Cálculo Diferencial e Integral - Notas de Aula

Márcia Federson e Gabriela Planas

1 de março de 2013

Sumário

Capítulo 1

Os Números Reais

1.1 Os Números Racionais

Indicamos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais respectivamente. Assim

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \\ &\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, \\ &\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}\,;\, a, b \in \mathbb{Z}\,,\, b \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

A **soma** e o **produto** em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \\ &\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}\,. \end{aligned}$$

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações " $+$ " e " $\cdot$ " satisfaz as propriedades de um corpo. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes:

(A1) (**associativa**) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

(D) (**distributiva da multiplicação**) $x(y + z) = xy + xz$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo $\mathbb{Q}$. Vamos enunciar algumas e demonstrar outras a seguir.

Proposição 1.1 (Lei do Cancelamento). *Em $\mathbb{Q}$, vale*

$$\boxed{x + z = y + z \implies x = y\,.}$$

Prova.

$$\begin{aligned} x + z &= y + z \overset{+(-z)}{\Longrightarrow} (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) \overset{(A1)}{\Longrightarrow} x + (z + (-z)) \\ &= y + (z + (-z)) \overset{(A4)}{\Longrightarrow} x + 0 = y + 0 \overset{(A3)}{\Longrightarrow} x = y\,. \end{aligned}$$

□

As seguintes proposições seguem da Lei do Cancelamento.

Proposição 1.2. *O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.*

Proposição 1.3. *O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.*

Proposição 1.4. *Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.*

Proposição 1.5. *Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.*

Definição 1.1. *Diremos que*

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-negativo}, \text{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \\ \textbf{positivo}, \text{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-positivo}, \text{ se } \frac{a}{b} \text{ não for positivo} \\ \textbf{negativo}, \text{ se } \frac{a}{b} \text{ não for não-negativo.} \end{cases}$$

Definição 1.2. *Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Diremos que x é* **menor do que** *y e escrevemos $x < y$, se existir $t \in \mathbb{Q}$ positivo tal que*

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, poderemos dizer que y é **maior do que** *x e escrevemos $y > x$. Em particular, teremos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.*

Se $x < y$ ou $x = y$, então escreveremos $x \leq y$ e lemos "*x é menor ou igual a y*". Da mesma forma, se $y > x$ ou $y = x$, então escreveremos $y \geq x$ e, neste caso, lemos "*y é maior ou igual a x*". Escreveremos $x \geq 0$ se x for não-negativo e $x \leq 0$ se x for não-positivo.

A quádrupla $(\mathbb{Q}\,,\, +\,,\, \cdot\,,\, \leq)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, ou seja, além das propriedades anteriores, também valem as propriedades seguintes:

(O1) (**reflexiva**) $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leq y$ e $y \leq x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leq y\,,\ y \leq z \implies x \leq z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$;

(OA) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$;

(OM) $x \leq y$ e $z \geq 0 \implies xz \leq yz$.

Proposição 1.6. *Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado $\mathbb{Q}$, valem*

(a) $\left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq w \end{array}\right\} \implies x + z \leq y + w.$

(b) $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array}\right\} \Longrightarrow xz \leq yw.$

Prova. Vamos provar o ítem (b).

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array}\right\} \stackrel{(OM)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} xz \leq yz \\ yz \leq yw \end{array}\right\} \stackrel{(O3)}{\Longrightarrow} xz \leq yw$$

$\square$

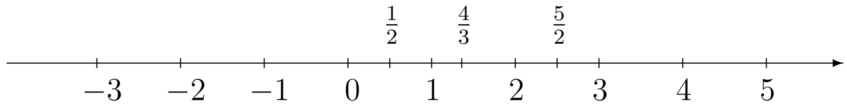
Outras propriedades:

Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$. Então valem

- $x < y \iff x + z < y + z$;
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$;
- $z > 0 \iff -z < 0$;
- Se $z > 0$, então $x < y \iff xz < yz$;
- Se $z < 0$, então $x < y \iff xz > yz$;
- $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{array}\right\} \Longrightarrow xz < yw$;
- $0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;
- (**tricotomia**) $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$;
- (**anulamento do produto**) $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

1.2 Os Números Reais

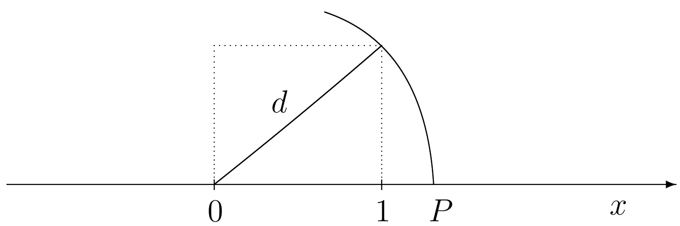
Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real.



Se P por a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Nem todo ponto da reta real é racional. Considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Seja P a intersecção do eixo x com a circunferência de raio d.



Mostraremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição 1.7. *Seja $a \in \mathbb{Z}$. Temos*

(a) Se a for ímpar, então a^2 é ímpar;

(b) Se a^2 for par, então a é par.

Prova.

(a) Se a for ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k + 1$. Daí segue que

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\ell}) + 1 = 2\ell + 1\,,$$

onde $\ell = 2k^2 + 2k$, e portanto a^2 também será ímpar.

(b) Suponha, por absurdo, que a não é par. Logo a é ímpar. Então, pela Proposição 1.7 (a), a^2 também é ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto a é par necessariamente.

$\square$

Proposição 1.8. *A equação $x^2 = 2$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{Q}$. Então podemos tomar $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Logo $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$, ou seja, $a^2 = 2b^2$ e portanto a^2 é par. Segue da Proposição 1.7 (b) que a também é par. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$. Mas

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 2b^2 \\ a = 2k \end{array}\right\} \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2 .$$

Portanto b^2 é par e, pela Proposição 1.7 (b), b também é par. Mas isto implica que $\dfrac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por 2) o que é uma contradição. Portanto não existe $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$. $\square$

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional**.

Em $\mathbb{R}$, definimos uma adição $(+)$, uma multiplicação $(\cdot)$ e uma relação de ordem $(\leq)$. Então a quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado.

Para resolver uma equação em x é necessário encontrar o conjunto dos números reais x que satisfazem a equação. Para resolver uma inequação em x é necessário encontrar o conjunto dos números reais x que satisfazem a desigualdade.

Exemplo 1.1. *A inequação $x - 2 < 4$ resulta em $x < 6$.*

Exemplo 1.2. *Resolva a inequação $-3(4 - x) \leq 12$.*

Multiplicando a ambos os lados da desigualdade por $-\frac{1}{3}$, temos $4 - x \geq -4$. Subtraindo 4 resulta em $-x \geq -8$ e multiplicando por -1 obtemos $x \leq 8$.

