$.

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3(1 + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3})}}{\sqrt{x^2(1 + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -1.$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}(1 + x^{\frac{-1}{6}})}{x^2(1 + \frac{3}{x^2})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}})}{x^2(1 + \frac{3}{x^2})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} \left(\dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}}{1 + \frac{3}{x^2}} \right) = 0.$

(f) Racionalizando a expressão temos

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = -\frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}}$$

e obtemos $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = -2 \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = 0.$

Exercício 32 *(a) Basta dividir numerador e denominador por* x *e obtemos*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5 - x}{3 + 2x} = -\frac{1}{2},$$

portanto $y = -\frac{1}{2}$ *é uma assíntota horizontal.*

(b) Escreva $2x - \sqrt{x^2 + 3} = x\big(2 - \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\big)$, *então obtemos* $\lim\limits_{x \to +\infty} x\Big(2 - \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{x}\Big) = +\infty;$

(c) *Racionalizando a expressão obtemos* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1})=\dfrac{1}{2}$, *portanto* $y=\frac{1}{2}$ *é uma assíntota horizontal.*

(d) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{x^2+x}=+\infty$, *portanto* $x=-1$ *é uma assíntota vertical.*

(e) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+1}{x^2+x}=+\infty$, *portanto* $x=0$ *é uma assíntota vertical.*

(f) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x-5}{x^2+3x-4}=-\infty$, *portanto* $x=1$ *é uma assíntota vertical.*

(g) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x-4}=0.$

(h) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x^2-4}{1-x^2}=-\infty$, *portanto* $x=-1$ *é uma assíntota vertical.*

(i) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\text{sen}(x)}{x^3-x^2}=-\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\text{sen}(x)}{x^3-x^2}=\infty$, *portanto* $\nexists\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}(x)}{x^3-x^2}$ *e* $x=0$ *é uma assíntota vertical.*

(j) *Resolvido nos itens anteriores.*

Exercício 33 (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\dfrac{1}{x})=2.$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}4x^4-3x+2=\lim\limits_{x\to+\infty}4x^4=+\infty.$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{5+\dfrac{2}{x}}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}(5+\dfrac{2}{x})}=\sqrt[3]{5}$

Exercício 34 (a) *Basta dividir numerador e denominador por* x^6 *e obtemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-7x+3}{4x^6+x+5}=\frac{1}{2},$$

portanto $y=\frac{1}{2}$ *é uma assíntota horizontal.*

(b) *Basta dividir numerador e denominador por* x^5 *e obtemos*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4+1}{x^5+6x+1}=0,$$

portanto $y=0$ *é uma assíntota horizontal.*

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6x+1}=\dfrac{1}{6}$, *portanto* $y=\frac{1}{6}$ *é uma assíntota horizontal.*

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+6x-1}}{\sqrt{3x^2+4x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, *portanto* $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ *é uma assíntota horizontal.*

(e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+7} = 0$, *portanto* $y = 0$ *é uma assíntota horizontal.*

(f) *Racionalizando para resolver o limite obtemos,*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} = 0,$$

portanto $y = 0$ *é uma assíntota horizontal.*

(g) *Resolvido nos itens anteriores.*

Exercício 35 *Dado* $\epsilon > 0$, *tome* $\delta = \max\{\epsilon^n, 1\}$, *então*

$$x > \delta \Rightarrow x > \epsilon^n \geq 1 \text{ ou } x > 1 \geq \epsilon^n,$$

logo $\sqrt[n]{x} > \epsilon \geq 1$ *ou* $\sqrt[n]{x} > 1 \geq \epsilon$.

Exercício 36 (a) *Racionalizando para resolver o limite obtemos,*

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt[3]{2+3x^3} = -\infty.$$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x-1} + \dfrac{\sqrt{x+3}}{2x-1} = \dfrac{1}{2}$.

(c)

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

Ambos são diferentes pois, na simplificação quando tratamos para $x \to +\infty$ *temos que* $|x| = x$ *e quando* $x \to -\infty$ *temos que* $|x| = -x$. *Assim,* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x} = 1$ *e* $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x} = -1$.

Exercício 37 $\lim_{x\to0^+} \cos x = \cos(0) = 1$. *Como* $-1 \leq \text{sen}(\frac{1}{x}) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *e como* $\lim_{x\to0^+} x = 0$, *então* $\lim_{x\to0^+} x\text{sen}(\dfrac{1}{x}) = 0$.

Nada podemos afirmar a respeito de $\lim_{x\to0^+} \frac{\cos(x)}{x \,\text{sen}\, \frac{1}{x}}$ *com as informações acima.*

Exercício 38 (a) *Seja* $u = x - 3$, *então* $\lim_{x\to3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to0^+} \dfrac{|u|}{u} = 1$.

(b) *Seja* $u = x - 3$, *então* $\lim_{x\to3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to0^-} \dfrac{|u|}{u} = -1$.

(c) *Não existe, basta olhar as alternativas (a) e (b).*

(d) $\lim_{x\to3^+} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3} = \lim_{x\to3^+} \dfrac{(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x\to3^+} x - 3 = 0$.

Exercício 39 *(a)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{2x^3+4x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(2+\dfrac{5}{x}\right)}{x^3\left(2+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0.$

(b) Por definição de limite no infinito, tomando $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ *existe* $\delta > 0$, *com* $\delta > r$ *tal que para todo* $x > \delta > r_1$ *temos*

$$0 - \frac{1}{2} < \frac{2x+5}{2x^3+4x-1} < 0 + \frac{1}{2}.$$

Note que para $x > 0$ *temos* $2x+5 > 0$. *Vamos analisar o sinal do denominador* $2x^3+4x-1$ *que é uma função polinomial não decrescente.*

Para $x = 0$, *temos* $2x^3+4x-1 = -1 < 0$. *Por outro lado, para* $x = 1$ *temos* $2x^3+4x-1 = 5 > 0$. *Do teorema do valor intermediário, existe* $c \in (0,1)$ *tal que* $2c^3+4c-1 = 0$. *Basta tomar* $r = \max\{c, r_1\}$, *pois para todo* $x > r$ *temos*

$$0 < \frac{2x+5}{2x^3+4x-1} < \frac{1}{2}.$$

Observação: *As outras raízes do polinômio* $2x^3+4x-1$ *são complexas.*

Exercício 40 *(a)* $x - \sqrt{x^2+1} = x - \sqrt{x^2+1}\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$ *(Mult. pelo conjugado)*

