Cáculo I - Informações Essenciais e Introdução

Primeiro Semestre de 2022

Turma 2022113

Alexandre N. Carvalho

21 de Março de 2022

Chapter 1

Informações Essenciais

1.0.1 Ambiente de aprendizado eletrônico-E-DISCIPLINAS USP

Todas as informações e material do curso estão disponíveis em https://edisciplinas.usp.br/acessar/

Para o seu primeiro acesso

ID do Usuário: ID or Mail USP

Senha: Sua senha

Você também poderá acessar diversas informações da disciplina em
https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma301/2022113.html

1.1 Ementa (Módulos)

- **Introdução :**
  - Porque estudar cálculo
- **Números reais e Funções:**
  - O conjunto dos números reais e algumas propriedades (Módulo 1)
  - Funções reais a valores reais : Operações e Gráficos (Módulo 1)
  - Funções elementares: polinomiais, racionais, trigonométricas, logarítimicas e exponenciais (Módulo 1)
- **Limites e Continuidade:**
  - A noção intuitiva de limite (Módulo 1)

- A definição de limite (Módulo 2)
- Propriedades do limite (Módulo 2)
- Limites laterais (Módulo 2)
- Funções contínuas e suas propriedades (Módulo 2)

- **A Derivada:**
  - Introdução: Reta tangente e velocidade instantânea (Módulo 2)
  - Definição de derivada (Módulo 2)
  - Relação entre derivada e continuidade (Módulo 3)
  - Regras de derivação: Derivadas de funções elementares (Módulo 3)
  - A derivada da composta: Regra da cadeia (Módulo 3)
  - A derivada inversa: trigonométricas inversas e exponencial (Módulo 3)
  - Acréscimos e diferenciais (Módulo 3)
  - Derivação implícita (Módulo 3)
  - O teorema do valor médio (Módulo 4)
  - Derivadas de ordem superior (Módulo 4)
  - O polinômio de Taylor (Módulo 4)

- **Aplicações da Derivada**
  - Funções crescentes e decrescentes (Módulo 4)
  - Máximos e mínimos (Módulo 4)
  - Problemas de máximos e mínimos (Módulo 4)
  - Concavidade e pontos de inflexão (Módulo 4)
  - Formas indeterminadas e regras de L'Hospital (Módulo 5)
  - Assíntotas horizontais e verticais (Módulo 5)
  - Esboço de gráficos de funções (Módulo 5)
  - Antiderivadas (Módulo 5)

1.2 Bibliografia

- **Livros texto:**

  - STEWART, J. Cálculo, V. 1, Pioneira
  - THOMAS, G.B. Cálculo, V. 1, Pearson.

- **Bibliografia Complementar:**

  - GUIDORIZZI, H.L. Um Curso de Cálculo, 5ª V. 1, LTC.
  - TÁBOAS, P.Z. Cálculo Diferencial e Integral na Reta, EDUSP
  - SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica, V. 1.
  - SIMMONS, G.F. Cálculo com Geometria Analítica, V. 1.
  - Notas de aula disponíveis no e-disciplinas e no site.

1.3 Provas, Pesos e Recuperação

PROVAS

- Prova 1 (Peso 2): 21/05 das 10 s 12hs - Módulos 1 e 2
- Prova 2 (Peso 3): 16/07 das 10 s 12hs - Módulos 3, 4 e 5
- Prova Substitutiva no Sábado, dia 23 de julho, das 10-12hs
- Recuperação na Quarta-Feira, dia 03 de agosto, das 10-12hs

OBSERVAÇÃO

- Alunos que, por motivos religiosos, não puderem fazer provas aos sábados devem informar o seu professor. As provas para estes alunos serão realizadas nos dias 24/05 e 18/07.

1.4 Simulados

- Antes das provas, serão oferecidos simulados no e-disciplinas
- As notas serão divulgadas proporcionalmente aos acertos.

- Cada participação adicionará à média final do aluno.
- **Simulado 01** - Módulos 1 e 2: Online no e-disciplinas, acesso livre nos dias 11 e 12 de maio (2h de prova).
- **Simulado 02** - Módulos 3, 4 e 5: Online no e-disciplinas, acesso livre nos dias 06 e 07 de julho (2h de prova).

1.5 Recuperação de Aprendizado

Você teve que perder alguma prova?

- Caso necessite de recuperação de aprendizado por razões médicas ou algum outro compromisso oficial, você deverá fazer a prova substitutiva no dia 23/07 às 10:00hs.
- Informe-se na Secretaria da Graduação do seu Curso para saber se você pode requerer a recuperação de aprendizado e a documentação necessária.