Exemplo 1.3. *Resolva a inequação $\pi x + 1729 < 4x + 1$.*

Vamos começar adicionando o oposto de $1729 + 4x$ dos dois lados da inequação. Assim

$$\pi x + 1729 - 1729 - 4x < 4x + 1 - 1729 - 4x$$

ou seja

$$\pi x - 4x < 1 - 1729$$

que também pode ser escrita como

$$(\pi - 4)x < -1728.$$

Agora multiplicaremos a última inequação pelo inverso de $\pi - 4$, que é negativo. Obtemos, então,

$$x > -\frac{1728}{\pi - 4}$$

ou seja

$$x > \frac{1728}{4 - \pi}.$$

Exemplo 1.4. *Qual é o sinal de* $\dfrac{x+1}{1-x}$ *em função de* x*?*

O numerador é positivo quando $x > -1$, negativo quando $x < -1$ e zero quando $x = -1$. O denominador é positivo quando $x < 1$, negativo quando $x > 1$ e zero quando $x = 1$. Portanto a fração será positiva quando $-1 < x < 1$, negativa quando $x < -1$ ou $x > 1$ e zero quando $x = -1$.

Exercício: Resolva a inequação $\dfrac{2x+1}{x-4} < 0$. $[R : -\frac{1}{2} < x < 4]$.

1.3 Módulo de um Número Real

Definição 1.3. *Seja* $x \in \mathbb{R}$. *O* **módulo** *ou valor absoluto de* x *é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Segue da definição acima que $|x| \geq 0$ e $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.5. *Mostre que* $|x|^2 = x^2$, *ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.*

Lembre que $\sqrt{x}$ significa *raiz quadrada positiva de x*. Logo, segue do Exemplo 1.5 que

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Exemplo 1.6. *A equação $|x| = r$, com $r \geq 0$, tem como soluções os elementos do conjunto $\{r, -r\}$.*

O resultado do Exemplo 1.6 pode ser generalizado como no exemplo seguinte.

Exemplo 1.7. *A equação $|ax - b| = r$, com $r \geq 0$ e $a \neq 0$, tem como soluções os elementos do conjunto $\left\{\dfrac{b+r}{a}, \dfrac{b-r}{a}\right\}$.*

Exemplo 1.8. *Resolva a equação $|2x + 1| = 3$.*

Temos $2x + 1 = 3$ ou $2x + 1 = -3$, o que nos leva à solução $x = 1$ ou $x = -2$.

Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. Então a **distância** de P a Q (ou de x a y) é dada por $|x - y|$. Assim $|x - y|$ é a **medida** do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0.

O próximo exemplo diz que a distância de x a 0 é menor do que r, com $r > 0$, se e somente se x estiver entre $-r$ e r.

Exemplo 1.9. *Seja com $r > 0$. Então* $\quad |x| < r \quad \Longleftrightarrow \quad -r < x < r$.

Suponhamos que $|x| < r$. Analisando o sinal de x, temos

- $x \geq 0 \implies r > |x| = x$,
- $x < 0 \implies r > |x| = -x \implies -r < x$.

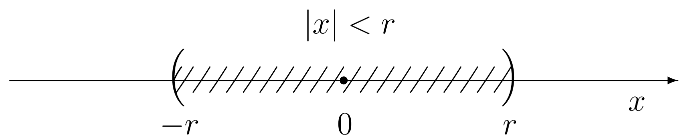
Portanto $-r < x < r$.

Agora suponhamos que $-r < x < r$. Então,

- $x \geq 0 \implies |x| = x < r$,
- $x < 0 \implies -x = |x| < r$.

Portanto, $|x| < r$.

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



Agora, vamos generalizar o Exemplo 1.9.

Exemplo 1.10. *Resolva a inequação $|ax - b| < r$ na variável x, com $r > 0$ e $a \neq 0$.*

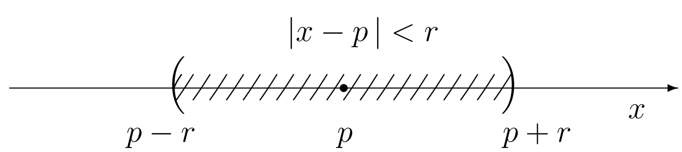
De forma similar ao exemplo anterior, $-r < ax - b < r$. Somando b aos termos da inequação obtemos

$$b - r < ax < b + r.$$

Logo,

- $a > 0 \implies \dfrac{b-r}{a} < x < \dfrac{b+r}{a}$;
- $a < 0 \implies \dfrac{b+r}{a} < x < \dfrac{b-r}{a}$.

Como caso particular do Exemplo 1.10, se a distância de x a p for menor do que r, isto é, $|x - p| < r$, $r > 0$, então x estará entre $p - r$ e $p + r$. Geometricamente,



Exemplo 1.11. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale*

$$\boxed{\,|xy| = |x|\,|y|\,.}$$

Temos que $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2$. Como $|xy| \geq 0$ e $|x||y| \geq 0$ resulta $|xy| = |x|\,|y|$.

Exemplo 1.12 (Desigualdade triangular). *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale*

$$\boxed{|\,x + y| \leq |\,x| + |\,y|\,.}$$

Somando $-|\,x| \leq x \leq |\,x|$ e $-|\,y| \leq y \leq |\,y|$ obtemos $-|\,x| - |\,y| \leq x + y \leq |\,x| + |\,y|$.

Exemplo 1.13. *Descreva o valor de $|\,x+1| + |\,x-1|$ sem utilizar o módulo.*

- Se $x \geq 1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = x+1 \\ |\,x-1| = x-1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1| + |\,x-1| = x+1+x-1 = 2x$.
- Se $-1 \leq x < 1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = x+1 \\ |\,x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1| + |\,x-1| = x+1-x+1 = 2$.
- Se $x < -1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = -x-1 \\ |\,x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1| + |\,x-1| = -x-1-x+1 = -2x$.

Logo $|\,x+1| + |\,x-1| = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ -2x, & x < -1. \end{cases}$

Definição 1.4. *Um* **intervalo** *em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$ **Intervalo fechado**,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$ **Intervalo aberto**,
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}$,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}$,
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}$,
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x\}$,
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}$,
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.14. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2x - 3 < x + 1\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < 4\} = (-\infty, 4)$.

1.4 *Limitação de Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definição 1.5. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito* **limitado**, *se existir $L > 0$ tal que $|x| \leq L$, para todo $x \in A$.*

Proposição 1.9. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, existir $L > 0$ tal que $A \subset [-L, L]$.*

Exemplo 1.15.