$= \dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0$

(b) $x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

Sabe-se que:

$\lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x = e^a$

Portanto, como $\ln$ *é uma função contínua em seu domínio*

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = \ln(\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x)$
$= \ln(e^2) = 2.$

(c) Faça a mudança de variáveis $1 - x = u$ *então se* $x \to 1$ *temos* $u \to 0$. *Logo,*

$$(1-x)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = u\mathrm{tg}\left(\frac{\pi(1-u)}{2}\right) = u \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi u}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi u}{2}\right)}.$$

Aplicando as identidades trigonométricas $\text{sen}(a-b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)$ *e* $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$ *obtemos,*

$$u \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)} = u \cdot \frac{\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)}.$$

Perceba que $u \cdot \dfrac{\cos\left(\frac{u\pi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)} = \dfrac{u}{\text{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)} \cdot \cos\left(\dfrac{u\pi}{2}\right) = \left(\dfrac{\text{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right)}{u}\right)^{-1} \cdot \cos\left(\dfrac{u\pi}{2}\right)$.

Multiplicando e dividindo por $\dfrac{\pi}{2}$, *conseguiremos aplicar o limite fundamental do seno, obtemos assim*

$\left(\dfrac{\text{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}}{u \cdot \frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \cdot \cos\left(\dfrac{u\pi}{2}\right)$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\text{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{u\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}}{u \cdot \frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \cdot \cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\pi}.$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2 - \sqrt{x^4+7}) \cdot \frac{x^2+\sqrt{x^4+7}}{x^2+\sqrt{x^4+7}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-7}{x^2\left(1+\sqrt{1+\frac{7}{x^4}}\right)} = 0.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\text{tg}\left(\frac{\pi x^4}{2x^4+3x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\text{tg}\left(\frac{\pi x^4}{x^4(2+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4})}\right) = \lim_{x\to\infty}\text{tg}\left(\frac{\pi}{2+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}\right) = \infty.$

(f) Fazendo a mudança de variável $\dfrac{1}{x} = u$, *temos se* $x \to \infty$ *então* $u \to 0$. *Logo,*

$\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x = (1+2u+u^2)^{\frac{1}{u}} = (1+u)^{\frac{2}{u}}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{2}{u}} = e^2.$$

(g) Primeiramente $x^2\ln\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right) = \ln\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^{x^2}$. *Fazendo,* $\dfrac{3}{x^2} = u$ *vemos que se* $x \to \infty$ *então* $u \to 0$. *Logo,*

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{3}{u}} = \ln(e^3) = 3.$$

(h) Lembre que $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$. *Logo,*

$$\lim_{x\to\infty} \sec\left(\frac{\pi x^3 - 213}{x^3+10x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi x^3-213}{x^3+10x+1}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cos\left(\frac{x^3(\pi+\frac{213}{x^3})}{x^3(1+\frac{10}{x^2}+\frac{1}{x^2})}\right)} = \frac{1}{\cos(\pi)} = -1$$

Exercício 41 *(a.) Falso, pois* $\lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{-10}{2} = -5.$

(b.) Falso, $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)\frac{1-x^3}{1-x^3}}{g(x)\frac{1-x}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{f(x)(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x^3)g(x)(1-x)}}{1-x} = \dfrac{6}{-10}\cdot 3 = \dfrac{-9}{5}.$

(c.) Falso, calculamos o $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(d.) Falso, note que fazendo a mudança de variável $u = x-1$, *temos* $x \to 1$, *logo* $u \to 0$. *Dessa forma,* $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{1-x^3} = \lim_{u\to 0} \dfrac{f(u+1)}{1-(1+u)^3} = 6$. *Agora,*

$$\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{f(x)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{1-x^3}}{\dfrac{1}{1-x^3}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{f(x)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{1-x^3}}{\dfrac{1}{(x-1)(-1-x-x^2)}}.$$

Fazendo a mudança de variável descrita acima, obtemos

$$\lim_{u\to 0} \frac{\dfrac{f(u+1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{u}\right)}{1-(u+1)^3}}{\dfrac{1}{u(-1-(u+1)-(u+1)^2)}} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u+1)}{1-(u+1)^3}\cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u}}\cdot \frac{1}{\dfrac{1}{-1-(1+u)-(1+u)^2}} =$$

$$= (6)\cdot(1)\cdot(-3) = -18.$$

(e.) Verdadeiro.

Exercício 42 $a = -8$, $b = 5$, $c = 14$, $m = 2$, $n = 0$ *e* $p = -2$.

Exercício 43 *(a) Como* f *é limitada em uma vizinhança de* a, *então para pontos* x *próximos de* a *temos para algum* $M > 0$ *que* $|f(x)| \le M$, *ou seja,* $-M \le f(x) \le M$. *Logo, para* x *próximo de* a *segue*

$$-Mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x),$$

e como $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, *obtemos pelo teorema da confronto que* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

(b) *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Para* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < |x - a| < \pi/2$ *segue que*

$$|\cos x - \cos a| = \left| -2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \leq \left|2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|,$$

ou seja,

$$-|x-a| \leq \cos x - \cos a \leq |x-a|.$$

Como $\lim_{x\to a} \pm|x-a| = 0$, *temos pelo teorema do confronto que* $\lim_{x\to a}\big(\cos x - \cos a\big) = 0$, *e portanto* $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$. *Logo, a função* cos *é contínua.*

Exercício 44 *Se* $f(x) = 1$ *e* $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, *então* $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ *e não existe o limite* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Exercício 45 *O erro ocorre quando a indeterminação* $\infty \times 0 = 0$, *o que é um absurdo. (Estratégia de resolução: multiplicar pelo conjugado).*

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - x)\frac{(\sqrt{x^2+x}) + x}{(\sqrt{x^2+x}) + x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 46 (a) *Falso. Tome* $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$ *que é positiva e limitada, e* $g(x) = x$ *na qual* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. *Temos que* $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{|x|+1} = 1$.