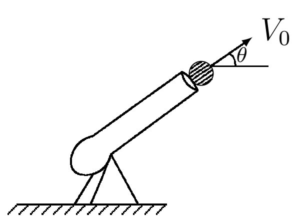
Chapter 2

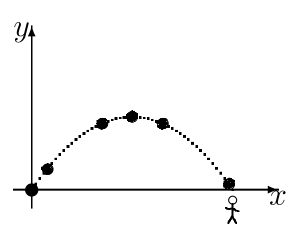
Porque estudar Cálculo

No que segue apresentamos alguns exemplos que pretendem demonstrar que a matemática desenvolvida até o final do ensino médio é insuficiente para abordar alguns problemas importantes com os quais nos deparamos.

Começamos recordando um problema elementar de Física do Ensino Médio.

Exemplo 1 (Lançamento Oblíquo de um Projétil)**.** *Imagine que, em uma batalha, saibamos que os projéteis lançados pelos nossos canhões tenham velocidade V_0 ao sair do canhão e que o inimigo situa-se a uma distância d de nossos canhões. Qual é ângulo de disparo para que o alvo seja atingido? Qual é o alcance máximo de nossos canhões? Qual é a altura máxima que o projétil alcançará?*





Solução: Em primeiro lugar, para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Para encontrar este modelo fazemos algumas suposições:

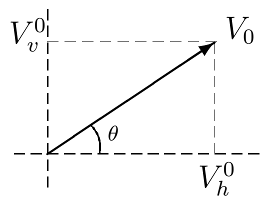
Suponhamos que

- a resistência do ar seja desprezível,
- a aceleração da gravidade seja constante,

- o ângulo de lançamento seja $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,
- a altura do canhão relativamente ao solo seja desprezível e que
- a altitude seja constante ao longo do campo de batalha.

Sejam m a massa do projétil e V_0 a sua velocidade inicial.

A velocidade inicial V_0 do projétil pode ser decomposta em velocidade vertical e velocidade horizontal iniciais, isto é



$$\begin{aligned} V_v^0 &= V_0 \mathrm{sen}\theta, \\ V_h^0 &= V_0 \cos\theta. \end{aligned}$$

Se g denota a aceleração da gravidade a velocidade vertical depende do tempo através da relação

$$\boxed{V_v(t) = V_0 \mathrm{sen}\theta - gt} \tag{2.0.1}$$

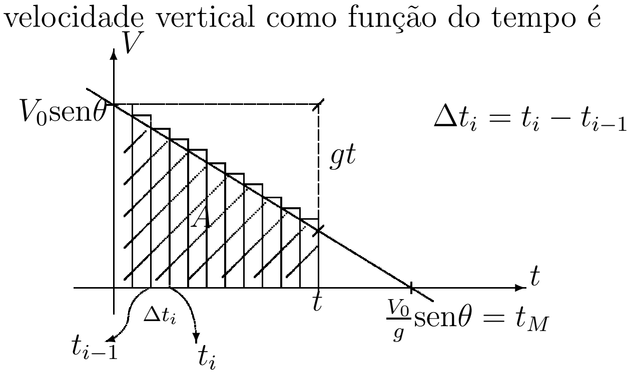
enquanto que a velocidade horizontal é constante ao longo do tempo.

O projétil atingirá a altura máxima no instante t_M tal que $V_v(t_M) = 0$, ou seja

$$\boxed{t_M = \frac{V_0}{g} \mathrm{sen}\theta.} \tag{2.0.2}$$

Como obter a altura do projétil como função do tempo?

Note que o gráfico da velocidade vertical como função do tempo é



Se $t>0$ e $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ é uma subdivisão do intervalo $[0,t]$ e $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Como em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ a velocidade é aproximadamente igual a $V_v(t_{i-1})$ temos que neste intervalo o deslocamento vertical é aproximadamente igual a

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) \sim V_v(t_{i-1})\Delta t_i$$

e o deslocamento vertical correspondente ao intervalo de tempo $[0,t]$ é aproximadamente igual a

$$y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \sim \sum_{i=1}^{n} V_v(t_{i-1})\Delta t_i \sim A$$

onde por $\sim$ queremos espressar o fato que a medida que o comprimento dos intervalos $[t_i, t_{i-1}]$ se aproxima de zero y se aproxima mais e mais da área A sob o gráfico da velocidade no intervalo $[0,t]$.

Como

$$A = V_0 \mathrm{sen}\theta t - \frac{1}{2} g t^2,$$

segue que

$$\boxed{y(t) = V_0 \mathrm{sen}\theta t - \tfrac{1}{2} g t^2} \qquad (2.0.3)$$

é o deslocamente vertical do projétil (altura do projétil depois de decorridos t unidades de tempo).

