Lista de Exercícios de SMA353-Cálculo I – Módulo 1

Exercício 1 *Em cada um dos itens abaixo responda se a afirmação é* **verdadeira (V)** *ou* **falsa (F)**. *Justifique sua resposta, isto é, no caso de ser verdadeira esboce as ideias de uma demonstração e se for falsa dê um contra-exemplo:*

( ) *Cada ponto da reta* $\mathbb{R}$ *pode ser representado por uma dízima periódica.*

( ) *Se* $x \geq 0$ *e* $x \leq 0$, *então* $x = 0$.

( ) *Se* $z \in \mathbb{N}$ *e* $x < y$, *então* $x\,z < y\,z$.

( ) *Se* $z \in \mathbb{R}$ *e* $x \leq y$, *então* $x\,z \leq y\,z$.

( ) $\sqrt{x^2} = x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

( ) *Se* $x > y$, *então* $|x - y| = x - y$.

( ) *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$, *temos que* $|x + y| = |x| + |y|$.

( ) *Se* a *e* b *são números irracionais então* $a + b$ *também será um número irracional.*

( ) *Se* a *e* b *são números irracionais então* $a \cdot b$ *também será um número irracional.*

( ) *Se* a *e* b *são números racionais então* $a + b$ *também será um número racional.*

( ) *Se* a *e* b *são números racionais então* $a \cdot b$ *também será um número racional.*

( ) *Se* a *é um número racional e* b *é um número irracional então* $a + b$ *é um número irracional.*

( ) *Se* a *é um número racional e* b *é um número irracional então* $a \cdot b$ *é um número racional.*

( ) *Se* a *é um número racional e* b *é um número irracional então* $a \cdot b$ *é um número irracional.*

( ) *Se* $(a\,,b)$ *são as coordenadas cartesianas de um ponto que pertence a uma reta que tem coeficiente angular* $\dfrac{3}{2}$, *então o ponto* $(a + 2\,, b + 3)$ *também pertencerá a esta reta.*

( ) *Se duas retas são perpendiculares e nenhuma delas é paralela ao eixo* Oy, *então o produto de seus coeficientes angulares é* -1.

( ) *A reta que contém os pontos* $(1\,,-1)$ *e* $(2\,,2)$ *é paralela à reta de equação* $x - 3\,y = 7$.

( ) *A representação geométrica do gráfico da função* $y = x^2 + 1$ *é simétrico em relação ao eixo dos* Ox.

( ) *A representação geométrica do gráfico da equação* $x^2 - y^2 = 1$ *é simétrico em relação à reta* $y = x$.

( ) *A representação geométrica do gráfico da função* $y = x^2 + 1$ *é uma parábola.*

( ) *O maior diâmetro da elipse* $2\,x^2 + y^2 = 2$ *ocorre na direção horizontal.*

( ) *O vértice da parábola* $y = 2 - x^2$ *é ponto* $(0\,,2)$.

( ) *O domínio da função* f, *cuja lei de associação é* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2 - x}}$, *é o intervalo* $[0\,,2)$.

( ) *A imagem da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por* $f(x) = 4 - x^2$, *para* $x \in \mathbb{R}$, *é o intervalo* $(-\infty\,,4]$.

( ) *O subconjunto do plano* $\left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ ,\ x^2 + y^2 = 1\,,\ \text{com } y \geq 0\right\}$ *é a representação geométrica do gráfico de uma função da variável* x.

( ) *A imagem da função* $f:\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, *dada por* $f(x)=\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, *para* $x\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *é toda a reta* $\mathbb{R}$.

( ) *A equação* $\text{sen}(2x)=2$, *para* $x\in\mathbb{R}$, *é satisfeita para infinitos valores distintos de* x.

( ) *A equação* $[\text{sen}(x)+\cos(x)]^2-1=\text{sen}(2x)$ *é válida para todo* $x\in\mathbb{R}$.

( ) $\sqrt{4}=\pm 2$.

( ) $\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}$.

( ) $\frac{A.B}{C}=\frac{A}{C}.\frac{B}{C}$

( ) $\frac{A}{B+C}=\frac{A}{B}+\frac{A}{C}$

( ) $x^2=4$ *implica que* $x=\pm 2$.

Exercício 2 O número $x=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+2\sqrt{2}$ é racional ou irracional? Justifique sua resposta.

Exercício 3 A divisão áurea de um segmento de comprimento l é a divisão deste em duas partes na qual a menor está para a maior assim como a maior está para o todo, ou seja, a razão entre a parte menor e a maior é igual a razão entre a maior e o todo. Se l é racional, deduza que as partes (da divisão áurea) são irracionais. Se l é irracional, é possível deduzir algo? **Sugestão:** Fórmula de Báskara.

Exercício 4 (a) Se $x\geq 0$ e $x\leq y$, mostre que $x^2\leq y^2$.

(b) Mostre que a afirmação anterior é falsa se considerarmos x, y quaisquer números reais.
(c) Se $0\leq x\leq y$, justifique se $\sqrt{x}\leq\sqrt{y}$.

Exercício 5 Mostre que quaisquer que sejam os números reais x e y, temos que

$$x^3<y^3 \text{ se e somente se } x<y.$$

Exercício 6 Seja $a\in(0,1)$. Determine $r>0$ de modo que $(a-r,a+r)\subset(0,1)$.

Exercício 7 Sabemos que para todo a,b real tem-se $|a+b|\leq|a|+|b|$. Como consequência deste fato mostre que $||a|-|b||\leq|a-b|$ e que $|\,|a|-|b|\,|\geq|a|-|b|$.

Exercício 8 Dê exemplo de números reais a e b tais que $|a+b|<|a|+|b|$. O que se pode dizer a respeito dos sinais desses números?

Exercício 9 *Encontre o conjunto solução,* **fornecendo suas respostas na forma de intervalos**, *para as seguintes desigualdades:*

a) $|1-3x|<5$ b) $\left|x^2+3\right|>3$ c) $x^2<9$

d) $x^2>-1$ e) $x^2<6x-5$ f) $x^3>27$

g) $\dfrac{x-6}{x+2}\geq 0$ h) $\dfrac{(x+2)(x-3)}{x\left(x^2+1\right)}<0$ i) $\dfrac{8}{x}<x-2$

j) $\dfrac{3}{x-2}<\dfrac{1}{2x+1}$ k) $\dfrac{x^2}{x-2}-1\geq\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$ l) $x^2+2x+2>0$

m) **Forneça uma função cujo domínio seja a resposta da letra f)**

Exercício 10 *Determine a equação geral das retas do plano* xOy*:*
a) que possua coeficiente angular -2 *e que contém o ponto* $(3,-1)$.
b) perpendicular à reta do plano xOy*, que tem equação geral dada por* $5x-2y=2$ *e que contém o ponto* $(-2,3)$.
c) tangente a circunferência que tem centro no ponto $(0,0)$ *e raio* 1*, no ponto* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercício 11
a) Encontre a distância do ponto $(1,-2)$ *à reta do plano* xOy*, que tem equação geral dada por* $3x-2y=0$.
b) Mostre que o segmento de reta ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralelo ao terceiro lado e tem a metade do comprimento deste.

Exercício 12 *Encontre a representação geométrica do gráfico de cada um dos conjuntos soluções das seguintes equações ou inequações:*

a) $x^2+y^2-6x+8y=0$ b) $x^2+y^2-10y+25=0$ c) $x^2+y^2<1$

d) $x^2+y^2\geq 1$ e) $x=-\sqrt{1-y^2}$ f) $x^2+y^2<-1$

Exercício 13 *Um canhão é colocado na origem de um sistema de coordenadas* xOy*. Suponha que as coordenadas de um projétil atirado pelo canhão satisfaz as seguintes equações* $x=50t$ *metros e* $y=50t-t^2$ *metros, depois de* $\underline{t}$ *segundos do lançamento. Mostre que a trajetória do projétil é uma parábola. A que distância do canhão o projétil vai atingir o chão? Qual a altura máxima que o projétil atingirá após o disparo do canhão?*

Exercício 14 *Determine os vértices e o eixo de cada uma das parábolas abaixo e encontre as respectivas representações geométricas (gráficos):*

a) $y^2=x$ b) $y=-x^2$ c) $y^2-4x-4y=0$

Exercício 15 *Classifique as funções abaixo em* constante, afim, polinomial, racional, qualquer*:*

a) $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2$, *para* $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = x^{-3}$, *para* $x \in \mathbb{R}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^2+3}{x^2+1}$, *para* $x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = 3 - 2x$, *para* $x \in \mathbb{R}$ e) $f(x) = c$, *para* $x \in \mathbb{R}$ f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$, *para* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Exercício 16
a) Existe alguma simetria na representação geométrica do gráfico de uma função par? Qual? e da representação do gráfico de uma função ímpar?
b) Mostre que dada uma funcão $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, podemos encontrar uma função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, que é uma função par, e uma função* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, que é uma função ímpar, tal que* $f(x) = g(x) + h(x)$*, para* $x \in \mathbb{R}$*.*
c) Quais das seguintes funções abaixo são pares e quais são ímpares:

a) $f(x) = x^3$, *para* $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = |x|$, *para* $x \in \mathbb{R}$ c) $f(x) = x\left(x^3 - x\right)$, *para* $x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = x^4 + x^2$, *para* $x \in \mathbb{R}$ e) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ f) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, *para* $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercício 17 *Consideremos as funções* $[x] =$ *maior inteiro menor ou igual a* $\underline{x}$ *e* $\{x\} =$ *distância de* $\underline{x}$ *ao inteiro mais próximo. Encontre a representação geométrica do gráfico das seguintes funções:*

a) $f(x) = \{x\}$, *para* $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = [x]$, *para* $x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = x - [x]$, *para* $x \in \mathbb{R}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{4}\{4x\}$, *para* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Exercício 18 *Verifique quais das funções abaixo são periódicas e nos casos em que forem periódicas encontrar o seu período fundamental:*