(b) *Verdadeira. De* f *limitada temos* $|f(x)| \leq M$, *com* $M \geq 0$. *Em particular,* $-M \leq f(x) \leq M$. *Do fato,* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, *segue que para* $\epsilon + M$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para* $x > \delta$ *temos* $g(x) > \epsilon + M$. *Logo, para* $x > \delta$, *temos*

$$f(x) + g(x) > -M + \epsilon + M = \epsilon.$$

(c) *Falso. Tome por exemplo* $f(x) = c$, $c > 0$ *uma constante, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e* $g(x) = 1/x$ *se* $x \neq 0$ *(para* $x = 0$ *defina* $g(x) = 0$*). Então,* $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} xc = \infty$. *Mas,* $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x\to\infty} c - \dfrac{1}{x} = c$.

Exercício 47 (a) $f(x) = x$ *e* $g(x) = x^2$.

(b) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

(c) $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercício 48 (a) $(-\infty, -1) \cup (-1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$.

(b) $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

(c) $(\frac{3}{2}, \infty)$.

(d) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

(e) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

(f) $(6, 9]$.

Exercício 49 *(a)* $D(f) = [-1, \infty)$ *e* f *é descontínua em* $x = -1$.

(b) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, f *é contínua em todo seu domínio e* $x = -2$ *é uma assíntota vertical.*

Exercício 50 *Sejam* $a \in \operatorname{Dom} h$ *e* $\varepsilon > 0$. *Se* $x \leq 3$, *então* $\exists \delta_f$ *tal que* $a - \delta_f < x < a + \delta_f \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \Rightarrow h(a) - \varepsilon < h(x) < h(a) + \varepsilon$.

Agora, se $x > 3$, *então* $\exists \delta_g$ *tal que* $a - \delta_g < x < a + \delta_g \Rightarrow g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon \Rightarrow h(a) - \varepsilon < h(x) < h(a) + \varepsilon$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, *então* $\forall x \in \mathcal{R}$, $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow h(a) - \varepsilon < h(x) < h(a) + \varepsilon$. *Portanto,* h *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Exercício 51 *Chamando por* $\varphi_1(x) = 3x$, $\varphi_2(x) = Ax + B$ *e* $\varphi_3(x) = -6x$, *sabemos que* f *será contínua em* $\mathbb{R}$ *quando*

$$\begin{cases} \varphi_1(2) = \varphi_2(2) \\ \varphi_2(5) = \varphi_3(5) \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2A + B = 6 \\ 5A + B = -30 \end{cases} \Rightarrow A = -12 \text{ e } B = 30.$$

Exercício 52 *(a) Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0 \\ 1, & se\ x > 0 \end{cases} \qquad e \qquad g(x) = 1 - f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Então, f *e* g *são descontínuas em* $x = 0$, *enquanto que* $f + g$ *é contínua em* $x = 0$.

(b) Considere $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \neq 0 \\ 1, & se\ x = 0 \end{cases} \qquad e \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \neq 0, x \neq 1 \\ 0, & se\ x = 0 \\ 0, & se\ x = 1 \end{cases}.$$

Então, g *é descontínua em* $x_0 = 0$, f *é descontínua em* $g(0) = 1$ *e* $f \circ g = 0$ *é contínua em* $\mathbb{R}$.

(c) *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, *e*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Temos g *descontínua em* $x_0 = 0$, f *contínua em* $g(0) = 1$ *e* $f \circ g = 0$.

Exercício 53 (a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{x^2}{2} - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{(\frac{x}{2} + 1)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{2} + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

(c) *Não existe, pois os limites laterais são diferentes, conforme calculado nos itens acima.*

(d) *Não, pois não existe* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Exercício 54 (a) *Lembre-se que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ *e* $\cos(x)$ *é contínua. Assim,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{x}{\text{sen}(x) - 2x}\right) &= \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{\frac{\text{sen}(x)}{x} - 2}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\text{sen}(x)}{x} - 2}\right) \\ &= \cos(-1). \end{aligned}$$

(b) *Observe que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(3x)}{3x} = 1$ *e* $\text{sen}(x)$ *é contínua. Assim,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \text{sen}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 3x)}{x}\right) &= \lim_{x \to 0} \text{sen}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2})\cos(3x) + \text{sen}(\frac{\pi}{2})\text{sen}(3x)}{x}\right) \\ &= \text{sen}\left(\lim_{x \to 0} \frac{3\cos(\frac{\pi}{2})\cos(3x) + 3\text{sen}(\frac{\pi}{2})\text{sen}(3x)}{3x}\right) \\ &= \text{sen}(3). \end{aligned}$$

Exercício 55 (a) *Falso.*

Contra-exemplo: Defina $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 4 \\ 1, & \text{se } x > 4 \end{cases}$.

Note primeiramente, que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4.$$

Assim, fazendo $y = f(x)$, *obtemos que*

$$\lim_{x\to 2} h(f(x)) = \lim_{y\to 4} h(y) = \lim_{y\to 4} g(y),$$

o qual não existe, pois g *é descontínua em* $x = 4$.

Por outro lado,

$$h(\lim_{x\to 2} f(x)) = h(4) = g(4) = 0.$$

(b) *Falso.*

Contra-exemplo: Defina $g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 2 \\ 1, & se\ x > 2 \end{cases}$.

Assim,

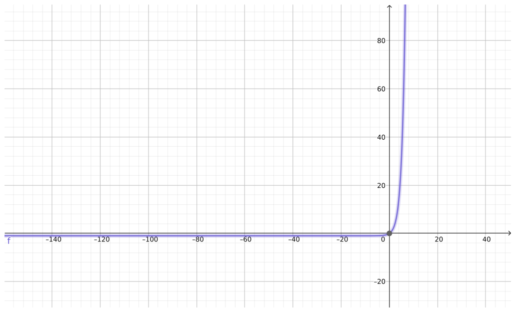
$$f(\lim_{y\to 2} h(y)) = f(\lim_{y\to 2} g(y)),$$

mas não existe $\lim_{y\to 2} g(y)$, *pois* g *é descontínua em 2.*

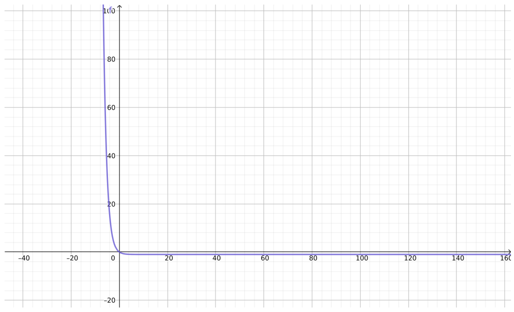
Por outro lado,

$$\lim_{y\to 2} f(h(y)) = \lim_{y\to 2} f(g(y)) = f(0) = 2.$$

Exercício 56 (a)