(a) $A = [0, 1]$ *é limitado*

(b) $\mathbb{N}$ *não é limitado (será mostrado mais tarde)*

(c) $B = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *é limitado*

(d) $C = \left\{ \dfrac{2n - 1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *é limitado.*

Definição 1.6. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito* **ilimitado**, *se ele não for limitado.*

Proposição 1.10. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será ilimitado se, e somente se, para todo $L > 0$, existir $x \in A$ tal que $|x| > L$.*

Definição 1.7. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Diremos que*

- *A será dito* **limitado superiormente**, *se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq L$, para todo $x \in A$.*

  Neste caso, L será chamado **limitante superior** *ou* **cota superior** *de A.*

- *A será dito* **limitado inferiormente**, *se existir ℓ tal que $x \geq \ell$, para todo $x \in A$.*

  Neste caso, ℓ será chamado **limitante inferior** *ou* **cota inferior** *de A.*

Segundo a definição acima, podemos notar que $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, A for limitado superiormente e inferiormente.

Exemplo 1.16.

(a) Considere $A = [0, 1)$. Então

-2 e 0 são limitantes inferiores de A;

1, π e 101 são limitantes superiores de A.

(b) $\mathbb{N}$ *não é limitado mas é limitado inferiormente por 0, pois* $0 \leq x$, *para todo* $x \in \mathbb{N}$.

(c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$ *não é limitado, mas é limitado superiormente por* L, *onde* $L \geq \sqrt{2}$.

Definição 1.8. *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente (respectivamente limitado inferiormente),* $A \neq \emptyset$.

- *Se* $L \in \mathbb{R}$ *for cota superior (resp. cota inferior) de* A *e para toda cota superior (resp. cota inferior)* $\overline{L}$ *de* A, *tivermos*

$$L \leq \overline{L} \text{ (resp. } \overline{L} \leq L\text{),}$$

então L *será chamado* **supremo** *(resp.* **ínfimo***) de* A. *Neste caso, escreveremos*

$$L = \sup A \text{ (resp. } L = \inf A\text{).}$$

- *Se* $L = \sup A \in A$, *então* L *será* **máximo** *(resp.* **mínimo** *de* A*). Neste caso, escreveremos*

$$L = \max A \text{ (resp. } L = \min A\text{).}$$

Proposição 1.11. *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente,* $A \neq \emptyset$. *Então* $L = \sup A$ *se, e somente se, valerem as propriedades seguintes*

(a) L *é cota superior de* A.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $a \in A$ *tal que* $a > L - \varepsilon$.

Analogamente temos

Proposição 1.12. *Seja* $A \subset \mathbb{R}$ *limitado inferiormente,* $A \neq \emptyset$. *Então* $L = \inf A$ *se, e somente se, valem as seguintes propriedades*

(a) L *é cota inferior de* A.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $a \in A$ *tal que* $a < L + \varepsilon$.

Exemplo 1.17.

(a) Seja $A = (0, 1]$. *Então* $0 = \inf A$ *e* $1 = \max A$.

(b) Seja $B = \mathbb{N}$. *Então* $0 = \min \mathbb{N}$.

(c) Seja $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. Então $\sqrt{2} = \sup C$ e $-\sqrt{2} = \inf C$. Note que $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \notin C$.

Axioma 1.1 (da Completeza ou do Sup)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se A for limitado superiormente, então existirá $L = \sup A$.*

Proposição 1.13. *Se $A \subset \mathbb{R}$ for limitado inferiormente (superiormente), então o conjunto $-A = \{-x : x \in A\}$ será limitado superiormente (inferiormente) e $\inf A = -\sup(-A)$ (resp. $\sup A = -\inf(-A)$).*

Corolário 1.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Se A for limitado inferiormente, então existirá $L = \inf A$.*

Corolário 1.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado, $A \neq \emptyset$. Então A admite ínfimo e supremo.*

Teorema 1.1 (Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$)**.** *Seja $x \neq 0$. Então o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado.*

Prova. Suponhamos, primeiramente, que $x > 0$ e suponhamos, por absurdo, que A seja limitado. Então existirá $L = \sup A$ pois $A \neq \emptyset$ (por que?). Logo, dado $m \in \mathbb{N}$, existirá $x \in \mathbb{R}$ tal que $L - x < mx$ (veja a Proposição 1.11). Portanto $L < (m+1)x$ o que contradiz a suposição.

O caso $x < 0$ segue de modo análogo. □

Corolário 1.3. *O conjunto dos números naturais não é limitado superiormente.*

Corolário 1.4. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Corolário 1.5. *Se $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, então $\inf A = 0$.*

Definição 1.9. *Uma* **vizinhança** *de $a \in \mathbb{R}$ é qualquer intervalo aberto da reta contendo a .*

Exemplo 1.18. *O conjunto $V_\delta(a) := (a - \delta \, , \, a + \delta)$, onde $\delta > 0$, é uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.10. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Se para toda vizinhança $V_\delta(b)$ de b existir $a \in V_\delta(b) \cap A$, com $a \neq b$, então b será dito* **ponto de acumulação** *de A.*

Exemplo 1.19.

(a) Seja $A = (a, b)$. Então o conjunto dos pontos de acumulação de A é $[a, b]$.

(b) Seja $B = \mathbb{Z}$. Então B não tem pontos de acumulação.

(c) Qualquer subconjunto finito de $\mathbb{R}$ não admite pontos de acumulação.

Exercício: Mostre que se um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiver um ponto de acumulação, então A será um conjunto com infinitos elementos.

Definição 1.11. *Seja $B \subset \mathbb{R}$. Um ponto $b \in B$ será dito um* **ponto isolado** *de B, se existir $\delta > 0$ tal que $V_\delta(b)$ não contém pontos de B distintos de b.*

Exemplo 1.20.

(a) Seja $B = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. Então o conjunto dos pontos de acumulação de B é $\{0\}$ e o conjunto dos pontos isolados de B é o próprio conjunto B.

(b) O conjunto $\mathbb{Z}$ possui apenas pontos isolados.

Observação: Podem haver conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo $\mathbb{Z}$). No entanto, todo conjunto infinito e limitado possui pelo menos um ponto de acumulação.

Pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$, podemos provar a proposição seguinte.

Proposição 1.14. *Qualquer intervalo aberto não-vazio contém um número racional.*

Daí, segue que

Corolário 1.6. *Qualquer intervalo aberto não-vazio contém um número infinito de números racionais.*

Proposição 1.15. *O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{R}$.*

Exercícios:

(a) Mostre que se r for um número racional não nulo, então $r\sqrt{2}$ será um número irracional.

(b) Mostre que todo intervalo aberto contém um número irracional.

(c) Mostre que todo intervalo aberto contém um número infinito de números irracionais.