O deslocamenteo horizontal ocorre com velocidade constante $V_h = V_0 \cos\theta$. Logo

$$\boxed{x(t) = V_0 \cos\theta \; t} \qquad (2.0.4)$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical estamos preparados para resolver o problema proposto:

- O projétil alcançará altura máxima em $t=t_M=\frac{V_0}{g}\mathrm{sen}\theta$. Logo

$$\begin{aligned} y_M = y(t_M) \; &= V_0 \,\mathrm{sen}\theta \, t_M - \tfrac{1}{2} g \,(t_M)^2 \\ &= V_0 \,\mathrm{sen}\theta \,\tfrac{V_0}{g}\,\mathrm{sen}\theta - \tfrac{1}{2}\, g \tfrac{V_0^2}{g^2}\,\mathrm{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}\tfrac{V_0^2}{g}\,\mathrm{sen}^2\theta \end{aligned}$$

  e

$$\boxed{y_M = \tfrac{1}{2}\tfrac{V_0^2}{g}\,\mathrm{sen}^2\theta.} \qquad (2.0.5)$$

- O projétil atinge o seu alvo quando $y(t_a) = 0$. Logo $t_a = 2\frac{V_0}{g}\mathrm{sen}\theta$ o que implica

$$x_a = x(t_a) = 2\frac{V_0^2}{g}\mathrm{sen}\theta \cos\theta$$

  e

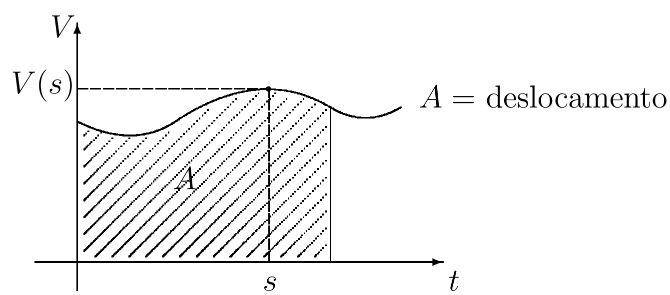
$$\boxed{x_a = \tfrac{V_0^2}{g}\mathrm{sen}2\theta.} \qquad (2.0.6)$$

- O alcance do projétil é máximo quando $\theta = \pi/4$.

O que você observa sobre a matemática contida neste exemplo?

1 O procedimento para obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente mas requer uma melhor justificativa. O processo de fazer Δt_i pequeno (tender a zero) exige uma melhor formulação que é dada pela noção de limite.

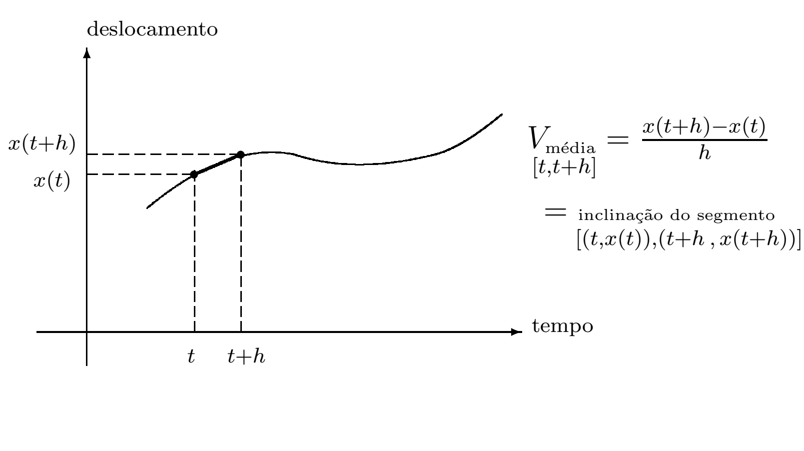
2 Se a velocidade depende do tempo de uma forma mais complicada podemos não ser capazes de encontrar a área sob o gráfico A de forma tão simples. Por exemplo, o projétil pode ser impulsionado durante o precurso (como ocorre no lançamento de foguetes). Deparamos então com o problema de calcular a área sob o gráfico de uma função



cuja resposta requer a introdução do conceito de integral, proximamente relacionado à noção de limite.

3 Quando a massa do projétil depende do tempo a segunda lei de Newton precisa de uma outra formulação para sermos capazes de equacionar o movimento e mesmo a velocidade instantânea para ser obtida como função do deslocamento precisa da introdução do conceito de derivada.