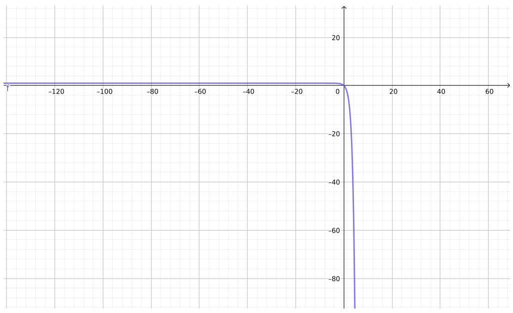
$y = 2^x - 1$



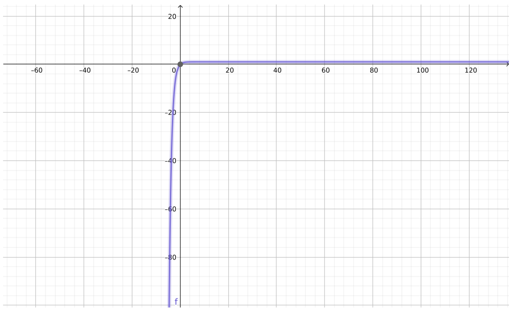
$y = 2^{-x} - 1$

(b) ∞.

(c)



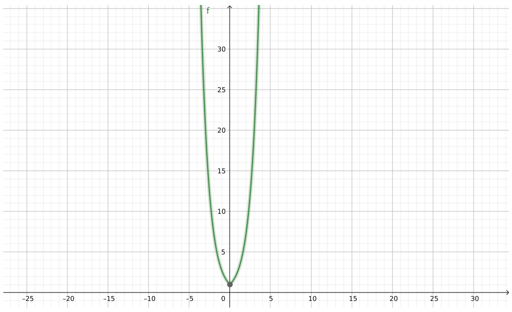
$y = 1 - e^x$



$y = 1 - e^{-x}$

(d) $-\infty$.

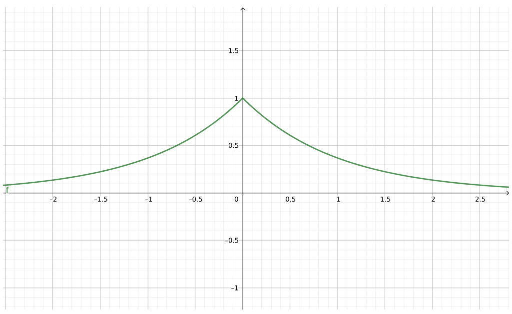
Exercício 57 (a)



$y = e^{|x|}$

$\lim_{x \to \infty} e^{|x|} = \infty$.
$\lim_{x \to -\infty} e^{|x|} = \infty$.
Não possui assíntotas.

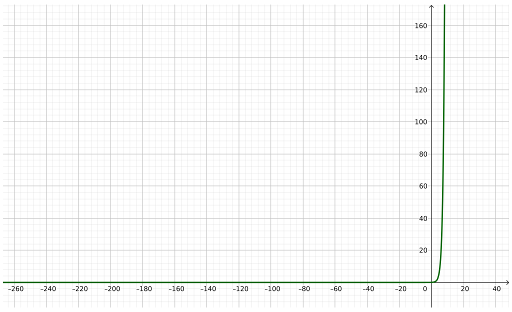
(b)



$y = e^{-|x|}$

$\lim_{x \to \infty} e^{-|x|} = 0$.
$\lim_{x \to -\infty} e^{-|x|} = 0$.
O eixo Ox *é uma assíntota horizontal.*

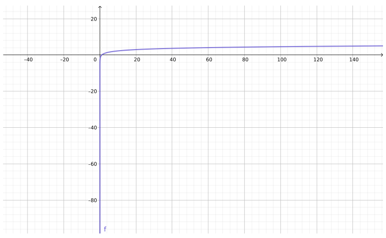
(c)



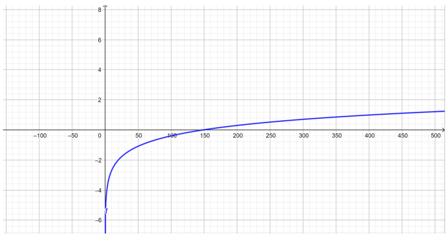
$y = e^{x-3}$

$\lim_{x\to\infty} e^{x-3} = \infty.$
$\lim_{x\to-\infty} e^{x-3} = 0.$
O eixo Ox *é uma assíntota horizontal.*

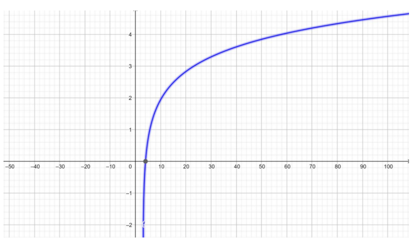
Exercício 58 *Seguem os gráficos para ajudar nas análise dos limites*



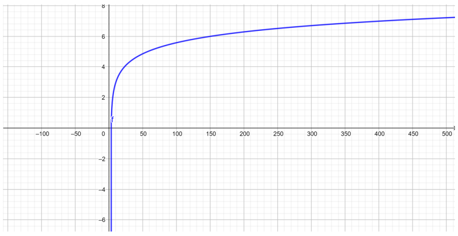
$y = \ln(x)$



$y = \ln(x) - 5$



$y = \ln(x-3)$



$y = 1 + \ln(x-3)$

(a) $-\infty$.
(b) ∞.
(c) ∞.
(d) ∞.
(e) $-\infty$.
(f) $-\infty$.