(d) Mostre que qualquer número real é ponto de acumulação do conjunto dos números irracionais.

Capítulo 2

Funções

2.1 Noções Gerais

O objeto fundamental do cálculo são as funções. As funções surgem quando uma quantidade depende de outra. Por exemplo, a área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona r com A é dada por $A = \pi r^2$, neste caso dizemos que A é uma função de r. Outros exemplos são, a população P de uma determinada espécie depende do tempo t, o custo C de envio de um pacote pelo correio depende de seu peso w.

Definição 2.1. *Dados dois conjuntos $A, B \neq \emptyset$, uma* **função** *f de A em B (escrevemos $f : A \to B$) é uma lei ou regra que a cada $x \in A$, associa um único elemento $f(x) \in B$. Temos*

- *A é chamado* **domínio** *de f ;*
- *B é chamado* **contra-domínio** *de f ;*
- *o conjunto*

  $$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B\,;\, y = f(x),\ x \in A\}\,.$$

  é chamado **imagem** *de f .*

Notações alternativas. Seja $f : A \to B$ uma função. Podemos denotar

- $D_f = D(f) = A$ para o domínio de f;
- $f(D_f) := \mathrm{Im}(f)$ para a imagem de f.

Também podemos descrever a ação de f ponto a ponto como

$$x \in A \ \mapsto \ f(x) \in B\,.$$

Convenção: Se o domínio de uma função não é dado explicitamente, então, por convenção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais x para os quais $f(x)$ é um número real.

Definição 2.2. *Sejam $f : A \to B$ uma função e $A, B \subset \mathbb{R}$. O conjunto*

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

é chamado **gráfico** *de f .*

Decorre da definição acima que $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f. Observe que, por exemplo, uma circunferência não representa o gráfico de uma função.

Exemplo 2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos*

(a) **função constante***: $f(x) = k$;*

(b) **função identidade***: $f(x) = x$;*

(c) **função linear***: $f(x) = ax$;*

(d) **função afim***: $f(x) = ax + b$;*

(e) **função polinomial***: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_ix_i$; em particular,*

se $n = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma **função quadrática***,*

se $n = 3$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é uma **função cúbica***;*

(f) **função potência***: $f(x) = x^a$, onde a é uma constante; em particular,*

se $a = \dfrac{1}{n}$, $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo, é uma **função raiz***; temos que $D_f = [0, +\infty)$ se n é par e $D_f = \mathbb{R}$ se n é ímpar;*

(g) **função racional**: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, *onde* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são funções polinomiais. Note que* $D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\, q(x) \neq 0\}$*;*

(h) **função algébrica**: *função construída usando operações algébricas começando com polinômios; por exemplo,* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{(x-4)}{x^4+\sqrt{2x}}\sqrt[3]{x+1}$, $D_g = (0, +\infty)$.

Definição 2.3. *Sejam* $f : A \to B$ *e* $D \subset A$. *Denotamos por* $f\big|_D$ *a* **restrição** *de* f *ao subconjunto* D *de* A. *Então*

$$f\big|_D(x) = f(x), \quad \textit{para todo } x \in D.$$

Observação: Seja $D \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por $I_D : D \to D$ a **função identidade** definida por $I_D(x) = x$ para todo $x \in D$.

Exemplo 2.2. Função definida por partes: *definida de forma diversa em diferentes partes de seu domínio; por exemplo,*

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \leq 1, \\ x^2 & \text{se } x > 1; \end{cases} \qquad (b)\ g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplo 2.3. *Esboce o gráfico de* $f(x) = |x-1| + 3$.

Primeiro eliminamos o módulo. Assim, $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq 1, \\ 4-x & \text{se } x < 1. \end{cases}$

Exemplo 2.4. *Um fabricante de refrigerante quer produzir latas cilíndricas para seu produto. A lata dever ter um volume de 360 ml. Expresse a área superficial total da lata em função do seu raio e dê o domínio da função.*

Seja r o raio da lata e h a altura. A área superficial total (topo, fundo e área lateral) é dada por $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Sabemos que o volume $V = \pi r^2 h$ deve ser de 360 ml, temos $\pi r^2 h = 360$, ou seja $h = 360/\pi r^2$. Portanto, $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r 360/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 720/r$. Como r só pode assumir valores positivos, $D_S = (0, +\infty)$.

Exemplo 2.5. *Esboce os gráficos de* $f(x) = x^2 - 1$ *e* $g(x) = x^2 + 1$.

Fórmulas de translação:

- $f(x)+k$ translada o gráfico de f, k unidades *para cima* se $k>0$ e $|k|$ unidades *para baixo* se $k<0$,

- $f(x+k)$ translada o gráfico de f, k unidades *para a esquerda* se $k>0$ e $|k|$ unidades *para a direita* se $k<0$.

Exemplo 2.6. *Esboce os gráficos de* $f(x)=(x-1)^2$ *e* $g(x)=(x+1)^2$.

Exemplo 2.7. *Esboce o gráficos de* $f(x)=x^2+6x+10$.

Completando o quadrado, escrevemos $f(x)=(x+3)^2+1$. Logo, o gráfico é a parábola $y=x^2$ deslocada 3 unidades para esquerda e então uma unidade para cima.

2.2 Operações com Funções

Definição 2.4. *Dadas funções* $f: D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g: D_g \to \mathbb{R}$ *e dado* $x \in D_f \cap D_g$, *podemos definir algumas operações com funções:*

- **soma**: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$;

- **produto**: $(fg)(x)=f(x)g(x)$;

- **quociente**: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *se* $g(x)\neq 0$.

Exemplo 2.8. *Se* $f(x)=\sqrt{7-x}$ *e* $g(x)=\sqrt{x-2}$, *então* $D_f=(-\infty,7]$, $D_g=[2,+\infty)$ *e* $D_f\cap D_g=[2,7]$. *Temos que,*

(a) $(f+g)(x)=\sqrt{7-x}+\sqrt{x-2} \qquad 2\le x\le 7,$

(b) $(fg)(x)=\sqrt{7-x}\sqrt{x-2}=\sqrt{(7-x)(x-2)} \qquad 2\le x\le 7,$

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{\dfrac{7-x}{x-2}} \qquad 2< x\le 7.$

Definição 2.5. *Dadas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, com $Imf \subset D_g$, definimos a* **função composta**

$$h : D_f \to \mathbb{R}$$

por

$$h(x) = g(f(x)), \quad \textit{para todo } x \in D_f.$$

Neste caso, escrevemos $h = g \circ f$.