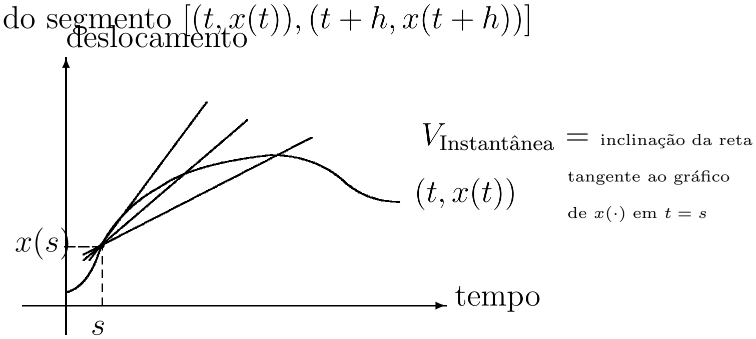
Exemplo 2. *Conhecido o deslocamento como função do tempo determinar a velocidade instantânea para cada instante de tempo.*



A velocidade média V_m no intervalo $[t, t+h]$ é dada por

$$\boxed{V_m = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}}$$

e é a inclinação do segmento $[(t, x(t)), (t+h, x(t+h))]$



A velocidade instantânea V_i no instante t é dada por

$$\boxed{V_i = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}}$$

e é a inclinação da reta tangente ao gráfico de x no instante t.

Aqui precisamos da noção de limite para definir a velocidade instantânea. O limite que define a velocidade instantânea é chamado derivada da função deslocamento x no instante t.

Vamos considerar os casos de Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Movimento Uniforme: Se um corpo se move ao longo de uma reta deslocando-se segundo a equação

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

então, a velocidade em cada instante t é obtida fazendo

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = v_0, \quad h > 0 \quad \text{pequeno}$$

e desta forma a velocidade em cada instante é v_0.

Movimento Uniformemente Variado:

Se um corpo se move ao longo de uma reta deslocando-se segundo a equação

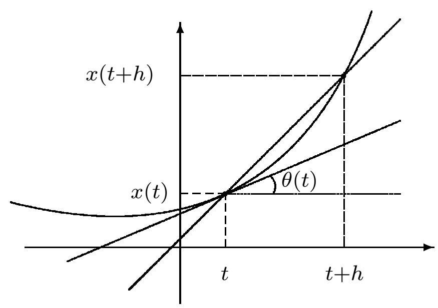
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

então, a velocidade em cada instante t é obtida fazendo

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = v_0 + at + \frac{a}{2} h, \quad h > 0 \quad \text{pequeno}$$

logo, no instante t a velocidade $v(t)$ é

$$v(t) = v_0 + at.$$



tg($\theta(t)$)=v(t)

A aceleração é obtida da velocidade da seguinte forma

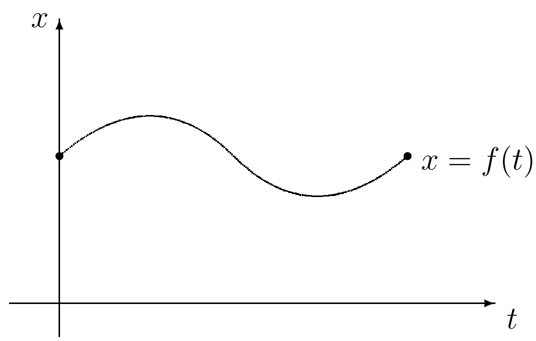
$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = a, \quad h > 0 \quad \text{pequeno}$$

então a aceleração em cada instante t é a.

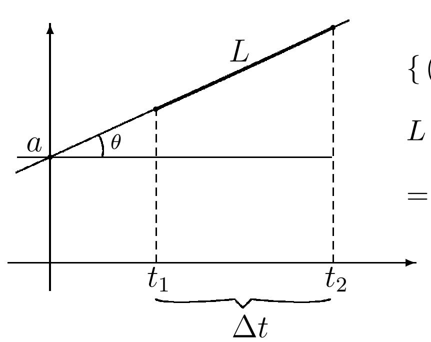
Observação: Quando o movimento tem expressões mais complicadas como determinar a velocidade e a aceleração?

Novamente vamos precisar das noções de limite e derivada.