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, *para* $x \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(\pi x)$, *para* $x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = [x]$, *para* $x \in \mathbb{R}$ d) $f(x) = 3\cos(x+2)$, *para* $x \in \mathbb{R}$

Exercício 19
1) Converta de graus para radianos:

a) 15^o b) 105^o c) 135^o d) 630^o

2) Converta de radianos para graus:

a) $\dfrac{5\pi}{3}$ b) $\dfrac{7\pi}{15}$ c) $\dfrac{25\pi}{3}$ d) $\dfrac{\pi}{5}$

Exercício 20 *Um ponto se move de tal modo que a razão de suas distâncias a dois pontos fixos é uma constante* $c \neq 1$*. Mostre que o lugar geométrico desses pontos é uma circunferência.*

Exercício 21
a) Calcule a área da região limitadado plano xOy, *delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das curvas* $y = 3x$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$ *e* $y = 0$.
b) Se $h \neq 0$, *calcule o valor do quociente* $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *para as seguintes funções:*

$$\text{i)}\ f(x) = x^2 + x\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{ii)}\ f(x) = 3x + 5\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}$$
$$\text{iii)}\ f(x) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{iv)}\ f(x) = x^3\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}$$

Exercício 22
a) Quando uma função é injetora? Como caraterizar a injetividade de uma função analisando a representação geométrica do seu gráfico?
b) Quando uma função é sobrejetora? Como caraterizar a sobrejetividade de uma função analisando a representação geométrica do seu gráfico?
c) Quando uma função é bijetora? Como caraterizar a bijetividade de uma função analisando a representação geométrica do seu gráfico?

Exercício 23 *Em cada um dos itens abaixo diga se a função é* *injetora* , *sobrejetora*, *bijetora:*

$$\text{a)}\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \textit{dada por}\ f(x) = 5x + 1\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}$$
$$\text{b)}\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \textit{dada por}\ f(x) = x^2 + 4\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}$$
$$\text{c)}\ f : \left[0\,, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1\,,1]\,,\ \textit{dada por}\ f(x) = \cos(x)\,,\ \textit{para}\ x \in \left[0\,, \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\text{d)}\ f : [0, \infty) \to [4\,, \infty)\,,\ \textit{dada por}\ f(x) = x^2 + 4\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}$$
$$\text{e)}\ f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\,,\ \textit{dada por}\ f(x) = \operatorname{tg}(x)\,,\ \textit{para}\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\text{g)}\ f : [0\,, \infty) \to \mathbb{R}\,,\ \textit{dada por}\ f(x) = x^2 + 4\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R}$$

Exercício 24
a) Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ *uma função que admite função inversa. Então* f^{-1} *é igual a* $\dfrac{1}{f}$*? justifique sua resposta.*
b) Quais as funções do Exercício 23. admitem função inversa? quando admitir, encontrar a lei de associação da função inversa.

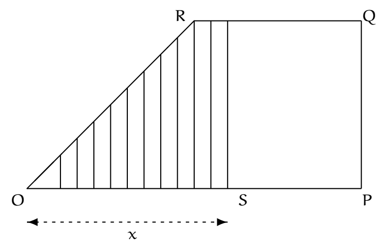
Exercício 25 *Durante uma noite um homem de* $1,80$ *metros de altura estava parado, ao nível da rua, perto de um poste de iluminação de* $4,50$ *metros que está aceso. Exprima o comprimento de sua sombra como função da distância que ele está do poste.*

Exercício 26 *Dois homens saem, no mesmo instante, numa caminhada do mesmo ponto por caminhos retilíneos e perpendiculares. Um anda a velocidade de* $2\,\mathrm{km/h}$ *e o outro a* $3\,\mathrm{km/h}$. *Exprima a distância entre eles como função do tempo que eles caminharam.*

Exercício 27 *Um reservatório contém um líquido, não homogêneo, em equilíbrio, e cuja densidade aumenta linearmente com a profundidade,* $\underline{h}$*, valendo* ρ_o *na superfície e* ρ_1 *no fundo do reservatório. Encontre a função que descreve a densidade do líquido* ρ*, em função da profundidade* $\underline{h}$ *(isto é,* $\rho = \rho(h)$*).*

Exercício 28 *Um objeto é lançado, verticalmente, e sabe-se que no instante* $\underline{t}$ *segundos, sua altura é dada por* $h(t) = 4\,t - t^2$ *quilómetros, para* $t \in [0\,,4]$.
a) Encontre a representação geométrica do gráfico da função $h = h(t)$.
b) Qual é a altura máxima atingida pelo objeto? Em que instante essa altura é atingida?

Exercício 29
Na figura ao lado, OPQR *é um trapézio tal que* $\overline{OP} = 10$ *cm,* $\overline{PQ} = \overline{QR} = 5$ *cm. A partir de um ponto* S*, pertencente ao lado* OP*, traça-se uma perpendicular a esse lado. Sendo* $\overline{OS} = x$*, a área* A *da região sombreada na figura ao lado pode ser obtida como uma função de* $\underline{x}$*, isto é,* $A = A(x)$*. Encontre essa função.*

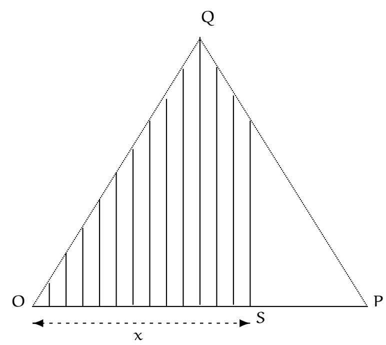


Exercício 30 *Entre os retângulos de perímetro (isto é, soma dos lados)* $2p$ *qual terá maior área?*

Exercício 31 *Um arame de* $10\,\text{cm}$ *de comprimento deve ser cortado em dois pedaços, um dois quais será torcido de modo a formar um quadrado, e o outro, a formar uma circunferência. De que modo deverá ser cortado o fio para que a soma das áreas das regiões limitadas pelo quadrado e pela circunferência acima seja a maior possível?*

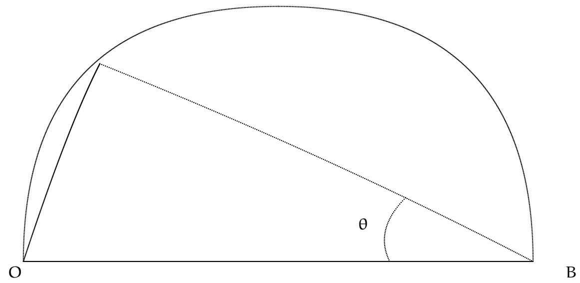
Exercício 32

Na figura ao lado, OPQ *úm triângulo isósceles cuja base,* OP*, mede* $10\,\text{cm}$ *e cuja altura, relativa à base* OP*, também mede* $10\,\text{cm}$*. A partir de um ponto* S*, pertencente ao lado* OP*, traça-se uma perpendicular a esse lado. Sendo* $\overline{OS} = x$*, a área da região sombreada ao lado pode ser descrita como uma função de* $\underline{x}$*, isto é,* $A = A(x)$*. Encontre a função* $A = A(x)$*.*



Exercício 33

Na figura ao lado está representada uma semi-circunferência cujo diâmetro, OB*, tem valor igual à* $b > 0$*. A cada valor do ângulo* θ *(como na figura) corresponde um, e somente um, triângulo retângulo inscrito na semi-circunferência. Encontre a função* $A = A(\theta)$ *que nos fornece a área do triângulo obtido quando o ângulo é* θ*.*



Exercício 34 *Em cada um dos itens abaixo determine os domínios máximos de* f *e* g*. Determine também as imagens de* f *e* g*. Verifique se a imagem de* f *está contida no domínio de* g *e, neste caso, encontre* $h = g \circ f$*. Encontre também a imagem de* h*.*

(a) $g(x) = 3x + 1$ *e* $f(x) = x + 2$

(b) $g(x) = 2 + x^2$ *e* $f(x) = \sqrt{x}$

(c) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *e* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(d) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ *e* $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $g(x) = 1 - x^2$ *e* $f(x) = \sin x$

(f) $g(x) = x^3$ *e* $f(x) = \sqrt{x}$

(g) $g(x) = \ln(x)$ *e* $f(x) = 1 - x^2$

(h) $g(x) = e^x$ *e* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(i) Qual a definição do domínio de $h = g \circ f$*?*

(j) Qual o domínio de $h = g \circ f$ *nos itens de (a) até (g)?*

Exercício 35 *Se* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *são ambas pares, verifique que* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são funções pares. Mostre também que, se* f *e* g *são ambas ímpares, então* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são ímpares. O que se pode dizer das composições* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *se* f *for par e* g *for ímpar?*

Exercício 36 *Para cada uma das funções* g *dadas abaixo, encontre* f *tal que* $f(g(x)) = x$*, para todo* $x \in D_g$*.*

(a) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *e* $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$

(b) $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$ *e* $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\}$

(c) $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ *e* $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\}$

(d) $g(x) = x^2 - 2x$ *e* $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$

(e) $g(x) = x^2 - 4x + 3$ *e* $D_g = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$

Exercício 37 *Expresse a área e o perímetro de um triângulo equilátero em função do comprimento* x *do triângulo.*

Exercício 38 *Expresse o comprimento da aresta de um cubo em função do comprimento da diagonal* d. *Depois, expresse a área da superfície e o volume do cubo em função do comprimento da diagonal.*

Exercício 39 *Para que uma curva seja simétrica em relação ao eixo* x, *o ponto* (x, y) *deverá estar na curva se, e somente se, o ponto* $(x, -y)$ *também estiver na curva. Explique por que uma curva simétrica em relação ao eixo* x *não é o gráfico de uma função a não ser que a função seja* $y = 0$.