Exemplo 2.9. *Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$, então*

(a) $g \circ f(x) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 3(2x + 1) = 4x^2 + 10x + 4,$

(b) $f \circ g(x) = f(x^2 + 3x) = 2(x^2 + 3x) + 1 = 2x^2 + 6x + 1.$

Observação: Em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo 2.10. *Encontre $f \circ g \circ h$ se $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.*

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) = f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}.$$

Exercício: Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encontre e determine o domínio das funções:

$(a)\ f \circ g(x) = \sqrt[4]{2 - x},\ D_{f\circ g} = (-\infty, 2]$ $\qquad (b)\ g \circ f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x}},\ D_{g\circ f} = [0, 4]$

$(c)\ f \circ f(x) = \sqrt[4]{x},\ D_{f\circ f} = [0, +\infty)$ $\qquad (d)\ g \circ g(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}},\ D_{g\circ g} = [-2, 2].$

2.3 Definições Adicionais

No que segue, consideraremos $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição 2.6. *Diremos que*

- *f é* **par** *se, e somente se, $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in D_f$;*
- *f é* **ímpar** *se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D_f$.*

Observação: O significado geométrico de uma função par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y e de uma função ímpar é que seu gráfico é simétrico em relação à origem.

Exemplo 2.11. *$f(x) = x^2$ é par; a função identidade $I(x) = x$ é ímpar; $f(x) = 2x - x^2$ não é nem par nem ímpar.*

Exercício: Determine se a função é par, ímpar ou nenhum desses dois.

$$(a)\ f(x) = x^5 + x, \qquad (b)\ f(x) = 1 - x^4, \qquad (c)\ f(x) = 3x^2 + 2x^2 + 1.$$

Definição 2.7. *Seja $\omega \neq 0$. Então f será dita* **periódica** *de* **período** *ω ou ω-***periódica** *se, e somente se, tivermos*

$$f(x) = f(x + \omega), \ \ para\ todo\ x \in D_f.$$

Em particular, se existir um menor ω_0 positivo tal que f seja ω_0-periódica, então diremos que ω_0 será o **período mínimo** *de f.*

Proposição 2.1. *Sejam $c \neq 0 \neq \omega$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for ω-periódica, então serão válidas as afirmações:*

(a) f é $n\omega$-periódica para todo inteiro não nulo n.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$ é ω/c-periódica.

Exemplo 2.12.

(a) $f(x) = x - [x]$, onde $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} :\ n \leq x\}$ é a função maior inteiro, *é 1-periódica e o período mínimo de f é 1. Note que $[x + 1] = [x] + 1$.*

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ é r-periódica para cada $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Então f não tem período mínimo.

Definição 2.8. *Diremos que $f : D_f \to B$*

- *f é* **sobrejetora** *se, e somente se, Im$(f) = B$.*
- *f é* **injetora** *se, e somente se,*

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2, \ \ para\ quaisquer\ x_1, x_2 \in D_f.$$

- *f é **bijetora** se, e somente se, f for injetora e sobrejetora.*

Observação: Note que f será injetora se, e somente se,

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \quad \text{para quaisquer } \ x_1, x_2 \in D_f.$$

Exemplo 2.13. *A função módulo $f(x) = |x|$ não é injetora pois, por exemplo, $|-1| = |1|$ e $-1 \neq 1$. f não é sobrejetora pois $Im(f) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$. Agora, considerando $f\big|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a função será bijetora.*

Observação: Se tomamos $B = Im(f)$ então f sempre será sobrejetora.

Definição 2.9. *Uma função $f : A \to B$ será dita **invertível**, se existir $g : B \to A$ (denotada por f^{-1}) tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$.*

Proposição 2.2. *Uma função $f : A \to B$ será invertível se, e somente se, f for bijetora.*

Neste caso, a **função inversa** está definida por

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = y, \quad \forall\, y \in B.}$$

Exemplo 2.14. *A função $f(x) = x^3$ é injetora e a sua inversa é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.*

Observação: $f^{-1}(x)$ não significa $\dfrac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$.

Para achar a função inversa:

1. Escreva $y = f(x)$.
2. Resolva essa equação para x em termos de y.
3. Troque x por y para expressar f^{-1} como função de x.

Exemplo 2.15. *Calcule f^{-1} para a função $f(x) = 1 + 3x$, .*

Escrevemos $y = 1+3x$. Resolvemos para x, ou seja, $x = \dfrac{y-1}{3}$. E substituindo y por x, obtemos

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}.$$

Exercício: Determine a função inversa de:

$$(a)\ f(x) = x^2; \qquad\qquad (b)\ f(x) = x^3 + 2.$$

Observação: Note que

$$G(f^{-1}) = \big\{(y, f^{-1}(y)) : y \in B\big\} = \{(f(x), x) : x \in A\}\ .$$

Com isto, fica fácil verificar que $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.

Exercício: Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-x-1}$ e de sua função inversa.

Definição 2.10. *Diremos que f é* **limitada** *se, e somente se, o conjunto Im(f) for limitado. Caso contrário, a função f será dita* **ilimitada**. *Se $A_1 \subset A$, então f será* **limitada em** A_1 *se, e somente se, a restrição $f|_{A_1}$ for limitada.*

Observação: Segue da Definição 2.10 que se existir $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq L, \quad \text{para todo } x \in D_f,$$

ou, equivalentemente, se existirem L, $l \in \mathbb{R}$ tais que

$$l \leq f(x) \leq L, \quad \text{para todo } x \in D_f,$$

então f será limitada.

Exemplo 2.16.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ *é limitada;*

(b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+1}$ *é limitada;*

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *é ilimitada.*

Definição 2.11. *Definimos*

- $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in D_f\}$.
- $\inf(f) = \inf\{f(x) : x \in D_f\}$.
- *Se* $\sup(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **máximo** *de* f *ou o* **valor máximo** *de* f. *O ponto* x_0 *será chamado* **ponto de máximo** *de* f.
- *Se* $\inf(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **mínimo** *de* f *ou o* **valor mínimo** *de* f. *O ponto* x_0 *será chamado* **ponto de mínimo** *de* f.

Definição 2.12. *Definimos*

- *Se valer a implicação* $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$, *então* f *será* **estritamente crescente**.
- *Se valer a implicação* $x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$, *então* f *será* **crescente**.
- *Se valer a implicação* $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$, *então* f *será* **estritamente decrescente**.
- *Se valer a implicação* $x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$, *então* f *será* **decrescente**.

Definição 2.13. *Se* $f : A \to B$ *satisfizer uma das condições da Definição 2.12, diremos que* f *é uma função* **monótona** *ou* **monotônica**.

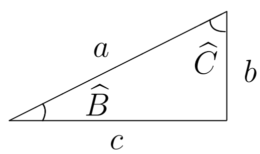
Exemplo 2.17. $f(x) = x^2$ *é estritamente crescente para* $x > 0$ *e estritamente decrescente para* $x < 0$.