Exemplo 3. *Cálculo do comprimento de uma curva dada como gráfico de uma função.*



Vamos considerar alguns casos particulares

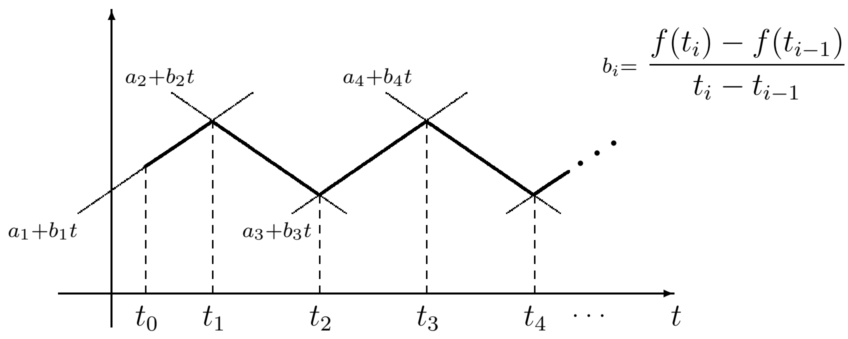


$$\{\,(t, f(t)) : t_1 \le t \le t_2\,\},\; b = \text{tg}\theta$$

$$L = \sqrt{(t_2-t_1)^2 + b^2(t_2-t_1)^2}$$

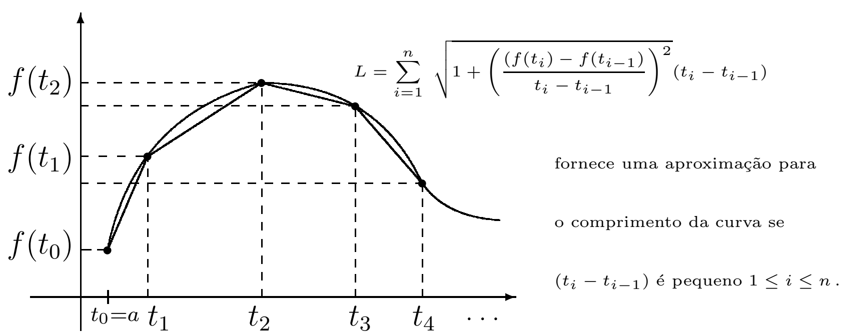
$$= \sqrt{1+b^2}(t_2-t_1) = \sqrt{1+b^2}\,\Delta t$$

Se, por outro lado, f tem uma poligonal por gráfico



$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+b_i^2}\ (t_i - t_{i-1}).$$

No caso geral

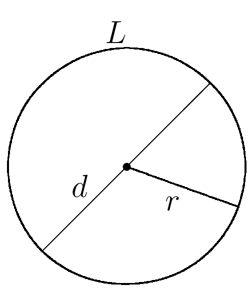


Para obter o valor exato vamos precisar introduzir as noções de limite, derivada e integral,

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}dt$$

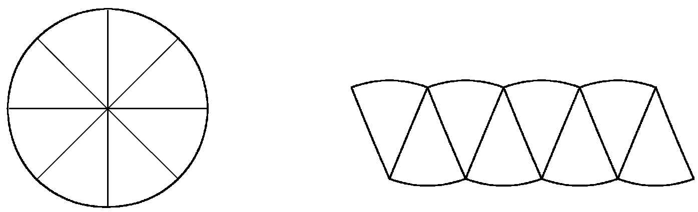
Exemplo 4. *A área de uma circunferência.*

O quociente entre o comprimento de uma circunferência e o diâmetro é um número real denotado por π.

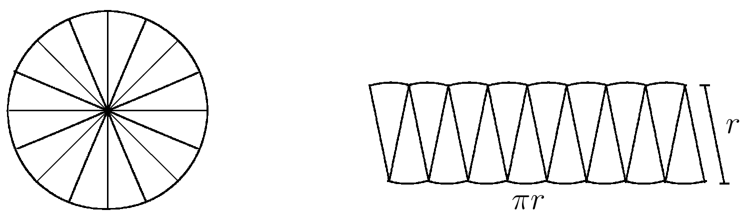


$$L = \pi\, d = 2\pi\, r$$

Vamos determinar a área da circunferência de raio r. A idéia de Archimedes (287-212 a.c.) foi dividir a circunferência em setores de igual área e reagrupá-los da seguinte forma

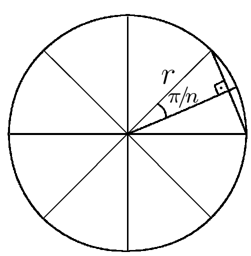


16 Setores



quanto maior o número de setores, na divisão acima, mais a área se aproxima de $\pi r.r = \pi r^2$.