Atualizado em 29-03-2022

Gabarito da Lista de Exercícios de SMA353-Cálculo I – Módulo 1

Exercício 1 *(F) Os irracionais correspondem a dízimas não periódicas.*

(V) Por absurdo com $x \neq 0$.

(F) Para $z = 0 \in \mathbb{N}$.

(F) Para $z = -1$.

(F) Temos $\sqrt{x^2} = |x|$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(V) Por definição, $\begin{cases} |x-y| = x-y & \text{se } x-y>0, \text{ que é, } x>y. \\ |x-y| = y-x & \text{se } x-y<0, \text{ que é, } x<y. \end{cases}$

(F) Note que para números de mesmo sinal, $x < 0$ *e* $y < 0$ *ou* $x > 0$ *e* $y > 0$, *essa afirmação é verdadeira:*

se $x > 0$ *e* $y > 0$ *temos que* $x + y > 0$ *assim,* $|x+y| = (x+y) = x+y = (x)+(y) = |x|+|y|$
se $x < 0$ *e* $y < 0$ *temos que* $x + y < 0$ *assim,* $|x+y| = -(x+y) = -(x)+-(y) = |x|+|y|$.

Porém, para números de sinal contrario, $x < 0$ *e* $y > 0$ *ou* $x > 0$ *e* $y < 0$, *essa afirmação não ocorre:*

$$\begin{array}{lll} \text{se } x>0 \text{ e } y<0: & \text{se } x+y>0: & |x+y| = (x+y) \neq (x)-(y) = |x|+|y| \\ & \text{se } x+y<0: & |x+y| = -(x+y) \neq (x)-(y) = |x|+|y| \\ \text{se } x<0 \text{ e } y>0: & \text{se } x+y>0: & |x+y| = (x+y) \neq -(x)+(y) = |x|+|y| \\ & \text{se } x+y<0: & |x+y| = -(x+y) \neq -(x)+(y) = |x|+|y| \end{array}$$

Exemplo disso é a dupla $x = -3$ *e* $y = 1$, *onde* $|-3+1| = |-2| = 2 \neq 4 = 3+1 = |-3|+|1|$.

(F) Note que $a = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$ *e* $b = 1 - \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, *então* $a + b \in \mathbb{Q}$.

(F) Para $a = b = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, *temos* $a.b \in \mathbb{Q}$.

(V) Sejam $a = \frac{m}{n}$ *e* $b = \frac{k}{l}$ *com* $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$, *então*

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl} \in \mathbb{Q}.$$

Já que $ml + kn \in \mathbb{Z}$.

(V) Analogamente ao anterior sejam $a = \frac{m}{n}$ *e* $b = \frac{k}{l}$ *com* $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$, *então*

$$a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl} \in \mathbb{Q}.$$

Já que mk *e* $nl \in \mathbb{Z}$.

(V) Sejam $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *e* $b \in \mathbb{I}$, *suponha* $a + b \in \mathbb{Q}$. *Então*

$$a + b = \frac{l}{k} = b + \frac{m}{n} \Rightarrow b = \frac{ln - mk}{nk} \in \mathbb{Q}$$

Já que $(ln - km), nk \in \mathbb{Z}$. *O que é um absurdo, pois* $b \in \mathbb{I}$.

(F) Sejam $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$ *e* $b \in \mathbb{I}$, *suponha* $a \cdot b \in \mathbb{Q}$. *Então*

$$a \cdot b = \frac{l}{k} = b \cdot \frac{m}{n} \Rightarrow b = \frac{ln}{mk} \in \mathbb{Q}$$

Já que ln *e* $mk \in \mathbb{Z}$. *O que é um absurdo, pois* $b \in \mathbb{I}$.

(F) $0 \in \mathbb{Q}$ *e* $b \in \mathbb{I}$, $0 \cdot b = 0 \in \mathbb{Q}$.

(V) Se (a, b) *pertencem à reta com coeficiente angular* $\frac{3}{2}$, *existe uma constante* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $\frac{3a}{2} + c = b$, *donde* $c = b - \frac{3a}{2}$. *Então note que,*

$$\frac{(a+2)3}{2} + c = \frac{3a+6}{2} + \frac{2b-3a}{2} = \frac{2b+6}{2} = b + 3.$$

Portanto $(a + 2, b + 3)$ *pertence à reta.*

(V) Se duas retas são perpendiculares e nenhuma delas é paralela ao eixo Oy, *então o produto de seus coeficientes angulares é* -1. *Como nenhuma delas é paralela ao eixo* y, *então o seu ângulo* θ *com o eixo* x *está em* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *e não é nulo, logo, o seu coeficiente angular é* $tg(\theta) \neq 0$. *Assim, o coeficiente angular da outra reta é*

$$tg(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{sen(\frac{\pi}{2} + \theta)}{cos(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \frac{sen(\frac{\pi}{2})cos(\theta) + sen(\theta)cos(\frac{\pi}{2})}{cos(\frac{\pi}{2})cos(\theta) - sen(\frac{\pi}{2})sen(\theta)} = -\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} = -\frac{1}{tg(\theta)}.$$

Logo, o produto dos seus coeficientes angulares é -1.

(F) Duas retas são paralelas se possuem o mesmo coeficiente angular. Note que se $(1, -1)$ *e* $(2, 2)$ *pertencem a reta* $R : y = ax + b$ *então temos* $a.1 + b = -1$ *e* $a.2 + b = 2$ *donde* $a = 3$ *e* $b = -4$ *que possuem coeficiente angular* 3, *enquanto a reta* $S : x - 7 = 3y$,

ou seja, $S : \frac{x-7}{3} = y$ *possui coeficiente angular* $\frac{1}{3}$.

(F) Note que $(-x)^2+1 = x^2+1$ *logo a representação geométrica do gráfico da parábola* $y = x^2 + 1$ *é simétrica com relação ao eixo* Oy.

(F) Primeiro vamos determinar quais são os pontos simétricos em relação a reta $x = y$. *Para que pontos sejam simétrico eles precisam estar a mesma distância da reta e o ponto mais próximo tem que ser o mesmo para ambos. A reta perpendicular a algum ponto qualquer de* $x = y$ *é* $c - x = y$, *sendo* $c \in \mathbb{R}$. *Com isso, sabemos que, se o gráfico de* $y^2 - x^2 = 1$ *é simétrico a* $x = y$, *todos os seus pontos tem que ser um par* $(\frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2})$, $(\frac{a-c}{2}, \frac{a+c}{2})$, *para algum* $a \in \mathbb{R}$ *e o* c *da reta perpendicular escolhida.*

Pegando um valor qualquer de $y^2 - x^2 = 1$, *se verifica que seus pontos não seguem essa regra, por exemplo do ponto* $(0, 1)$, *o qual deveria ter, de acordo com a regra, como par de simetria* $(1, 0)$, *pois*

$$(0, 1) = (\frac{a+c}{2}, \frac{a-c}{2}) \Rightarrow a + c = 0 \text{ e } a - c = 2 \Rightarrow a = 1 \text{ e } c = -1$$

e calculando o seu par temos

$$(\frac{a-c}{2}, \frac{a+c}{2}) = (\frac{2}{2}, \frac{0}{2}) = (1, 0).$$

Todavia, $(1, 0)$ *não é ponto de* $y^2 - x^2 = 1$ *pois* $0^2 - 1^2 = -1 \neq 1$, *e portanto não existe simetria para esse eixo.*

(V) É uma parábola com concavidade para cima e sem raízes reais.

(F) Dividindo a equação por 2 temos $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, *ou seja,* $\left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. *Como* $\sqrt{2} > 1$ *seu maior eixo é na vertical.*

(V) O vértice é dado por $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, *assim para* $y = 2 - x^2$ *o vértice é* $(\frac{0}{-2}, \frac{-8}{-4}) = (0, 2)$.

(V) Devemos ter que $\frac{x}{2-x} > 0$ *e* $2-x \neq 0$. *Assim* $x \neq 2$ *e* $\frac{x}{2-x} > 0$ *quando numerador e denominador possuem o mesmo sinal,* $2-x \geq 0$ *quando* $x \leq 2$, *logo* $\frac{x}{2-x} > 0$ *no intervalo* $[0, 2]$ *como* $x \neq 2$ *o domínio da função é o intervalo* $[0, 2)$.

(V) A imagem da função $h(x) = x^2$ *é o conjunto* $[0, +\infty)$, *assim a imagem de* $g(x) = -x^2$ *é o intervalo* $(-\infty, 0]$ *donde segue que a imagem de* $f(x) = 4 - x^2$ *é o subconjunto* $(-\infty, 4]$.

(V) Note que $x^2 + y^2 = 1$ *equivale a* $y^2 = 1 - x^2$, *ou seja,* $|y| = \sqrt{1 - x^2}$, *como* $y \geq 0$ *temos* $y = \sqrt{1 - x^2}$. *Portanto é o gráfico de uma função em* x.

(V) A imagem da função $f(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ *é a imagem da função* $tg(x)$ *que é toda a reta.*

(F) A função $g(x) = sen(x)$ *assume valores no intervalo* $[-1, 1]$*, em particular,* $-1 \leq sen(2x) \leq 1$*, ou seja, a equação* $sen(2x) = 2$ *não é satisfeita para nenhum valor de* x*.*

(V) Note que $[sen(x) + cos(x)]^2 - 1 = sen^2x + 2sen(x)cos(x) + cos^2(x) - 1 =$
$= 1 + 2sen(x)cos(x) - 1 = 2sen(x)cos(x) = sen(2x)$.