Exercício 59 (a) *Como* $e^x \neq -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *então* $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
(b) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
(c) *Note que*
$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(1) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
Assim, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
(d) *Note que*
$$e^{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow \ln(e^{1-x^2}) = \ln(1) \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}.$$
Assim, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
(e) *Como* $e^{\cos(x)} \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *então* $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Exercício 60 (a)
$$\ln(sen(\theta)) - \ln\left(\frac{sen(\theta)}{5}\right) = \ln(sen(\theta)) - [\ln(sen(\theta)) - \ln(5)] = \ln(5).$$
(b)
$$\begin{aligned} \ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right) &= \ln((3x)(x-3)) + [\ln(1) - \ln(3x)] \\ &= \ln(3x) + \ln(x-3) - \ln(3x) \\ &= \ln(x-3). \end{aligned}$$
(c)
$$\ln(\sec(\theta)) + \ln(\cos(\theta)) = \ln[(\sec(\theta))(\cos(\theta))] = \ln(1) = 0.$$
(d)
$$\begin{aligned} \ln(8x+4) - 2\ln(2) &= \ln(8x+4) - \ln(2^2) \\ &= \ln\left(\frac{8x+4}{4}\right) \\ &= \ln(2x+1). \end{aligned}$$

Exercício 61 (a)
$$e^{2k} = 4 \Leftrightarrow \ln(e^{2k}) = \ln(4) \Leftrightarrow 2k = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\ln(4) \Leftrightarrow k = \ln(4^{\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow k = \ln(2).$$

(b)
$$100e^{10k} = 200 \Leftrightarrow e^{10k} = 2 \Leftrightarrow 10k = \ln(2) \Leftrightarrow k = \ln(2^{\frac{1}{10}}).$$

(c)
$$e^{\frac{k}{1000}} = a \Leftrightarrow \frac{k}{1000} = \ln(a) \Leftrightarrow k = 1000\ln(a) \Leftrightarrow k = \ln(a^{1000}).$$

(d)
$$e^{5k} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 5k = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}[-\ln(4)] \Leftrightarrow k = -\ln(4^{\frac{1}{5}}).$$

(e)
$$80e^{k} = 1 \Leftrightarrow e^{k} = \frac{1}{80} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{80}\right) \Leftrightarrow k = -\ln(80).$$

(f)
$$e^{\ln(0,8)k} = 0,8 \Leftrightarrow \ln(0,8)k = \ln(0,8) \Leftrightarrow k = 1.$$

Exercício 62 (a)
$$e^{kt} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow kt = -\ln(10) \Leftrightarrow t = -\ln(10^{\frac{1}{k}}).$$

(b)
$$e^{-\frac{1}{100}t} = 1000 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}t = \ln(1000) \Leftrightarrow t = -\ln(1000^{100}).$$

Exercício 63 *Não, pois* $\frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$.

Exercício 64 (a) Teorema do Anulamento: *Se* $y = f(x)$ *é uma função limitada em torno de um ponto* p *e* $\lim_{x\to p} g(x) = 0$*, então* $\lim_{x\to p}(f(x)g(x)) = 0$.

(b) Teorema do Valor Intermediário: *Seja* f *uma função contínua no intervalo fechado* $[a, b]$*. Se* y_0 *é um valor entre* $f(a)$ *e* $f(b)$*, então existe pelo menos um* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = y_0$.

(c) Teorema de Weierstrass: *Seja* f *uma função contínua em* $[a, b]$*. Então, existem números* $x_m, x_M \in [a, b]$*, tais que,* $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$*, para todo* $x \in [a, b]$.

Exercício 65 *(a) Definamos uma função* f *como* $f(x) = x^5 - 4x + 1$*. Notemos que* f *é uma função contínua em todo* $\mathbb{R}$ *e assim em particular é contínua no intervalo* $[1, 2]$*. Além disso, observamos que* $f(1) = -2, f(2) = 25$*, logo* $f(1) < 7.21 < f(2)$*. Portanto, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário, concluindo assim que existe um número real* $x_0 \in]1, 2[$ *tal que* $f(x_0) = 7,21$.

(b) *Seja* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *definida por* $h(x) = f(x) - g(x)$. *Notemos que* h *é contínua pois* f *e* g *o são. Também, tem-se por hipótese que* $h(a) < 0$ *e* $h(b) > 0$. *Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, teremos que existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $h(c) = 0$, *isto é,* $f(c) = g(c)$.

Exercício 66 (a) *Notemos que* f *é uma função contínua em todo* $\mathbb{R}$ *e assim em particular é contínua no intervalo* $[6, 7]$. *Além disso, observamos que* $f(6) = 69, f(7) = 138$, *logo* $f(6) < 100 < f(7)$. *Portanto, segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe* $x_0 \in]6, 7[$ *tal que* $f(x_0) = 100$.

(b) *Seja* f *definida como* $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1$. *Observamos que* $f(0) = 1, f(1) = -4$ *e assim* $f(1) < 0 < f(0)$. *Além disso, a função* f *é contínua em* $[0, 1]$, *por ser uma função polinomial. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe* $c \in]0, 1[$ *tal que f(c)=0. Isto último significa que a equação* $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ *possui, pelo menos, uma raiz no intervalo* $]0, 1[$.

Exercício 67 *Esboce o gráfico da função* f *e observe que* f *tem máximo igual a* $f(0) = 4$ *mas não possui mínimo em* $[-2, 7]$. *Devemos notar que isto não contradiz o Teorema de Weierstrass devido a que a função* f *não é contínua em* $x = 4$ *e para verificar isto basta concluir que os limites laterais não coincidem pois*

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -4$$

e

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2.$$

Exercício 68 *Defina* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por* $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{1 + x^4}$. *Observe que* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e em particular, contínua em* $[0, 1]$. *Além disso,* $f(0) = -1$ *e* $f(1) = \dfrac{1}{2}$, *então* $f(0) < 0 < f(1)$. *Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, tem-se que existe* $c \in]0, 1[$ *tal que* $f(c) = 0$ *e conclui-se da mesma forma que no exibido no exercício 70 (b).*