A demonstração deste resultado envolve o conceito de limite. Se dividimos a circunferência em n setores iguais temos



$$A \sim 2n.r\text{sen}\frac{\pi}{n}.r\cos\frac{\pi}{n}.\frac{1}{2} \sim \pi r^2.\frac{\text{sen}\pi/n}{\pi/n}.\cos\pi/n.$$

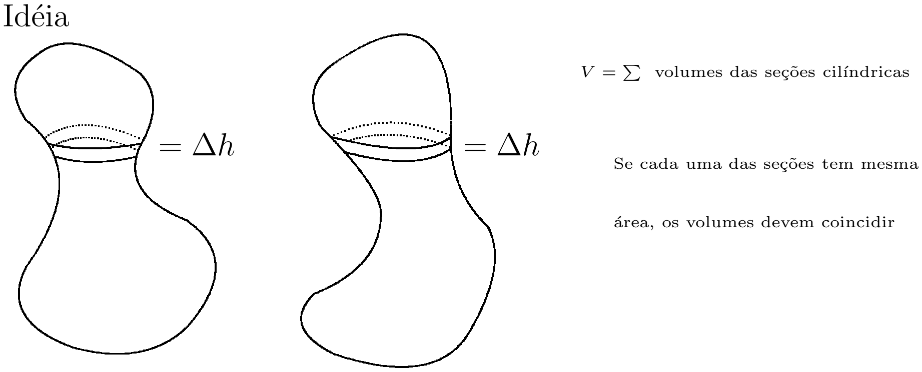
Se n é grande $\cos\pi/n \sim 1$ e $\frac{\text{sen}\pi/n}{\pi/n} \sim 1$ (primeiro limite fundamental) e teremos

$$A = \pi r^2$$

é, portanto, fundamental entendermos o processo de passagem ao limite para encontrarmos soluções para problemas simples como o cálculo da área de um círculo.

Exemplo 5. *O volume da esfera e o Princípio de Cavalieri*

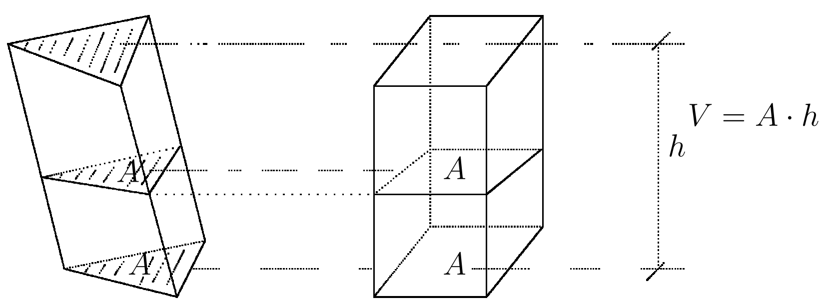
Idéia



Aqui precisamos do processo de passagem ao limite para mostrar que o volume do sólido pode ser aproximado pela soma dos volumes das seções. Este resultado é axiomatizado no seguite princípio.

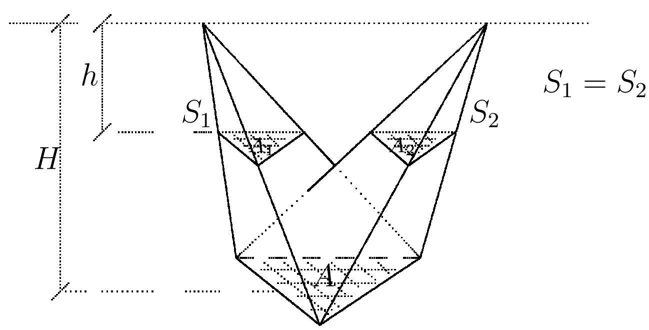
Teorema 1 (Princípio de Cavalieri)**.** *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então estes sólidos tem o mesmo volume.*

Aplicações:
Volume de um prisma triangular

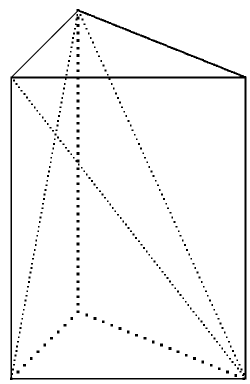


Volume de uma pirâmide triangular

Observe primeiramente que do Princípio de Cavalieri podemos mover livremente o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo ao plano da base sem alterar o seu volume.



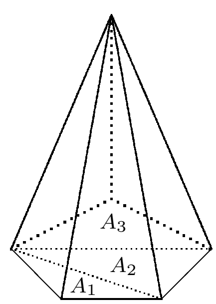
Lembrando que o volume de um prisma com área da base A e altura h é $V = A.h$ e aplicando o resultado acima à figura abaixo temos o volume de uma pirâmide triangular.