(F) $\sqrt{4} = 2$*, já que* $f(x) = \sqrt{x}$ *é uma função e não pode ter 2 respostas. (Ver definição de função.) Então* $\sqrt{x} \geq 0$ *para todo* x *por convenção, apesar de* $(-2)^2 = 4$*.*

(F) $\sqrt{9+16} = 5 \neq 7 = \sqrt{9} + \sqrt{16}$*.*

(F) Para que isso seja verdade $\frac{AB}{C} = \frac{AB}{C^2} = \frac{A}{C}\frac{B}{C}$ *implica que* $C = C^2 \longrightarrow 1 = C$*, e portanto isso é apenas verdade se* $C = 1$*. Porém, com outros valores de* C *essa afirmação é falsa, como para* $A = 1$ *e* $B = C = 2$ *com os quais temos* $\frac{AB}{C} = 1 \neq \frac{1}{2} = \frac{A}{C}\frac{B}{C}$*.*

(F) Para que isso seja verdade $\frac{A}{B+C} = \frac{AC+AB}{BC} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$ *implica que* $A = AC + AB \longrightarrow 1 = C + B$ *e* $B + C = BC$*, e portanto isso é apenas verdade se* $BC = 1 \longrightarrow C = \frac{1}{B} \longrightarrow 1 = B + \frac{1}{B} = \frac{B^2+1}{B} \longrightarrow B = B^2 + 1$ *que é uma equação do segundo grau com* $\Delta = -3$*, e que portanto não tem solução nos reais. Isso revela que não há valores para* B *e* $C \in \mathbb{R}$ *em que tal afirmação seja verdadeira.*

(V) A função $y = x^2$ *intercepta a função* $y = 4$ *quando os valores dos* y *forem iguais, portanto no instante em que* $4 = x^2$ *que apenas ocorre em* $x = \sqrt{4} = \pm 2$*.*

Exercício 2 *Racional uma vez que,*

$$x = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{-1} + 2\sqrt{2} = -3.$$

Exercício 3 *Sejam* a, b *as partes do segmento, com* $a < b$*. Então*

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow a^2 + ab = b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Resolvendo pela Fórmula de Bháskara, vem

$$\frac{a}{b} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

e como $a, b > 0$*, então*

$$\frac{a}{b} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

que é um número irracional. Então $a = xb$*. Agora como* $l = a + b$*, vem*

$$l = a + b = x \cdot b + b = (1 + x)b = (1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2})b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}b = \phi \cdot b$$

Se l *é racional, como* ϕ *é irracional, vem* b *irracional. Agora fazendo o argumento análogo com* $b = \frac{1}{x}a$*, vem* $l = (1 + \frac{1}{x})a$*, concluíndo que* a *é irracional.*

Agora se l *é irracional, nada podemos concluir, pois de* $l = \phi b$*, como* ϕ *é irracional,* b *pode ser tanto racional quanto irracional.*

Exercício 4 *(a) Observe que* $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$ *e uma vez que* $y \geq x \geq 0$ *temos* $x + y \geq 0$ *e* $y - x \geq 0$ *donde vem* $(y - x)(y + x) \geq 0$*, ou seja,* $y^2 - x^2 \geq 0$*, isto é,* $y^2 \geq x^2$*.*

(b) Basta tomar $x = -5$ *e* $y = 1$*, temos* $y \geq x$ *entretanto* $x^2 = 25 \geq 1 = y^2$*.*

(c) Note que para $x = 0$ *e* $y = 0$*, vale* $\sqrt{x} = 0 = \sqrt{y}$*. Suponhamos que* $x > 0$ *ou* $y > 0$*. Mostrar* $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ *é equivalente à provar que* $\sqrt{y} - \sqrt{x} \geq 0$*. Temos que*

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \geq 0,$$

pois $y - x \geq 0$ *e* $\sqrt{y} + \sqrt{x} > 0$*.*

Exercício 5 *Note que*

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + yx + x^2).$$

Agora note que

$$y^2 + yx + x^2 = y^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)y + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + x^2 = \left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq 0.$$

Logo,

$$x^3 < y^3 \Leftrightarrow y^3 - x^3 > 0 \Leftrightarrow (y - x)(y^2 + yx + x^2) > 0 \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow x < y.$$

Exercício 6 *Como* $a \in (0, 1)$*, escolha* $r = \min\{a, 1 - a\} > 0$*. Mostremos que* $(a - r, a + r) \subseteq (0, 1)$*. Tome* $x \in (a - r, a + r)$*. Como* $r \leq a, 1 - a$*, temos*

$$x > a - r \geq a - a = 0,$$

e

$$x < a + r \leq a + (1 - a) = 1,$$

logo, $x \in (0, 1)$*.*

Exercício 7 *Mostrar que* $||a| - |b|| \leq |a - b|$ *é equivalente à provar que* $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$*. Temos que*

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|.$$

E para a outra desigualdade, temos

$$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b| \Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

Portanto, $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$*.*

Exercício 8 *Para* $a = 1$ *e* $b = -3$ *temos* $|a+b| = |1+(-3)| = |-2| = 2 < 1+3 = 4.$

A não-coincidência ocorre quando os números tem sinais opostos. Assim, remete-se à Relação Triangular:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Exercício 9 *(a)* $|1-3x| < 5$

I. $1 - 3x < 5 \Rightarrow 3x > -4 \Rightarrow x > \frac{-4}{3}$

II. $-(1-3x) < 5 \Rightarrow 3x - 1 < 5 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2$

$$S = \left(\frac{-4}{3}, 2\right).$$

(b) $|x^2 + 3| > 3$

I. $x^2 + 3 > 3 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$ *ou* $x < 0$

II. $-(x^2+3) > 3 \Rightarrow -x^2 > 6 \Rightarrow x^2 < -6 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

$$S = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(c) $x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3$

I. $x < 3$

II. $-x < 3 \Rightarrow x > -3$

$$S = (-3, 3).$$

(d) $x^2 > -1 \Rightarrow x^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$S = (-\infty, \infty).$$

(e) $x^2 < 6x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$

Encontrando-se as raízes da função quadrática à esquerda da inequação ($x = 1$ *e* $x = 5$*) e percebendo que a concavidade é para cima, conclui-se que a função tem imagem negativa para os valores do domínio entre as raízes. Assim,*

$$S = (1, 5).$$

(f) $x^3 > 27 \Rightarrow x > 3$

$$S = (3, \infty).$$

(g) $\dfrac{x-6}{x+2} \geq 0$

I. $(x-6 \geq 0)$ *e* $(x+2>0)$
$(x \geq 6)$ *e* $(x > -2) \Rightarrow x \geq 6$

II. $(x-6 \leq 0)$ *e* $(x+2<0)$
$(x \leq 6)$ *e* $(x < -2) \Rightarrow x < -2$

$$S = (-\infty, -2) \cup [6, \infty).$$

(h) $\dfrac{(x+2)(x-3)}{x(x^2+1)} < 0$

I. $(x+2)(x-3) > 0$ *e* $x(x^2+1) < 0$
$((x < -2)$ *ou* $(x > 3))$ *e* $(x < 0)$
$x < -2$

II. $(x+2)(x-3) < 0$ *e* $x(x^2+1) > 0$
$(-2 < x < 3)$ *e* $(x > 0)$
$0 < x < 3$

A solução será dada pela união do conjunto resultante em I com o conjunto resultante em II. Assim,

$$S = (-\infty, -2) \cup (0, 3).$$

(i) $\dfrac{8}{x} < x - 2$ $(x \neq 0)$

Se $x > 0 \Rightarrow 8 < x^2 - 2x$
$x^2 - 2x - 8 > 0$ *e* $x > 0.$

As raízes da função quadrática são $x = -2$ *e* $x = 4$*, como a concavidade é para cima, os valores do domínio para os quais a função tem imagem positiva devem estar à esquerda da menor raiz ou a direita da maior raiz. Para que a condição* $x > 0$ *também seja satisfeita, a solução para esse caso é:*
$x > 4.$

Se $x < 0 \Rightarrow 8 > x^2 - 2x$
$x^2 - 2x - 8 < 0$ *e* $x < 0.$

Analogamente ao primeiro caso, para esse procuraremos pelos valores do domínio para os quais a imagem da função é negativa. Dada a concavidade para cima, esses valores devem estar entre as raízes. Para que a condição $x < 0$ *também seja satisfeita, a solução para esse caso é:*
$-2 < x < 0.$

Unindo as duas soluções, teremos:

$$S = (-2, 0) \cup (4, \infty).$$

(j) $\dfrac{3}{x-2} < \dfrac{1}{2x+1}$

Se $(x-2)$ *e* $(2x+1)$ *têm mesmo sinal, ou seja:* $x > 2$ *para ambas positivas ou* $x < -1/2$ *para ambas negativas, teremos:* $3(2x+1) < (x-2) \Rightarrow 5x < -5 \Rightarrow x < -1$.

Para que as condições de mesmo sinal sejam também satisfeitas, temos que a solução para esse caso é: $x < -1$.

Se $(x-2)$ *e* $(2x+1)$ *têm sinais opostos, ou seja:* $-1/2 < x < 2$*, teremos:* $6x+3 > x-2 \Rightarrow 5x > -5 \Rightarrow x > -1$.

Para que as condições de sinais opostos também sejam satisfeitas, temos que a solução para esse caso é: $-1/2 < x < 2$.