Exercício 69 (a) *Devido a que a função* f *é contínua em* $[-1, 1]$, *temos pelo Teorema de Weierstrass que existem* $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ *tais que* $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, *para todo* $x \in [-1, 1]$. *Isto quer dizer que* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *são os valores mínimo e máximo de* f, *respectivamente. Verifiquemos que* $f(x_2) = f(1) = 1$. *Com efeito, para qualquer* $x \in [-1, 1]$, *tem-se que* $x^2 + x \le 1 + x^2$ *e dado que* $1 + x^2 > 0$, *obtemos que*

$$\frac{x^2 + x}{1 + x^2} \le 1,$$

para todo $x \in [-1, 1]$. *Portanto,* $f(x) \le 1 = f(1)$, *para todo* $x \in [-1, 1]$ *e assim* $f(x_2) = f(1) = 1$ *é o valor máximo de* f, *pela definição do máximo de uma função.*

(b) *Tínhamos pela parte (a) que* $f(x_1)$ *é o valor mínimo de* f*, com* $x_1 \in [-1,1]$ *como consequência do Teorema de Weierstrass. Por outro lado, observamos que*

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{1+x^2} \geq 0,$$

para todo $x \in [0,1]$ *e*

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{1+x^2} \leq 0,$$

para todo $x \in [-1,0]$.
Portanto, deduzimos que $x_1 \in]-1,0[$*, pois* $f(x_1)$ *é o valor mínimo de* f*,* $f(-1) = f(0) = 0$ *e* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in]-1,0[$*. Assim temos provado que existe* $x_1 \in]-1,0[$ *tal que* $f(x_1)$ *é o valor mínimo de* f.

Exercício 70 *Lembremos a definição de um intervalo.* I *é um intervalo se dados* $a, b \in I$*, para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \leq \lambda \leq b$ *então* $\lambda \in I$.
Agora, denotemos por $J = f(I)$ *a imagem de* f*, onde* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua por hipótese. Devemos provar, por definição de intervalo, que dados* $y_1, y_2 \in J$*, e para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_1 \leq \lambda \leq y_2$*, então* $\lambda \in J$.
Com efeito, é importante observar que se $I = [a,a] = \{a\}$*, logo temos provado automaticamente o requerido. Então, provemos supondo que* I *não é da forma* $I = [a,a]$*. Dados* $y_1, y_2 \in J$ *e suponha que para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tem-se* $y_1 \leq \lambda \leq y_2$*. Como* I *não é da forma* $[a,a]$*, então segue-se que* $y_1 < y_2$*. Por outro lado, como* $y_1, y_2 \in J = f(I)$*, tem-se por definição de imagem de uma função que existem* $x_1, x_2 \in I$ *tais que* $f(x_1) = y_1$ *e* $f(x_2) = y_2$*. Agora, definamos a função* $g(x) := f(x) - \lambda$*. Note que se* λ *for igual á* $f(x_1)$ *ou* $f(x_2)$*, termina a prova. Assim, podemos supor que* $y_1 < \lambda < y_2$*. Observamos que* g *é contínua em* I *e que*

$$g(x_1) = f(x_1) - \lambda = y_1 - \lambda < 0$$

e

$$g(x_2) = f(x_2) - \lambda = y_2 - \lambda > 0.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in]x_1, x_2[$ *tal que* $g(c) = 0$*. Além disso, como* I *é intervalo e* $x_1, x_2 \in I$*, logo* $c \in I$ *e assim*

$$\begin{aligned} 0 &= g(c) \\ &= f(c) - \lambda \end{aligned}$$

o que significa que $\lambda \in J$.

Exercício 71 *Dados* $s, t \in [a,b]$ *com* $s < t$ *devemos provar que* $f(s) < f(t)$*. Por absurdo, suponha que* $f(s) \geq f(t)$*. Logo, por hipótese, devemos ter que* $f(s) > f(t)$*, pois* $s < t$*. Agora, iremos provar que* $f(a) \leq f(s) < f(b)$ *que será de muita utilidade para a prova. Com efeito, se não fosse assim, teríamos que* $f(s) < f(a)$ *ou* $f(s) \geq f(b)$*. Vamos analisar esses casos:*
Caso 1: Se $f(s) < f(a)$*, logo segue-se da hipótese que* $f(s) < f(a) < f(b)$*. Então, como* f

é contínua em $[a, b]$, *tem-se pelo Teorema de Valor Intermediário que existe* $c \in]s, b[$ *tal que* $f(c) = f(a)$. *Mas por hipótese, o último vai implicar que* $c = a$, *e isto em particular implica que* $s < a$, *o que é uma contradição pois* $a \leq s$.
Caso 2: *Se* $f(s) \geq f(b)$, *logo por hipótese vamos ter que* $f(s) \geq f(b) > f(a)$. *Observe que se desprendem dois subcasos:*
- Subcaso 1: Se $f(s) = f(b) > f(a)$, *logo por hipótese teríamos que* $s = b$ *o que é uma contradição pois* $s < t \leq b$.
- Subcaso 2: Se $f(s) > f(b) > f(a)$ *e pela continuidade de* f *em* $[a, b]$, *segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe* $d \in]a, s[$ *tal que* $f(d) = f(b)$. *Mas por hipótese isto vai implicar que* $d = b$ *o que é uma contradição pois* $s < b$.
Assim, temos provado que $f(a) \leq f(s) < f(b)$. *Usando isto vamos ter que*

$$f(t) < f(s) < f(b),$$

e pelo Teorema do Valor Intermediário temos que existe $e \in]t, b[$ *tal que* $f(e) = f(s)$. *Isto por hipótese implica que* $e = s$ *o qual é um absurdo pois* $e < b$. *Portanto, concluímos que dados* $s, t \in [a, b]$, $s < t$ *então* $f(s) < f(t)$, *isto é,* f *é estritamente crescente.*

Exercício 72 *(a)* $Dom(f) = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$.

(b) Observe que composição, soma e produto de funções contínuas é contínua.