$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3}\ V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3}\, A \cdot h$$

Volume de uma pirâmide qualquer

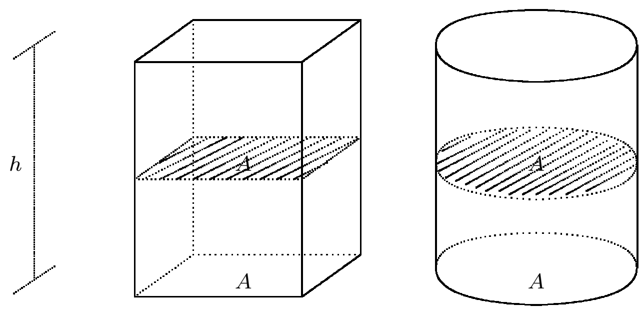
O volume de uma pirâmide qualquer é obtido observando que uma pirâmide qualquer é a união de pirâmides triangulares. Assim



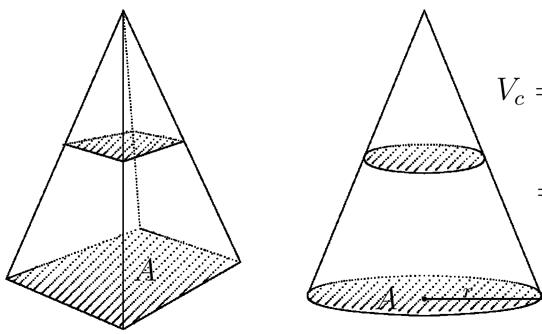
$$V = \frac{1}{3}\ A_1\, h + \frac{1}{3}\, A_2\, h + \frac{1}{3}\ A_3\, h = \frac{1}{3}\, A\, h$$

Volume de um cone e de um cilindro

Para encontrar o volume de um cilíndro e o volume de um cone basta observar as figuras abaixo



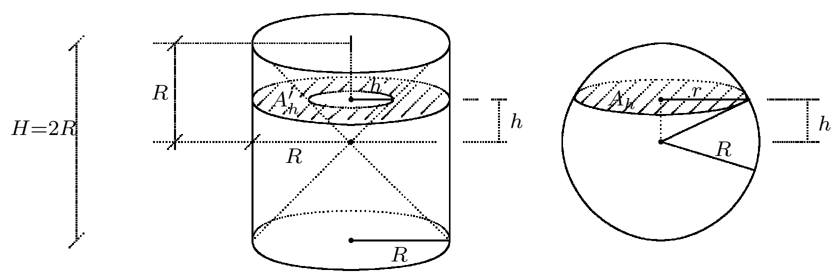
$$V = A \cdot h$$



$$V_c = \frac{1}{3}\, A \cdot h$$
$$= \frac{1}{3}\, \pi\, r^2 \cdot h$$

Volume da Esfera

Para calcular o volume da esfera de raio R construímos um cilindro reto de raio da base R e altura $2R$ e retiramos dos mesmo os dois cones centrais formados pela união do centro do cilindro à borda da base e do topo do cilindro (veja figura a seguir). Se apoiamos a esfera no plano da base do cilindro e seccionamos ambos os sólidos por um plano paralelo ao plano da base do cilindro (conforme figura) obtemos um anel (ao sectionar o cilindro sem o cone central) de área A'_h e uma circunferência de área A_h.



Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h$$

Segue do Princípio de Cavalieri que o volume V_E da esfera é igual ao volume do cilindro menos os cones centrais. Assim

$$V_E = \pi R^2.H - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{H}{2} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

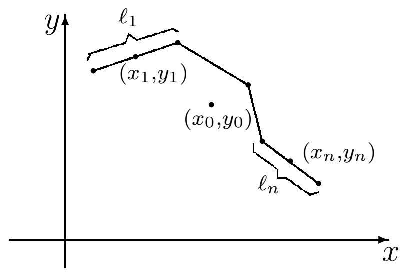
e portanto

$$\boxed{V_E = \tfrac{4}{3}\pi R^3}.$$

Exemplo 6. *Quanta borracha é necessária para fazer uma câmara de ar com raio menor* $10cm$*, raio maior* $50cm$ *e espessura* $0,1cm$*.*

Para resolver este problema introduzimos a noção de centro de massa de uma poligonal plana (c denota a densidade linear).

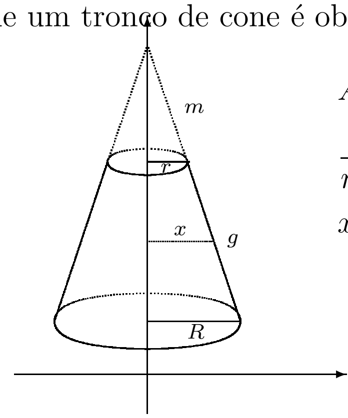
Inicialmente definimos o ponto médio de um segmento como o seu centro de massa. Assim o centro de massa de uma poligonal é dado por:



$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{c\cdot\ell_1\cdot x_1+\cdots+c\cdot\ell_n\cdot x_n}{c\cdot\ell_1+\cdots+c\cdot\ell_n}\\
&= \frac{\ell_1\cdot x_1+\cdots+\ell_n\cdot x_n}{\ell_1+\cdots+\ell_n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{c\cdot\ell_1\cdot y_1+\cdots+c\cdot\ell_n\cdot y_n}{c\cdot\ell_1+\cdots+c\cdot\ell_n}\\
&= \frac{\ell_1\cdot y_1+\cdots+\ell_n\cdot y_n}{\ell_1+\cdots+\ell_n}
\end{aligned}
$$

A área lateral de um tronco de cone é obtida da seguinte forma,

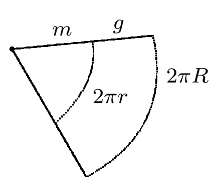


$$
A_T = ?
$$

$$
\frac{R}{m+g}=\frac{r}{m}=\frac{R-r}{g}
$$

$$
x=\tfrac{R+r}{2}
$$

onde x é a coordenada do centro de gravidade do segmento ou a distância do centro de gravidade do segmento ao eixo de rotação.



$$
\cancel{2}\pi(\cancel{m+g}) \;—\; \pi(m+g)^{\cancel{2}}
$$

$$
\cancel{2}\pi R \;—\; A_E
$$

$$
A_E=\pi R(m+g)
$$

$$
A_I=\pi r m
$$

Assim a área lateral A_T do tronco de cone é dada por

$$
A_T=\pi R(m+g)-\pi r m=\pi R g+\pi(R-r)m=\pi(R+r)m=2\pi\frac{R+r}{2}g
$$

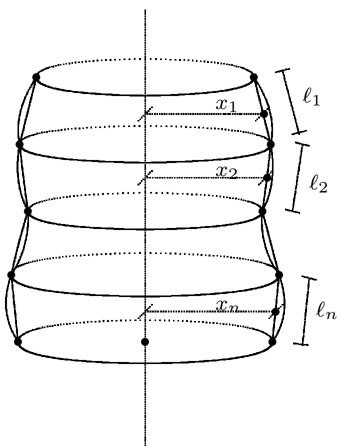
e desta forma

$$
\boxed{A_T=2\pi x g}
$$

Note ainda que $2\pi x$ é a distância que o centro de gravidade percorre ao girarmos o segmento em torno do eixo de rotação para produzir o tronco de cone.

Desta forma a área da superfície obtida ao girarmos um segmento em torno de um eixo de rotação (tronco de cone) é o produto da distância percorrida pelo centro de massa do segmento pelo comprimento do segmento.

Isto se generaliza facilmente para a superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo de rotação pois esta superfície é formada pela justaposição de diversos troncos de cone

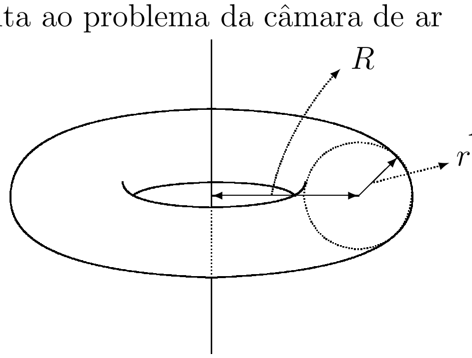


$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi\, x_1 \cdot \ell_1 + \cdots + 2\pi\, x_n \cdot \ell_n \\
&= 2\pi \, \frac{(x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n)}{\ell_1 + \cdots + \ell_n} \cdot L \\
&= 2\pi\, x_0 \cdot L \quad , \quad L = \ell_1 + \cdots + \ell_n
\end{aligned}
$$

Um processo de passagem ao limite (tomando mais e mais pontos sobre a curva) resulta no seguinte resultado

Teorema 2 (Teorema de Pappus)**.** *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita por seu centro de massa.*

De volta ao problema da câmara de ar



$$
\begin{aligned}
A_c &= 2\pi r \cdot 2\pi R \\
&= 4\pi^2\, Rr
\end{aligned}
$$

O volume de borracha necessário para construir tal câmara é, aproximadamente,

$$V = 4\pi^2.50cm^3.$$

Chapter 3

Como Aprender Cálculo

Não há uma receita de como aprender cálculo mas algumas dicas podem auxiliar o estudante:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto atentamente e pacientemente procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui.
- Acompanhe os exemplos passo a passo procurando desvendar o porque de cada passagem e tentando enxergar porque o autor adotou esta solução. Tente soluções alternativas
- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.
- É muito importante frequentar as monitorias ainda que seja somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas.
- Não desista de um exercício se a sua solução não é óbvia, insista e descubra o prazer de desvendar os pequenos mistérios do cálculo.