Unindo as duas soluções, teremos:

$$S = \ (-\infty, -1) \ \cup \ (-1/2, 2).$$

(k) $\dfrac{x^2}{x-2} - 1 \geq \dfrac{x^2+3}{x^2-4} \Rightarrow \dfrac{x^2-(x-2)}{x-2} \geq \dfrac{x^2+3}{(x-2)(x+2)}$ *(*$x \neq 2$ *e* $x \neq -2$*).*

Se $(x-2)$ *e* $(x+2)(x-2)$ *têm mesmo sinal, ou seja:* $x > 2$ *para ambas positivas ou* $x < -2$ *para ambas negativas, teremos:* $(x^2-x+2)(x-2)(x+2) \geq (x^2+3)(x-2)$. *Como* $x \neq 2$*, pode-se dividir ambos os lados da inequação por* $(x-2)$,

$$(x^2-x+2)(x+2) \geq x^2+3 \Rightarrow x^3 \geq -1 \Rightarrow x \geq -1.$$

Para satisfazer as condições de mesmo sinal, temos que a solução para esse caso é: $x > 2$.

Se $(x-2)$ *e* $(x+2)(x-2)$ *têm sinais opostos, ou seja:* $-2 < x < 2$*, teremos:* $x \leq -1$ *(Pois a resolução é a mesma do caso acima, basta inverter o sinal da inequação).*

Para satisfazer as condições de sinais opostos, temos: $-2 < x \leq -1$.

Unindo-se as soluções dos dois casos, teremos:

$$S = \ (-2, -1] \ \cup \ (2, \infty).$$

(l) $x^2 + 2x + 2 > 0$

A função não tem raiz, portanto é positiva para qualquer x real,

$$S = \ (-\infty, \infty).$$

(m) *A função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ *tem domínio* $\mathrm{Dom}(f) = (3, +\infty)$.

Exercício 10 *(a) Como o coeficiente angular é* -2*, então a reta tem a forma* $y = -2x + b$. *Agora, como* $(3, -1)$ *pertence a essa reta temos* $-1 = -2.(3) + b$ *donde vem que* $b = 5$. *Portanto, a reta procurada é:* $y = -2x + 5$.

(b) $5x - 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - 1$

Sabe-se que, para que duas retas sejam perpendiculares, seus coeficientes angulares devem ser opostos e inversos. Tendo $\frac{5}{2}$ *como coeficiente da primeira, temos que o coeficiente da reta procurada será* $\frac{-2}{5}$. *Sabendo que o ponto* $(-2, 3)$ *pertence a reta:*
$3 = \dfrac{-2(-2)}{5} + n \Rightarrow n = \frac{11}{5}$

Assim, a reta procurada é: $y = \frac{-2}{5}x + \frac{11}{5}$.

(c) *Primeiro, note que a reta procurada é perpendicular à reta passando pelos pontos* $(0, 0)$ *e* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *que é a reta* $y = x$, *assim seu coeficiente é -1. Como ela passa no ponto* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *temos:* $\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + b$, *temos que* $b = \sqrt{2}$. *Assim sua equação é* $y = -x + \sqrt{2}$.

Exercício 11 (a) *Usando a fórmula da distância de um ponto à reta, vem*

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 0|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3 + 4|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}.$$

(b) *Dado um triângulo ABC, com os pontos M e N como pontos médios dos lados AC e BC, respectivamente. Temos,*

$$\vec{MN} = \vec{BC}/2 + \vec{CA}/2 = 1/2(\vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{AB}/2.$$

Exercício 12 (a) $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 25$ *(Por completamento de quadrados)*
$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$
Circunferência com raio 5 e centro $(3, -4)$.

(b) $x^2 + y^2 - 10y = -25$
$x^2 + (y - 5)^2 = 0$
Ponto $(0, 5)$.

(c) $x^2 + y^2 < 1$
Circulo aberto (s/ fronteira) com centro $(0, 0)$ *e raio 1.*

(d) $x^2 + y^2 \geq 1$
$\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 0\}$.

(e) $x = -\sqrt{1 - y^2}$
Semicircunferência com eixo vertical com valores de x *negativos.*

(f) *Não existe.*

Exercício 13 *Como* $x = 50t$, *então* $x = \frac{t}{50}$. *Substituindo em* y, *vem*

$$y = 50t - t^2 = 50\left(\frac{x}{50}\right) - \left(\frac{x}{50}\right)^2 = x - \frac{1}{2500}x^2,$$

que descreve uma parábola $y = ax^2 + bx + c$, *para* $a = -\frac{1}{2500}$, $b = 1$ *e* $c = 0$. *O projétil atinge o chão quando* $y = 0$, *logo,*

$$0 = x - \frac{1}{2500}x^2 = x(1 - \frac{1}{2500}x),$$

assim, $x = 0$ *(que não interessa, pois é a posição inicial), ou* $\frac{1}{2500}x = 1$, *assim,* $x = 2500$. *Portanto, o projétil atinge o chão à uma distância de* $2500m$ *do canhão. Por fim, como o trajeto é uma parábola com concavidade para baixo, então a altura máxima é o* y *do vértice da parábola, logo,*

$$h_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1^2 - 4 \cdot \frac{-1}{2500} \cdot 0}{4 \cdot \frac{-1}{2500}} = \frac{1}{\frac{4}{2500}} = \frac{2500}{4} = 625.$$

Portanto, a altura máxima é $625m$.

Exercício 14 *(a)* $x = y^2$ *diz que* x *está em função de* y *e* x *é sempre positivo, logo, é uma parábola com a concavidade para a direita com* $a = 1$, $b = 0$ *e* $c = 0$. *O seu vértice, pelos eixos estarem trocados, é dado por* $x_v = -\frac{\Delta}{4a} = 0$ *e o seu eixo de simetria é dado por* $y_v = -\frac{b}{2a} = 0$. *Logo, seu verticie é* $(0, 0)$

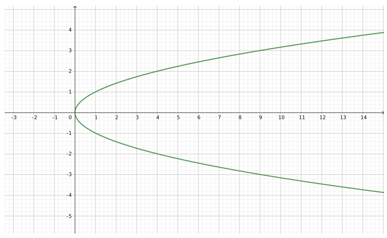


Figura 1: Exercício 16 Item (a)

(b) $y = -x^2$ *diz que* y *está em função de* x *e* y *é sempre negativo, logo, é uma parábola com a concavidade para baixo com* $a = -1$, $b = 0$ *e* $c = 0$. *O seu vértice é dado por* $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$ *e o seu eixo de simetria é dado por* $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = 0$. *Logo, seu verticie é* $(0, 0)$.

(c) $y^2 - 4x - 4y = 0$ *pode ser escrito como* $x = \frac{1}{4}y^2 - y$. *Logo, como* x *está em função de* y *e o coeficiente de* y^2 *é positivo, então é uma parábola deitada para a direita. Ela corta o eixo* y *em* $x = 0$, *logo,*

$$0 = \frac{1}{4}y^2 - y = y\left(\frac{1}{4}y - 1\right),$$

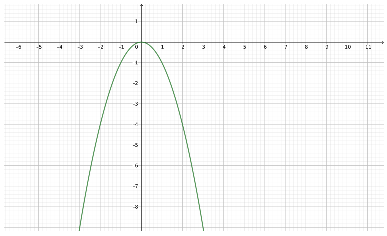


Figura 2: Exercício 16 Item (b)

assim, $y = 0$ *ou* $y = 4$*. O vértice dessa parábola (lembrando que* x *está em função de* y*) é*

$$\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) = \left(-\frac{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0}{4 \cdot \frac{1}{4}}, -\frac{(-1)}{2 \cdot \frac{1}{4}}\right) = (-1, 2).$$

O eixo dessa parábola deve ser paralela ao eixo x *e passar pelo ponto* $(-1, 2)$*, logo, o eixo de simetria é a reta* $y = 2$*.*

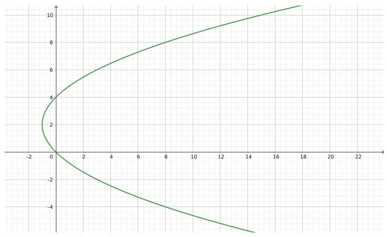


Figura 3: Exercício 16 Item (c)

Exercício 15 *(a) Polinomial.*

(b) Racional.

(c) Racional.

(d) Afim.

(e) Constante.

(f) Qualquer.

Exercício 16 *(a) Para função* f *par, temos que* $f(x) = f(-x)$*, ou seja, ela é simétrica em relação ao eixo* y*. Agora de uma função* f *ímpar, temos* $f(-x) = -f(x)$*. Assim, os pontos do gráfico de* f *satisfazem*

$$(-x, f(-x)) = (-x, -f(x)) = -(x, f(x)),$$

ou seja, o gráfico de f *é simétrico em relação à origem* $(0, 0)$*.*

(b) *Como motivação, vamos supor que já existam tais funções* g *e* h*, com* g *par e* h *ímpar, tais que* $f(x) = g(x)+h(x)$*. Como vale para todo* x*, trocando* x *por* $-x$*, vem*

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x).$$

Assim, temos um sistema

$$\begin{cases} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(-x) & = & g(x) - h(x). \end{cases}$$

Somando as duas equações, vem

$$f(x) + f(-x) = 2g(x),$$

e subtraindo as duas equações, vem

$$f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Portanto,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ e } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

E de fato, tomando g *e* h *dessa forma, vem que* g *é par,* h *é ímpar e* $g(x)+h(x) = f(x)$.