Exemplo 2.18. $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ *é estritamente decrescente.*

Observe que se $x < y$ então $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 1 + \dfrac{1}{y} = f(y)$.

2.4 Funções Trigonométricas

Sabemos que em um triângulo *retângulo* de hipotenusa a e ângulos agudos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ opostos, respectivamente, aos catetos b e c, temos



$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a}, \quad \cos\widehat{C} = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{c}{a}.$$

Estas relações definem o **seno** e **cosseno** de um ângulo agudo, pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo. Note que $\operatorname{sen}\widehat{B}$ e $\cos\widehat{B}$ dependem apenas do ângulo $\widehat{B}$ e não do tamanho do triângulo.

Segue do Teorema de Pitágoras que

$$a^2 = b^2 + c^2 = a^2\operatorname{sen}^2\widehat{B} + a^2\cos^2\widehat{B} = a^2(\operatorname{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}).$$

Logo

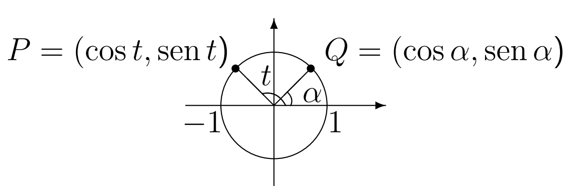
$$1 = \operatorname{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}. \tag{2.1}$$

É claro que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números compreendidos entre 0 e 1.

A relação (2.1) sugere que para todo ângulo α, os números $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$. Usaremos isto para estender as funções cosseno e seno para ângulos fora do intervalo $(0, \pi/2)$.

Observação: Sempre que falarmos das funções seno e cosseno os ângulos serão sempre medidos em radianos. Temos que $\pi rad = 180^o$.

Se considerarmos a circunferência unitária centrada na origem do $\mathbb{R}^2$ e marcarmos, a partir do eixo x, um ângulo t, então poderemos definir $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ de forma que as coordenadas do ponto P sejam $(\cos t, \operatorname{sen} t)$.



Assim, $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ coincidem com a definição original se $0 < t < \pi/2$ e podem ser estendidas para qualquer $t \in \mathbb{R}$, se marcarmos ângulos positivos no sentido anti-horário e ângulos negativos no sentido horário.

Proposição 2.3 (Propriedades)**.**

(a) *O seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes.*

(b) *O cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.*

(c) *O seno e cosseno são funções 2π-periódicas com imagem no intervalo $[-1, 1]$.*

(d) *O cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar.*

(e) $\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ *e* $\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

(f) $-\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ *e* $\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$.

(g) $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$ *e* $-\cos t = \cos(\pi - t)$.

(h) $-\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi + t)$ *e* $-\cos t = \cos(\pi + t)$.

(i) $\operatorname{sen}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *e* $\cos(0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Proposição 2.4 (Fórmulas de Adição)**.**

(a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$.

(b) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

Trocando β por $-\beta$ e utilizando a paridade das funções temos

(c) $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$.

(d) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

A partir das fórmulas de adição deduzimos

Proposição 2.5 (Arco Duplo)**.**

(a) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$.

(b) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$.

A partir das fórmulas do arco duplo e da identidade $cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ deduzimos

Proposição 2.6 (Arco Metade)**.**

(a) $\cos(\alpha) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$.

(b) $\operatorname{sen}(\alpha) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$.

A partir das fórmulas de adição obtemos

Proposição 2.7 (Transformação de Produto em Soma)**.**

(a) $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$, *[somando (a) e (c) da Proposição 2.4].*

(b) $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) - \dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$, *[subtraindo (a) e (c) da Proposição 2.4].*

(c) $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ *[subtraindo (b) e (d) da Proposição 2.4].*

Proposição 2.8 (Transformação de Soma em Produto)**.**

(a) $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\Big(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Big)$.

(b) $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\Big(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Big)$.

Prova. (a) Escreva $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ e $\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ e utilize (b) e (d) da Proposição 2.4.

(b) Escreva α e β como na parte (a) e utilize (a) e (c) da Proposição 2.4. □

De maneira análoga temos

Proposição 2.9 (Transformação de Subtração em Produto)**.**

(a) $\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\Big(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Big)\cos\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Big)$.

(b) $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\text{sen}\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Big)\text{sen}\Big(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\Big).$

Definição 2.14. *Definimos*

- $\text{tg}(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad D(\text{tg}) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\}$
- $\text{cotg}(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}, \quad D(\text{cotg}) = \{\alpha : \text{sen}\alpha \neq 0\}$
- $\text{cosec}(\alpha) = \dfrac{1}{\text{sen}(\alpha)}, \quad D(\text{cosec}) = \{\alpha : \text{sen}\alpha \neq 0\}$
- $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}, \quad D(\sec) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\}$

Exercício: Dê um significado geométrico para $\text{tg}(\alpha)$, $\text{cotg}(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ e $\text{cosec}(\alpha)$.

Exercício: Esboce os gráficos das funções tg, cotg, $\sec$ e cosec.

Exercício: Classifique as funções trigonométricas em par, ímpar, periódica, limitada.

2.5 Funções Exponenciais e Logarítmicas

Definição 2.15. *Seja $a > 0$, $a \neq 1$. A função $f(x) = a^x$ é chamada* **função exponencial de base a**.

Vejamos o que isso significa.

- Se $x = n$, um inteiro positivo, então $a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n\,vezes}$.
- Se $x = 0$, então $a^0 = 1$.
- Se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Se $x = \dfrac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$.

- Se x for um número irracional. Considere o caso $a > 1$, então a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x. Em outras palavras, a^x satisfaz a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad a^r < a^x < a^s.$$

  Se $a < 1$, a^x satisfaz:

$$r < x < s, \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad a^s < a^x < a^r.$$

  Desta forma, se olhamos o gráfico da função a^x onde x racional, os buracos correspondentes aos valores irracionais de x, foram preenchidos de forma a obter uma função crescente para todos os números reais.

Proposição 2.10 (Propriedades)**.** *Sejam a e b números positivos e x e y números reais quaisquer, então*

(a) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(c) $(ab)^x = a^x b^x$,

(d) Se $a > 1$ a função exponencial é estritamente crescente, ou seja, se $x < y$ então $a^x < a^y$.

(e) Se $0 < a < 1$ a função exponencial é estritamente decrescente, ou seja, se $x < y$ então $a^x > a^y$.

Exercício: Esboce o gráfico da funções exponenciais $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Como a função exponencial é ou crescente ou decrescente, existe a função inversa.