(c) Notemos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{7}) < 0$ *e* $f(2) = 16 - \sqrt{10} > 0$. *Temos também que* f *é contínua em* $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. *Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe* $c \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ *tal que* $f(c) = 0$. *Além disso, notamos que* $x = 1$ *é também uma raiz de* f *em* $[1, +\infty[$. *Provemos que a única raiz de* f *em* $[1, +\infty[$ *é 1. Com efeito, se não fosse assim, deve existir um número real* $\tilde{c} \in]1, +\infty[$ *tal que* $f(\tilde{c}) = 1$. *Isto é*

$$0 = 2\tilde{c}^3 - \sqrt{\tilde{c}^2 + 3\tilde{c}},$$

e como $\tilde{c} > 1 > 0$, *vai implicar que*

$$4\tilde{c}^6 = \tilde{c}^2 + 3\tilde{c},$$

e logo, como $\tilde{c} > 0$,

$$4\tilde{c}^5 = \tilde{c} + 3.$$

Fatorando, vamos ter que

$$(\tilde{c} - 1)\left(4\tilde{c}^4 + 4\tilde{c}^3 + 4\tilde{c}^2 + 4\tilde{c} + 3\right) = 0.$$

Mas como $\tilde{c} > 1$, *a equação anterior só pode implicar que* $\tilde{c} = 1$ *o que é um absurdo pelo que tínhamos suposto. Portanto,* f *possui uma única raiz em* $[1, +\infty[$ *e é 1.*

(d) Se $x \in]1, +\infty[$, *então* $3x^2 > 3x$. *Logo*

$$4x^2 > x^2 + 3x.$$

Agora, do exercício 4 da lista do módulo 1 além de que tanto $4x^2$ *como* x^2+3x *são positivos, teremos que*

$$2x > \sqrt{x^2+3x}.$$

Mas como $2x^3 > 2x$ *pois* $x > 1$, *então podemos concluir que*

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{x^2+3x} > 0,$$

para todo $x \in]1, +\infty[$. *De maneira análoga, prova-se que* $f(x) < 0$, $\forall x \in]0, 1[$.

Exercício 73 *Denotemos por* V *a função velocidade. Notemos que* V *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$ *e que* $V(0) = V(2\pi)$. *Agora, definamos* $F(x) = V(x+\pi) - V(x)$. *Observamos que* F *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Mais ainda, temos os seguintes casos.*
<u>Caso 1</u>: Se $F(0) = 0$, *então* $V(\pi) = V(0)$, *o que acaba a prova.*
<u>Caso 2</u>: Se $F(0) > 0$, *então*

$$\begin{aligned} F(\pi) &= V(2\pi) - V(\pi) \\ &= V(0) - V(\pi) \\ &= -F(0) < 0, \end{aligned}$$

assim

$$F(\pi) < 0 < F(0).$$

Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in]0, \pi[$ *tal que* $F(c) = 0$, *isto é,* $V(c + \pi) = V(c)$.
<u>Caso 3</u>: Se $F(0) < 0$, *pode proceder de maneira análoga que no caso 2 e obter pelo Teorema do Valor Intermediário que existe* $\tilde{c} \in]0, \pi[$ *tal que* $V(\tilde{c} + \pi) = V(\tilde{c})$.

Exercício 74 *Denotemos por* f *a função que mede a altura que o alpinista escalou o dia sábado e por* h *a função que mede a altura que escalou no domingo. Além disso, definamos a função* $F(t) = f(t) - h(t)$. *Pelas hipóteses do problema tem-se que* f *e* h *são contínuas em* $[8, 16]$, *e assim* F *é contínua em* $[8, 16]$. *Mais ainda,*

$$\begin{aligned} F(8) &= f(8) - h(8) \\ &= -h(8) < 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F(16) &= f(16) - h(16) \\ &= f(16) > 0. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in]8, 16[$ *tal que* $F(t_0) = 0$. *Isto é,* $f(t_0) = h(t_0)$, *o que mostra que em algum horário* t_0 *no domingo ele estava na mesma altura em que esteve no mesmo horário no sábado.*

Exercício 75 *(a) Uma função* f *tem assíntota vertical* $x = c$ *se*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$

e/ou,

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty.$$

(b) A função f *terá assíntota horizontal* $y = a$ *se* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ *e/ou* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$. *O exercício 42 é um exemplo da existência de uma assíntota horizontal para uma sequência de números reais.*

(c) A reta $y = ax + b$ *é uma assíntota inclinada para* f *se existem*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Esta definição serve para o caso (b) mas não para o caso (a), pela definição de assíntota vertical.

(d) Pelas definições de assíntotas horizontal, vertical e inclinada vistas nos itens anteriores, segue-se que não existem tais assíntotas para este caso.

Exercício 76 *(a)* $e^{\frac{1}{3}}$. *Horizontal* $y = e^{\frac{1}{3}}$

(b) e. *Horizontal* $y = e$.

(c) e^{-6}. *Horizontal* $y = e^-6$.

(d) e^4. *Não define assintota.*

(e) e^4. *Não define assintota.*

(f) e. *Não.*

(g) e^2. *Horizontal* $y = e^2$.

(h) $\frac{2}{3}$. *Não.*

(i) $\frac{1}{\ln(2)}$. *Não.*

(j) 1. *Horizontal* $y = 1$.

(k) $\frac{1}{2}$, *Não.*

(l) -3. *Não.*

(m) $\frac{1}{5}$. *Não.*

(n) 0. *Horizontal* $y = 0$.

(o) $\frac{a}{b}$. *Não.*

Exercício 77 *(a) Não. Suponha que seja verdade que* $e^{x^2} = e^{2x}$. *Então,* $(e^x)^x = e^x e^x$. *Desta forma,*

$$e^{2x}(e^{x(x-2)} - 1) = 0.$$

Tal afirmação é verdadeira somente para $x = 0$ *e* $x = 2$. *Considere* $x = 1$ *e* $e \neq e^2$.

(b) *Uma é função inversa da outra. Justificando, segue que por propriedade de logaritmo* $\log_a(a^x) = x\log_a(a) = x$.

Por outro lado, $a^{\log_a x}$, *temos por definição que* $\log_a x = y$, *ou seja,* $a^y = x$. *Deste modo,* $a^{\log_a x} = a^y = x$.

Exercício 78 *(a)* $\frac{2}{3}$.

(b) 1.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$. *Assíntotas verticais:*$x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. *Assíntotas horizontais:*$y = \ln(2)$.

Exercício 79 *(a)* ∞.

(b) $-\infty$.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) 0.