(c) *Vamos verificar cada uma das funções abaixo:*

(a) $f(x) = x^3$ *é ímpar, pois* $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

(b) $f(x) = |x|$ *é par, pois* $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

(c) $f(x) = x(x^3 - x)$ *é par, pois*

$$f(-x) = (-x)((-x)^3 - (-x)) = -x(-x^3 + x) = x(x^3 - x) = f(x).$$

(d) $f(x) = x^4 + x^2$ *é par, pois*

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x).$$

(e) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$ *é ímpar, pois*

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 - x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = -f(x).$$

(f) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ *é ímpar, pois*

$$f(-x) = \mathrm{tg}(-x) = \frac{\mathrm{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = -\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = -\mathrm{tg}(x) = -f(x).$$

Exercício 17 *(a) Dado* x *real, existe um único* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \leq x < n+1$*. Note que se* $x \leq \frac{2n+1}{2}$*, então* $\{x\} = x - n$*, e se* $x \geq \frac{2n+1}{2}$*, então* $\{x\} = n+1-x$*. Logo, no intervalo* $[n, \frac{2n+1}{2}]$*, o gráfico é a reta* $x - n$ *(que passa por* $(n, 0)$ *e* $(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2})$*), e em* $[\frac{2n+1}{2}, n+1)$*, o gráfico é a reta* $n+1-x$ *(que passa por* $(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2})$ *e devia passar por* $(n+1, 0)$*, mas este ponto é completado pelo próximo* n*).*

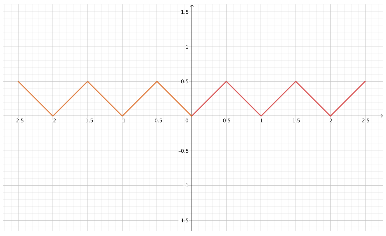


Figura 4: Exercício 19 Item (a)

(b) Dado $x \in \mathbb{R}$*, existe um único* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \leq x < n+1$*. Assim,* $[x] = n$*. Logo, no intervalo* $[n, n+1)$*, o gráfico é a função constante* n*. E em* $n+1$*, ela tem um salto para a função constante* $n+1$*.*

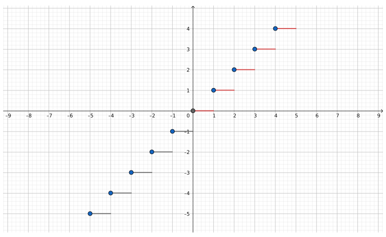


Figura 5: Exercício 19 Item (b)

(c) Dado $x \in \mathbb{R}$*, existe um único* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \leq x < n+1$*, logo,* $[x] = n$*, assim,* $x - [x] = x - n$*, que é a parte decimal de* x*. Portanto, o gráfico são segmentos de retas inclinadas periódicas.*

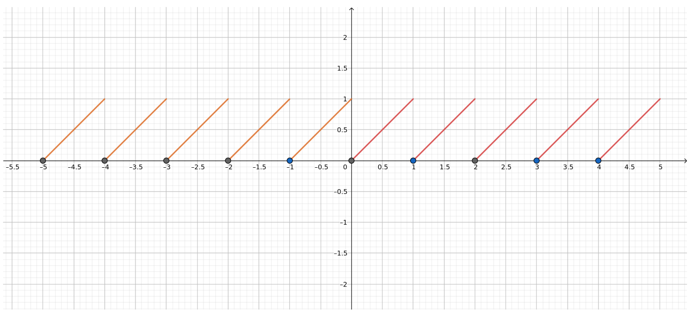


Figura 6: Exercício 19 Item (c)

(d) *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$. Divida o intervalo $[n, n+1)$ em quatro sub-intervalos de mesmo comprimento, a saber,*

$$[n, \frac{4n+1}{4}), [\frac{4n+1}{4}, \frac{2n+1}{2}), [\frac{2n+1}{2}, \frac{4n+3}{4}), [\frac{4n+3}{4}, n+1).$$

Se x está no primeiro, então $4x$ está em $[4n, 4n+1)$, logo, caímos no caso do item (a), que o gráfico é um triângulo, e o mesmo ocorre nos demais três sub-intervalos. Então em $[n, n+1)$, $\{4x\}$ são quatro triângulos de altura $\frac{1}{2}$. Assim, $\frac{1}{4}\{4x\}$ são quatro triângulos de altura $\frac{1}{8}$.

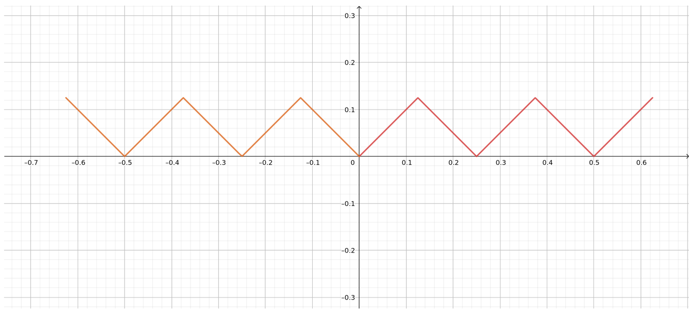


Figura 7: Exercício 19 Item (d)

Exercício 18 (a) *Como um período T deve valer para todo x, em particular, deve valer para $x = 0$, logo,*

$$\text{sen}(2 \cdot 0) = \text{sen}(2(0+T)) \Rightarrow 0 = \text{sen}(2T) \Rightarrow 2T = 0 + 2n_1\pi \text{ ou } 2T = \pi + 2n_2\pi,$$

com $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$T = n_1\pi \text{ ou } T = \frac{\pi}{2} + n_2\pi.$$

Como T deve ser o menor possível, poderíamos considerar $T = \frac{\pi}{2}$, mas note que isto não é um período para f, pois para $x = \frac{\pi}{4}$, temos

$$f(x+T) = \text{sen}(2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})) = \text{sen}(2\frac{6\pi}{8}) = \text{sen}(\frac{6\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1,$$

mas

$$f(x) = \text{sen}(2\frac{\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Logo, o segundo menor é $T = \pi$. Este de fato é um período para f, pois

$$f(x+T) = \text{sen}(2(x+\pi)) = \text{sen}(2x + 2\pi) = \text{sen}(2x) = f(x).$$

Portanto, f é periódica e o seu período fundamental é π.

(b) *Pelo mesmo raciocínio, se T é um período, em particular, vale para $x = 0$, logo, devemos ter*

$$0 = \text{sen}(T) + \text{sen}(\pi T) \Rightarrow \text{sen}(T) = -\text{sen}(\pi T),$$

logo, no círculo trigonométrico vemos que $T = -\pi T + 2n_1\pi$ *ou* $T = \pi T - \pi + 2n_2\pi$, *para* $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. *Resolvendo para* T, *vem*

$$T = \frac{2n_1\pi}{\pi+1} \text{ ou } T = \frac{\pi - 2n_2\pi}{\pi - 1}.$$

Assim, como T *deve ser o menor possível positivo, vem*

$$T = \frac{2\pi}{\pi+1} \text{ ou } T = \frac{\pi}{\pi-1}.$$

Mas para $x = \frac{\pi}{2}$, *não vale* $f(x+T) = f(x)$, *para nenhum dos dois* T. *Portanto,* f *não é periódica. Um outro jeito de provar que não existe tal* T *envolve derivada. Suponha, por absurdo, que tal* T *existe. Derivando a igualdade*

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(\pi x) = \text{sen}(x+T) + \text{sen}(\pi(x+T))$$

duas vezes em relação à x, *vem*

$$-\text{sen}(x) - \pi^2\text{sen}(\pi x) = -\text{sen}(x+T) - \pi^2\text{sen}(\pi(x+T)).$$

Somando as duas igualdades, vem

$$(1-\pi^2)\text{sen}(\pi x) = (1-\pi^2)\text{sen}(\pi(x+T)) \Rightarrow \text{sen}(\pi x) = \text{sen}(\pi(x+T))).$$

Na primeira equação, isso implica que $\text{sen}(x) = \text{sen}(x+T)$, *logo,* T *é um período para* $\text{sen}(x)$, *e como o período fundamental de* $\text{sen}(x)$ *é* 2π, *então* $T = 2k\pi$. *Mas por outro lado,* $\text{sen}(\pi x) = \text{sen}(\pi x + \pi T)$ *diz que* $\text{sen}(y) = \text{sen}(y + \pi T)$, *então novamente,* πT *é um período para* $\text{sen}(y)$, *logo,* $\pi T = 2k'\pi$, *assim,* $T = 2k'$. *Temos uma contradição, pois* $2k'$ *é racional e* $2k\pi$ *é irracional.*

(c) f *não é periódica. De fato, suponha, por absurdo, que exista um período* $T > 0$ *para* f. *Então existe um único inteiro* n *tal que* $n \leq T < n+1$. *Assim,*

$$[0] = [0+T] \Rightarrow 0 = [T] \Rightarrow 0 = n.$$

Portanto, $0 \leq T < 1$. *Agora considere* $x = 1 - \frac{T}{2}$. *Note que* $0 < x < 1$, *assim,* $[x] = 0$. *Mas*

$$[x+T] = [1 - \frac{T}{2} + T] = [1 + \frac{T}{2}] = 1,$$

pois $1 < 1 + \frac{T}{2} < 2$. *Logo,* T *não é período para* f. *Portanto,* f *não é periódica.*

(d) Note que $T = 2\pi$ *é um período para* f, *pois*

$$f(x+2\pi) = 3\cos((x+2\pi)+2) = 3\cos((x+2)+2\pi) = 3\cos(x+2) = f(x).$$

Agora se T *é um período para* f, *em particular, para* $x = -2$, *vale*

$$f(-2) = f(-2+T) \Rightarrow 3\cos(-2+2) = 3\cos(-2+T+2) \Rightarrow 1 = \cos(T),$$

logo, $T = 2k\pi$, *onde* $k \in \mathbb{Z}$, *logo, o menor positivo é* $T = 2\pi$.