Definição 2.16. *A função inversa da função exponencial é chamada* **função logarítmica com base a** *e denotada por $\log_a$. Assim,*

$$\log_a x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^y = x.$$

Observação: Note que $\log_a x$ está definido para $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Além disso satisfaz

$$\log_a(a^x) = x,\, x \in \mathbb{R} \qquad e \qquad a^{\log_a x} = x,\, x > 0.$$

Proposição 2.11 (Propriedades). *Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Então são válidas as seguintes propriedades*

(a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$,

(b) $\log_a x^y = y \log_a x$,

(c) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

(d) Se $a > 1$ a função logarítmica é estritamente crescente, ou seja, se $x < y$, então $\log_a x < \log_a y$,

(e) Se $0 < a < 1$ a função logarítmica é estritamente decrescente, ou seja, se $x < y$, então $\log_a x > \log_a y$,

(f) (Mudança de base) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Exercício: Esboce o gráfico da funções logarítmicas $f(x) = \log_2 x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

A função exponencial de base e onde $e \approx 2,718281$, $f(x) = e^x$, desempenha um papel importante no cálculo.

Definição 2.17. *A função logarítmica com base e é chamada* **logaritmo natural** *e denotada por* $\log_e x = \ln x$.

Observe que como $\ln(e^x) = x$, tomando $x = 1$ temos que $\ln e = 1$.

Há varias formas de introduzir o número e. No capítulo seguinte o definiremos como um limite. Mais adiante vamos definir o logaritmo natural utilizando integrais, nesse caso, o número e será o único número satisfazendo $\ln e = 1$.

2.6 *Seqüências

Nesta seção, consideraremos um caso particular de funções que são as seqüências.

Definição 2.18. *Uma seqüência é uma função definida no conjunto dos números naturais e com valores reais, ou seja,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Note que cada número natural é levado em um único número real

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \stackrel{f}{\to} & \mathbb{R} \\ 1 & \mapsto & f(1) \\ 2 & \mapsto & f(2) \\ 3 & \mapsto & f(3) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Se denotamos $f(n)$ por x_n, então a seqüência f estará unicamente determinada pela lista de números $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ ou, abreviadamente, por $\{x_n\}$. Desta forma, adotaremos a notação $\{x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ para representar uma seqüência. O número x_n é chamado elemento de uma seqüência e o conjunto imagem de f, $Im(f)$, é chamado conjunto dos valores de uma seqüência.

Como uma seqüência é uma função particular, então estão definidas as operações de soma, multiplicação por escalar, produto e quociente de seqüências.

Exercício: Escreva as definições de soma, multiplicação por escalar, produto e quociente de seqüências.

Exemplo 2.19. *Temos*

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(n) = n$ *ou* $\{n\}$ *ou* $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *é uma seqüência cujo conjunto dos valores é* $\mathbb{N}$.

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(n) = \dfrac{1}{n+1}$ *ou* $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ *ou* $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right\}$ *é uma seqüência cujo conjunto dos valores é* $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right\}$.

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(n) = (-1)^n$ *ou* $\{(-1)^n\}$ *ou* $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ *é uma seqüência cujo conjunto dos valores é* $\{1, -1\}$.

(d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ *ou* $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ *ou* $\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right\}$ *é uma seqüência cujo conjunto dos valores é* $\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right\}$.

(e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(n) = r^n$ *ou* $\{r^n\}$ *ou* $\{1, r, r^2, r^3, \ldots\}$ *é uma seqüência cujo conjunto dos valores é* $\{1, r, r^2, r^3, \ldots\}$ *(*progressão geométrica*).*

2.6.1 Limite de uma Seqüência

Note que a seqüência

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

tem a propriedade de que quanto maior for a variável n, mais próximo o valor da seqüência em n, $\dfrac{n}{n+1}$, fica de 1. Neste caso, diremos que o limite da seqüência $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ é 1 e a seqüência é dita convergente com limite 1. É preciso dar uma definição mais precisa da noção de limite de uma seqüência.

Definição 2.19. *Uma seqüência* $\{x_n\}$ *será dita* **convergente** *com* **limite** ℓ *se, dado* $\varepsilon > 0$, *existir um natural* $N = N(\varepsilon)$ *tal que*

$$|\, x_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

Neste caso, escreveremos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \ell$$

e leremos "o limite de x_n quando n tende para infinito é ℓ".

Exemplo 2.20. *Mostre que a seqüência* $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ *é convergente com limite* 0.

Dado $\varepsilon > 0$, pegue um natural N que seja maior do que $1/\varepsilon$. Todo elemento da seqüencia, a partir do N-ésimo, terá distância menor que ε de 0. E, como isto pode ser feito para qualquer ε positivo, a seqüencia converge para zero.

Exemplo 2.21. *Mostre que, para quaisquer constantes* k_1 *e* k_2 *positivas, a seqüencia* $\left\{\dfrac{n+k_1}{n+k_2}\right\}$ *é convergente com limite* 1.

Para encontrarmos N, tentaremos resolver a inequação

$$1 - \varepsilon < \frac{n+k_1}{n+k_2} < 1 + \varepsilon$$

que diz que o n-ésimo elemento está próximo de 1 por uma distância menor do que ε. Temos

$$(1-\varepsilon)(n+k_2) < n+k_1 < (1+\varepsilon)(n+k_2)$$

$$n(1-\varepsilon)+k_2(1-\varepsilon) < n+k_1 < n(1+\varepsilon)+k_2(1+\varepsilon)$$

isto é,

$$n(-\varepsilon)+k_2(1-\varepsilon) < k_1 < n\varepsilon+k_2(1+\varepsilon). \tag{2.2}$$

Desenvolvendo a parte esquerda de (2.2), obtemos

$$n(-\varepsilon) < k_1 - k_2(1-\varepsilon),$$

ou seja,

$$n > \frac{k_1-k_2(1-\varepsilon)}{-\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Desenvolvendo a parte direita de (2.2), obtemos

$$n\varepsilon > k_1 - k_2(1+\varepsilon)$$

e, portanto,

$$n > \frac{k_1-k_2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Estes resultados ((2.3) e (2.4)) indicam que podemos satisfazer a definição de convergência pegando um N natural que seja maior que ambos $\dfrac{k_1-k_2(1-\varepsilon)}{-\varepsilon}$ e $\dfrac{k_1-k_2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Exercício: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência convergente com limite ℓ. Mostre que a seqüência $\{\cos x_n\}$ será convergente com limite $\cos \ell$.

O próximo resultado diz que, se uma seqüência for convergente, então o limite será único.

Proposição 2.12. *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência convergente. Se*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell_1 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \ell_2,$$

então $\ell_1 = \ell_2$.

Exercício: Mostre que a seqüência $\left\{n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right\}$ é convergente com limite 1.