(e) *Limite não faz sentido.*

(f) $y = 0$ *é reta assíntota horizontal e* $x = 32$ *e* $x = -4$ *são retas assíntotas verticais.*

(g) ∞, *então não tem assíntota.*

Exercício 80 Caso $p < 1$: *Neste caso, teremos* $1 - p > 0$ *e portanto, teremos*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-p}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Caso $p = 1$: *Nesse caso* $1 - p = 0$ *e portanto*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Caso $p > 1$: *Nesse caso* $1 - p < 0$ *e portanto*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-p]}} = \lim_{x\to\infty} x^{p-1} = \infty.$$

Exercício 81 *(a)* $(\cosh(x))^2 = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$ *e* $(\mathrm{senh}(x)) = \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$, *logo*

$$(\cosh(x))^2 - (\mathrm{senh}(x))^2 = \frac{4}{4} = 1.$$

(b) $\cosh(x) + \mathrm{senh}(x) = \dfrac{2e^x}{2} = e^x$ *e* $\cosh(x) - \mathrm{senh}(x) = \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$.

(c) Seja $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. *Então,* $2x = e^y - e^{-y}$. *Dividindo por* e^{-y} *ambos os lados obtemos,* $2xe^y = (e^y)^2 - 1$. *Denote por* $z = e^y$ *e assim* $y = \ln(z)$. *Deste modo,* $2xz = z^2 - 1$. *Calculando por Bhaskara, temos*
$z = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. *Mas* $y = \ln(z)$, *logo* $y_1 = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ *e* $y_2 = \ln(x - \sqrt{x^+1})$, *como* $x - \sqrt{x^2 - 1} < 0$, *a única solução será* $y_1 = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. *Como queríamos provar.*

(d) $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.

$\mathrm{senh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\mathrm{senh}(x)$.

Utilizando os itens anteriores, temos $\tanh(-x) = \dfrac{\mathrm{senh}(-x)}{\cosh(-x)} = \dfrac{-\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$.

(e) $\tanh(x) = \dfrac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *Colocando* e^{-x} *em evidência,*
temos $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

(f) Fazendo $\mathrm{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\mathrm{senh}(y) = 2\dfrac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{4} = \mathrm{senh}(x + y)$. *Para* $\mathrm{senh}(2x)$ *basta aplicar a fórmula anterior.*

(g) Pelo item (e) *temos* $\tanh(x)^2 = \dfrac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}$. *Fazendo* $1 - \tanh(x)^2$, *obtemos*

$$\frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1 - e^{-4x} + 2e^{2x} - 1}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{2^2}{(e^{-x})^2(e^{2x} + 1)^2} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \mathrm{sech}(x)^2.$$

(h) Não há o que escrever.

(i) $\operatorname{senh}(x)$ *no conjunto dos reais. Calculada no item* c.

$\cosh(x)$ *é invertível no intervalo* $[1, +\infty)$. *Com inversa,* $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

$\tanh(x)$ *é invertível em* $(-1, 1)$. *Com inversa,* $\operatorname{arctanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercício 82 (a) $2p$.

(b) $\dfrac{1}{3}$.

(c) $f'(2) = 4$ *e* $f'(\frac{1}{3}) = \dfrac{2}{3}$. *Esses valores são os coeficiente angulares das retas tangente ao gráfico nos pontos* $p = 2$ *e* $p = \frac{1}{3}$.

(d) *Basta trocar* p *por* x.

(e) $a(x) = 6x$.

Exercício 83 (a) *A velocidade instantânea é definida como a derivada temporal da equação horária. Desta forma, teremos que a velocidade instantânea é dada pela seguinte função*

$$v(t) = f'(t) = 112 - 32t.$$

Logo, teremos

$$t = 2 \implies v(2) = 112 - 32 \cdot 2 = 48m/s$$

$$t = 3 \implies v(3) = 112 - 32 \cdot 3 = 16m/s$$

$$t = 4 \implies v(4) = 112 - 32 \cdot 4 = -16m/s$$

(b) *O ponto de máximo sera dado quando a derivada da função for nula, isto é*

$$v(t) = 112 - 32t = 0 \implies t = \frac{112}{32} = 3,5s$$

(c) *O objeto atinge o chão quando*

$$f(t) = 112t - 16t^2 = 0.$$

Resolvendo a equação a cima, teremos $t = 0set = 7s$. *Como* $t = 0s$ *é o início do movimento, o objeto toca o chão em* $t = 7s$.

(d) *Em* $t = 7$, *teremos*

$$v(7) = 112 - 32 \cdot 7 = 112m/s.$$

Exercício 84 (a) $y = 5x + 4$ *e* $y = 5x + 4$.

(b) $(0, 100)$ *não é ponto do gráfico e* $y = x + 1$.

(c) $y = x$.

Exercício 85 (a) *A reta tangente ser horizontal significa que o seu coeficiente angular é zero, isto é,*

$$y'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

Resolvendo a equação a cima, teremos $x = \frac{2}{3}$ *e* $x = -2$.

(b) *Podemos calcular o coeficiente angular da reta* $2y + 8x - 5$ *como*

$$y' = \left(-4x + \frac{5}{2}\right)' = -4$$

Portanto, queremos encontrar os x *que são soluções para a equação*

$$3x^2 + 4x - 4 = -4 \implies 3x^2 + 4x = 0$$

Logo $x = 0$ *e* $x = \frac{-4}{3}$.

Exercício 86 (a) *Para que as curvas sejam tangentes no ponto* $(1, 0)$, *precisamos, primeiramente, que elas passem pelo ponto* $(1, 0)$. *Assim sendo, temos que*

$$\begin{aligned} 0 = 1^2 + A \cdot 1 + B &\implies B = -1 - A \\ 0 = C \cdot 1 - 1^2 &\implies C = 1 \end{aligned}$$

Em segundo lugar, precisamos que suas retas tangentes a esse ponto possuam o mesmo coeficiente angular, isto é,

$$\left(x^2 + Ax - B\right)'(1) = \left(X - X^2\right)'(1),$$

e portanto

$$2 \cdot 1 + A = -2 \cdot 1 \implies A = -4$$

$A = -4$, $B = 3$ *e* $C = 1$.

(b) *Em primeiro lugar, note que*

$$y' = 3x^2 - 4x,$$

desta forma

$$y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4.$$

Sendo a derivada da função no ponto $x = 2$ *o coeficiente angular da reta tangente neste ponto, teremos* $y = 4x - 4$.

Para a reta normal teremos $y = \frac{-1}{4}x + \frac{9}{2}$.