Exercício 19 *(1)* *(a)* $\frac{\pi}{12}$

(b) $\frac{7\pi}{12}$

(c) $\frac{3\pi}{4}$

(d) $\frac{7\pi}{2}$

(2) *(a)* $300°$

(b) $84°$

(c) $1500°$

(d) $36°$

Exercício 20 *Sejam* (a_0, b_0) *e* (a_1, b_1) *os dois pontos do enunciado. Dado um* (x, y) *nas condições do enunciado, temos*

$$\frac{\sqrt{(x-a_0)^2+(y-b_0)^2}}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}} = c,$$

ou seja,

$$(x-a_0)^2+(y-b_0)^2 = c^2[(x-a_1)^2+(y-b_1)^2],$$

e desenvolvendo,

$$x^2 - 2a_0x + a_0^2 + y^2 - 2b_0y + b_0^2 = c^2x^2 - 2a_1c^2x + c^2a_1^2 + c^2y^2 - 2b_1c^2y + c^2b_1^2.$$

Agora agrupando os termos em comum, vem

$$(c^2-1)x^2 - 2(a_1c^2 - a_0)x + (c^2-1)y^2 - 2(b_1c^2 - b_0)y + c^2a_1^2 + c^2b_1^2 - a_0^2 - b_0^2 = 0.$$

Como $c^2 - 1 \neq 0$*, pois* $c \geq 0$ *e* $c \neq 1$*, podemos dividir por* $c^2 - 1$ *e obter*

$$x^2 - 2\frac{a_1c^2 - a_0}{c^2-1}x + y^2 - 2\frac{b_1c^2 - b_0}{c^2-1}y + \frac{c^2a_1^2 + c^2b_1^2 - a_0^2 - b_0^2}{c^2-1} = 0.$$

Completando quadrados, vem

$$\left(x - \frac{a_1c^2 - a_0}{c^2-1}\right)^2 + \left(y - \frac{b_1c^2 - b_0}{c^2-1}\right)^2 = \frac{c^2[(a_0-a_1)^2 + (b_0-b_1)^2]}{(c^2-1)^2},$$

que é a equação de uma circunferência de centro

$$\left(\frac{a_1c^2 - a_0}{c^2-1}, \frac{b_1c^2 - b_0}{c^2-1}\right),$$

e raio

$$\sqrt{\frac{c^2[(a_0-a_1)^2 + (b_0-b_1)^2]}{(c^2-1)^2}} = \frac{c}{|c^2-1|}\sqrt{(a_0-a_1)^2 + (b_0-b_1)^2}.$$

Exercício 21 *(a) A área de um setor circular de ângulo* θ *de uma circunferência de raio* r *é dada por*

$$\frac{\theta \cdot r^2}{2}.$$

Seja $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ *tal que* $tg(\theta) = 3$ *(A saber,* $\theta = \arctan(3)$*, que é aproximadamente* $1,249$*). Note que a área da região esquerda é a área da região direita. Agora, a área da região direita é*

$$\frac{\theta \cdot 3^2}{2} - \frac{\theta \cdot 2^2}{2} = \frac{5}{2}\theta.$$

Assim, a área é

$$5\theta = 5\text{arctg}(3) \cong 5 \cdot 1,2409 = 6,245.$$

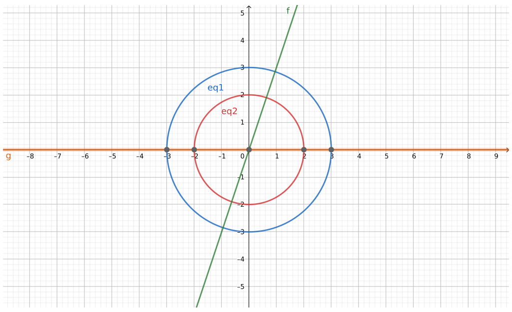


Figura 8: Exercício 23 Item (a)

(b) *[(i)]*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2+(x+h)-(x^2+x)}{h} \\
&= \frac{x^2+2hx+h^2+x+h-x^2-x}{h} \\
&= \frac{2hx+h^2+h}{h} \\
&= 2x+h+1
\end{aligned}$$

[(ii)]

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)+5-(3x+5)}{h} \\
&= \frac{3x+3h+5-3x-5}{h} \\
&= \frac{3h}{h} \\
&= 3
\end{aligned}$$

[(iii)]

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} \\
&= \frac{sen(x)cos(h)+sen(h)cos(x)-sen(x)}{h} \\
&= \frac{sen(x)(cos(h)-1)+sen(h)cos(x)}{h}
\end{aligned}$$

[(iv)]

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\
&= \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\
&= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\
&= 3x^2+3xh+h^2
\end{aligned}$$

Exercício 22 *(a) Uma função* f *é injetora se* $f(x) = f(y)$ *implica* $x = y$*. Assim,* f *é injetora se cada valor do contra-domínio é assumida por, no máximo, um único ponto do domínio, logo, geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de* f *em, no máximo, um único ponto.*

(b) Uma função f *é sobrejetora se para todo* y *no contra-domínio, existe um* x *no domínio tal que* $f(x) = y$*. Assim,* f *é sobrejetora se cada valor do contra-domínio é assumida por, pelo menos, um ponto do domínio, logo, geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de* f *em, no mínimo, um ponto.*

(c) Uma função f *é bijetora se* f *é injetora e sobrejetora. Geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de* f *em um único ponto.*

Exercício 23 *(a) É bijetora, pois*

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 5x + 1 = 5y + 1 \Rightarrow 5x = 5y \Rightarrow x = y,$$

e para cada $y \in \mathbb{R}$*, tomando* $x = \frac{y-1}{5}$*, vem*

$$f(x) = 5\frac{y-1}{5} + 1 = y - 1 + 1 = y.$$

(b) Não é injetora, pois $f(-1) = 5 = f(1)$*, e não é sobrejetora, pois* -1 *não é assumido por nenhum* x*, pois* $f(x) \geq 4$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

(c) Não é injetora, pois $f(\frac{\pi}{2}) = 0 = f(\frac{3\pi}{2})$*. Mas é sobrejetora, basta checar no círculo trigonométrico.*

(d) É bijetora, pois

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 + 4 = y^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \sqrt{y^2} = |y|,$$

mas $y \geq 0$*, então* $|y| = y$*, daí,* $x = y$*, e dado* $y \in [4, \infty)$*, tomando* $x = \sqrt{y-4} \in [0, \infty)$*, vem*

$$f(x) = (\sqrt{y-4})^2 - 4 = y - 4 + 4 = y.$$

(e) É bijetora, basta fazer a interpretação geométrica no círculo trigonométrico.

(g) É injetora, pelo mesmo argumento do item (d)*, mas não é sobrejetora, pois* -1 *não é imagem de nenhum ponto.*

Exercício 24 *(a) Nem sempre, por exemplo, a inversa de* $f(x) = x$ *é* $g(x) = x$*, que é diferente de* $\frac{1}{x}$*.*

(b) O item (a) *admite inversa* $g(x) = \frac{x-1}{5}$*, o item* (d) *admite inversa* $g(x) = \sqrt{x-4}$ *e o item* (e) *admite inversa* $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$*. As outras funções não admitem inversa pelas seguintes razões:*

(b) e (g) - Diferentemente da letra (d) na qual é restringido com um intervalo tanto o domínio quanto a imagem, essa função não tem $\mathrm{Im}(f)$*, ou* $D(g)$*, restringido, e por causa disso temos que nem todos os valores do domínio* $D(g)$ *encontram resposta dentro da imagem* $\mathrm{Im}(g)$*, como por exemplo* $g(3) = \sqrt{-1}$.

(c) - $f(x) = \cos(x)$ *normalmente tem a inversa* $g(x) = \arccos(x)$*, em que* $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. *Todavia, ao se colocar que o domínio de* $f(x)$ *se restringe a* $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ *significa que a imagem de sua inversa também deveria ficar restrita a esses valores. Contudo, para essa faixa de imagem* $\mathrm{Im}(f)$ *usada,* $g(x)$ *pode acabar devolvendo valores fora dela, exemplo disso é* $g(0,5) = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\ pi}{3}$*, que está fora do intervalo do domínio* $D(f)$.

Exercício 25 *Seja* H*,* h*,* d *e* c *a altura do poste, a altura do homem, a distância entre o homem o poste e o comprimento da sombra, respectivamente, podemos considerar uma semelhança de triângulos em que temos como lados semelhantes* $H \sim h$ *e* $(d + c) \sim c$. *Sabendo que a razão entre as semelhanças são iguais, temos que* $\frac{H}{h} = \frac{(d+c)}{c}$*, isolando o c temos* $c = \frac{hd}{(H-h)}$. *Por fim, trocando* H *e* h *por* $4,5m$ *e* $1,8m$ *temos a função final* $c(d) = d\frac{1,8}{4,5-1,8} = d\frac{1,8}{2,7} = d\frac{2}{3}$.

Exercício 26 *Como ambos saem do mesmo ponto, podemos considerar este ponto como a origem do plano cartesiano. Como as trajetórias são retilíneas e perpendiculares, sem perda de generalidade, podemos supor que o homem que caminha com velocidade de 2 km/h anda no eixo x e que o homem que caminha com velocidade 3 km/h, no eixo y. Desta forma, as trajetórias em função do tempo são, respectivamente,* $(2t, 0)$ *e* $(0, 3t)$. *Aplicando o teorema de Pitágoras para calcular a distância entre os dois homens teremos que:*

$$d = \sqrt{(2t)^2 + (3t)^2} = \sqrt{13}t.$$

Exercício 27 *Como a densidade* ρ *aumenta linearmente com a profundidade* h*, então basta termos dois pontos para encontrar esta reta. Seja* x *a profundidade do reservatório. Sabemos que na superfície, ou seja,* $h = 0$*, temos densidade* $\rho = \rho_0$*, e no fundo, para* $h = x$*, temos densidade* $\rho = \rho_1$. *Logo, o coeficiente angular desta reta é*

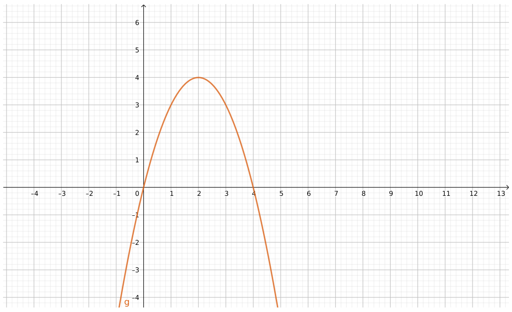
$$m = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x - 0} = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}.$$

Assim, $\rho = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}h + q$*, e como para* $h = 0$ *temos* $\rho = \rho_0$*, então* $q = \rho_0$. *Portanto,*

$$\rho(h) = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}h + \rho_0.$$

Exercício 28 *(a) Representa uma parábola, com concavidade para baixo, que corta o eixo* x *em* $(0, 0)$ *e em* $(4, 0)$.

assim,



(b) A altura máxima é o y do vértice, que é dada por

$$h_{max} = -\frac{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)} = -\frac{16}{-4} = 4,$$

e o seu instante é o x do vértice, que é dada por

$$t_0 = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = -\frac{4}{-2} = 2.$$

Exercício 29 *Seja T a projeção ortogonal do ponto R no segmento OP. Se S está entre O e T, podemos fazer semelhança de triângulos para obter que a altura do triângulo sombreado é x e, daí, a área é*

$$A(x) = \frac{x\cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Agora, se S está entre T e P, então a área A é a soma da área do triângulo ORT, que é $\frac{25}{2}$, com a área do retângulo sombreado, que é $5\cdot(x-5)$. Portanto,

$$A(x) = 5x - 25 + \frac{25}{2} = 5x - \frac{25}{2}.$$

Portanto,

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 5, \\ 5x - \frac{25}{2}, & 5 < x \leq 10 \end{cases}.$$

Exercício 30 *Sejam a e b a medida dos lados do retângulo. Como o seu perímetro é $2p$, então $2a + 2b = 2p$, logo, $a + b = p$. A sua área é dada por*

$$A = a\cdot b = a\cdot(p-a) = pa - a^2.$$

Logo, sendo uma parábola com concavidade para baixo, a área máxima ocorre para a sendo o x do seu vértice, logo,

$$a = -\frac{p}{2\cdot(-1)} = \frac{p}{2},$$

assim,

$$b = p - a = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}.$$

Portanto, o retângulo é um quadrado com lado medindo $\frac{p}{2}$.

Exercício 31 *Coloquemos este fio no eixo x, de modo que a extremidade esquerda seja $x = 0$ e a extremidade direita seja $x = 10$. Seja x a posição do corte feito. Sem perda de generalidade, usemos o primeiro segmento, de comprimento x, para formar o quadrado de lado l, e o segundo segmento, de comprimento $10 - x$, para formar a circunferência de raio r. Assim,*

$$4l = x \Rightarrow l = \frac{x}{4},$$

logo, o quadrado delimita uma área

$$A_q(x) = l^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Agora

$$2\pi r = 10 - x \Rightarrow r = \frac{10 - x}{2\pi},$$

logo, a circunferência delimita uma área

$$A_c(x) = \pi \cdot r^2 = \pi \left(\frac{10 - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{100 - 20x + x^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}x^2 - \frac{5}{\pi}x + \frac{25}{\pi}.$$

Assim, a soma das áreas é

$$A(x) = A_q(x) + A_c(x) = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - \frac{5}{\pi}x + \frac{25}{\pi}.$$

Note que é uma parábola com concavidade para cima, logo, o máximo ocorre em $x = 0$ ou $x = 10$. Mas

$$A(0) = \frac{25}{\pi}$$

e

$$A(10) = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)10^2 - \frac{5}{\pi}10 + \frac{25}{\pi} = \frac{25}{4}.$$

Como $\pi < 4$, então $\frac{25}{\pi} > \frac{25}{4}$. Portanto, a área máxima ocorre para $x = 0$. Usamos o fio inteiro para a circunferência.

Exercício 32 *Se $0 \leq x \leq 5$, então podemos fazer semelhança de triângulos e pelo caso AA (ângulo-ângulo) podemos concluir que a altura do triângulo sombreado é $2x$, pois*

$$\frac{10}{h} = \frac{5}{x} \Rightarrow h = 2x.$$

Logo,

$$A(x) = \frac{x \cdot (2x)}{2} = x^2.$$

Agora, se $5 < x \leq 10$, então a área sombreada é a soma da área do triângulo retângulo esquerdo, que é $\frac{5.10}{2} = 25$, com a área sombreada no triângulo direito. Para encontrar a área sombreada no triangulo retângulo direito podemos fazer semelhança de triângulos, *usando o caso AA (ângulo-ângulo), para concluir que a altura do triângulo não sombreado é* $20 - 2x$*, pois*

$$\frac{10}{h} = \frac{5}{10 - x} \Rightarrow h = 10 - 2x.$$

Logo,

$$A(x) = 25 - \frac{(10 - x)(20 - 2x)}{2} = 25 - \frac{2x^2 - 40x + 200}{2} = -x^2 + 20x - 75.$$

Portanto,

$$A(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 5, \\ -x^2 + 20x - 50, & 5 < x \leq 10 \end{cases}.$$

Exercício 33 *Seja* h *a medida da altura do triângulo inscrito. Assim, a altura divide o segmento* OB *em dois segmentos, de medida* m *e* n*, respectivamente. Note que usando a definição de tangente para o ângulo direito, temos*

$$tg(\theta) = \frac{h}{n}.$$

Agora, o ângulo da esquerda é $90° - \theta$*, logo, usando a definição de tangente, temos*

$$\frac{h}{m} = tg(90° - \theta) = \frac{sen(90° - \theta)}{cos(90° - \theta)} = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} = \frac{1}{tg(\theta)}.$$

Logo,

$$b = m + n = htg(\theta) + \frac{h}{tg(\theta)} = h\left(tg(\theta) + \frac{1}{tg(\theta)}\right) = h\left(\frac{tg^2(\theta) + 1}{tg(\theta)}\right).$$

Portanto,

$$h = \frac{btg(\theta)}{tg^2(\theta) + 1}.$$

Assim,

$$A(\theta) = \frac{b \cdot \frac{btg(\theta)}{tg^2(\theta)+1}}{2} = \frac{b^2tg(\theta)}{2(tg^2(\theta) + 1)}.$$

Exercício 34 $\mathrm{Dom}(h) = f^{-1}(\mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Im}(f))$.

(a) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}$

(b) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$ $\mathrm{Dom}(h) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(g) = [2, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(h) = [2, +\infty)$

(c) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{-1\}$
$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R} - \{0\}$

(d) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$ $\mathrm{Dom}(h) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(g) = (0, 1]$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(h) = (0, 1]$

(e) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(g) = (-\infty, 1]$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$, $\mathrm{Im}(h) = [0, 1]$

(f) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$ $\mathrm{Dom}(h) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(h) = [0, +\infty)$

(g) $\mathrm{Dom}(g) = (0, +\infty)$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ h *não está definida*
$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1]$,

(h) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1]$
$\mathrm{Im}(g) = (0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$, $\mathrm{Im}(h) = [1, e]$

Exercício 35 *Se* f *e* g *são pares, então* $f(x) = f(-x)$ *e* $g(x) = g(-x)$*. Logo,*

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g(-x)) = f \circ g(-x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(-x)) = g \circ f(-x),$$

e portanto $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são pares.*

Se f *e* g *são ímpares, então* $f(x) = -f(-x)$ *e* $g(x) = -g(-x)$*. Logo,*

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-g(-x)) = -f(g(-x)) = -f \circ g(-x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(-f(-x)) = -g(f(-x)) = -g \circ f(-x),$$

e portanto $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são ímpares.*

Se f *é par e* g *é impar, então* $f(x) = f(-x)$ *e* $g(x) = -g(-x)$*. Logo,*

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-g(-x)) = f(g(-x)) = f \circ g(-x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(-x)) = g \circ f(-x),$$

e portanto $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são pares.*

Exercício 36

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} & \text{e} \quad D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} \\[2ex]
\text{(b)} & g^{-1}(x) = \dfrac{3}{x-2} - 1 & \text{e} \quad D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \\[2ex]
\text{(c)} & g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1} - 1 & \text{e} \quad D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\} \\[2ex]
\text{(d)} & g^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1 & \text{e} \quad D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\} \\[2ex]
\text{(e)} & g^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2 & \text{e} \quad D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\}
\end{array}$$

Exercício 37 *Se* x *é o lado do triângulo equilátero, então o seu perímetro é* $3x$. *Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos a sua altura* $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, *logo, a sua área é*

$$\frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}.$$

Exercício 38 *Seja* a *a aresta do cubo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos que a diagonal da face da base mede* $\sqrt{2}a$ *e, consequentemente, a diagonal mede* $d = \sqrt{3}a$. *Portanto, a aresta em função do comprimento da diagonal é*

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}d = \frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

Assim, a área da superfície é

$$6 \cdot a^2 = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2 = 6 \cdot \frac{3}{9}d^2 = 2d^2,$$

e o volume do cubo é

$$a^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{27}d^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}d^3.$$

Exercício 39 *Se uma curva simétrica em relação ao eixo* x *é gráfico de uma função* f, *então* $(x, f(x))$ *está na curva se, e somente se,* $(x, -f(x))$ *está na curva. Agora, dado* x *no domínio da* f, $(x, f(x))$ *e* $(x, -f(x))$ *estão no gráfico, mas como um ponto* x *só tem uma imagem, devemos ter*

$$f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Portanto, f *é a função nula.*