Definição 2.20. *Uma seqüência será dita* **divergente***, se ela não for convergente.*

Definição 2.21. *Se $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ for uma função estritamente crescente e $f : N \to \mathbb{R}$ for uma seqüência, então a função $f \circ h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ será dita uma* **subseqüência** *de f.*

Exemplo 2.22.

(a) Sejam $h(n) = 2n$ e $\{x_n\}$ uma seqüência. Então $\{x_{2n}\}$ é uma subseqüência de $\{x_n\}$ chamada subseqüência dos pares.

(b) Seja $h(n) = 2n + 1$ e $\{x_n\}$ uma seqüência. Então $\{x_{2n+1}\}$ é uma subseqüência de $\{x_n\}$ chamada subseqüência dos ímpares.

(c) Seja $h(n) = n + p$, $p \in \mathbb{N}$, e $\{x_n\}$ uma seqüência. Então $\{x_{n+p}\}$ é uma subseqüência de $\{x_n\}$.

(d) A subseqüência dos pares (ímpares) da seqüência $\{(-1)^n\}$ é a seqüência constante $\{1\}$ (resp. $\{-1\}$).

Proposição 2.13. *Se $\{x_n\}$ for uma seqüência convergente com limite ℓ, então toda subseqüência de $\{x_n\}$ será convergente com limite ℓ.*

A Proposição 2.13 é importante pois implica no seguinte critério negativo de convergência que é bastante utilizado.

Proposição 2.14. *Se uma seqüência possuir duas subseqüências convergentes com limites distintos, então a seqüência será divergente.*

Exemplo 2.23. *A seqüência $\{(-1)^n\}$ é divergente.*

Definição 2.22. *Uma seqüência será dita* **limitada** *se o seu conjunto de valores for limitado. Caso contrário, a seqüência será dita* **ilimitada***.*

Observação: Note que a Definição 2.22 é coerente com a definição de função limitada dada anteriormente (Definição 2.10).

Exemplo 2.24.

(a) A seqüência $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ é limitada.

(b) *A seqüência $\{(-1)^n\}$ é limitada.*

(c) *A seqüência $\left\{\cos\dfrac{1}{n}\right\}$ é limitada.*

(d) *A seqüência $\{n\}$ é ilimitada.*

Proposição 2.15. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Observação: Note que, apesar de toda seqüência convergente ser limitada, nem toda seqüência limitada é convergente (por exemplo, $\{(-1)^n\}$ é limitada, mas não é convergente).

Proposição 2.16. *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência. Então $\{x_n\}$ será convergente com limite 0 se, e somente se, $\{|x_n|\}$ for convergente com limite 0.*

Observação: Mostraremos mais tarde que se $\{x_n\}$ é convergente com limite ℓ então $\{|x_n|\}$ é convergente com limite $|\ell|$ mas não é verdade que se $\{|x_n|\}$ é convergente então $\{x_n\}$ é convergente (basta ver o que ocorre com a seqüência $\{(-1)\}^n$).

Exemplo 2.25. *Considere a seqüência $\{r^n\}$. Temos*

(a) *$\{r^n\}$ é convergente com limite 0, se $|\,r| < 1$;*

(b) *$\{r^n\}$ é convergente com limite 1, se $r = 1$;*

(c) *$\{r^n\}$ é divergente, se $r = -1$ ou $|\,r| > 1$. Sugestão: Mostre que se $|\,r| > 1$, então $\{|\,r|^n\}$ será ilimitada.*

Proposição 2.17. *Se $\{x_n\}$ for convergente com limite 0 e $\{y_n\}$ for limitada, então $\{x_n y_n\}$ será convergente com limite 0.*

Exemplo 2.26. *A seqüência $\left\{\dfrac{1}{n}\cos n\right\}$ é convergente com limite 0.*

Proposição 2.18. *Toda seqüência $\{x_n\}$ crescente (respectivamente decrescente) e limitada é convergente com limite $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$).*

Exercício: Mostre que a seqüência $\{x_n\}$ dada por $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $n \geq 2$, é convergente e encontre o seu limite.

Proposição 2.19 (Propriedades)**.** *Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ seqüências convergentes com limites ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente e seja $c \in \mathbb{R}$. Então* *(a)* $\{cx_n + y_n\}$ *é convergente com limite* $c\ell_1 + \ell_2$

(b) $\{x_n y_n\}$ *é convergente com limite* $\ell_1\ell_2$

(c) $\{x_n/y_n\}$ *é convergente com limite* ℓ_1/ℓ_2*, sempre que* $\ell_2 \neq 0$.

Proposição 2.20. *Sejam* $B \subset \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* B*. Então existe uma seqüência* $\{b_n\}$ *com* $b_n \in B$, $b_n \neq b$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Proposição 2.21. *Se* $\{x_n\}$ *for uma seqüência convergente e* $x_n \leq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq 0$.

Prova. Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

Mas $x_n \leq 0$ por hipótese. Portanto

$$\ell - \varepsilon < x_n \leq 0, \quad \forall\, n \geq N,$$

ou seja, $\ell < \varepsilon$. Segue da arbitrariedade de ε que $\ell \leq 0$ e a prova está concluída. $\square$

Corolário 2.1 (Teste da comparação)**.** *Se* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *forem seqüências convergentes e* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Proposição 2.22 (Teorema do Confronto)**.** *Sejam* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *duas seqüências convergentes com mesmo limite* ℓ*. Se* $\{z_n\}$ *é um seqüência tal que*

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall\, n \in N,$$

então $\{z_n\}$ *é convergente com limite* ℓ.

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\ell - \varepsilon \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq \ell + \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

Então vale $|z_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$. Isto conclui a prova. $\square$

Vamos considerar três tipos de as seqüências divergentes:

- aquelas que divergem para $+\infty$,
- aquelas que divergem para $-\infty$,
- aquelas que são limitadas mas não são convergentes.

Vejamos.

Definição 2.23.

- *Diremos que uma seqüência* $\{x_n\}$ **diverge para** $+\infty$ *se, dado* $R > 0$, *existir* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > R$, *para todo* $n \geq N$. *Neste caso, escrevemos* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
- *Diremos que uma seqüência* $\{x_n\}$ **diverge para** $-\infty$ *se, dado* $R > 0$ *existir* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < -R$, *para todo* $n \geq N$. *Neste caso, escrevemos* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.
- *Diremos que uma seqüência* $\{x_n\}$ **oscila**, *se ela não for convergente e não divergir para* $+\infty$ *ou para* $-\infty$.

Exemplo 2.27.

(a) $\{2^n\}$ *diverge para* $+\infty$, *ou seja,* $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$.

(b) $\{-n\}$ *diverge para* $-\infty$, *ou seja,* $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$

(c) $\{1 + \operatorname{sen} n\}$ *e* $\{(-2)^n\}$ *oscilam.*

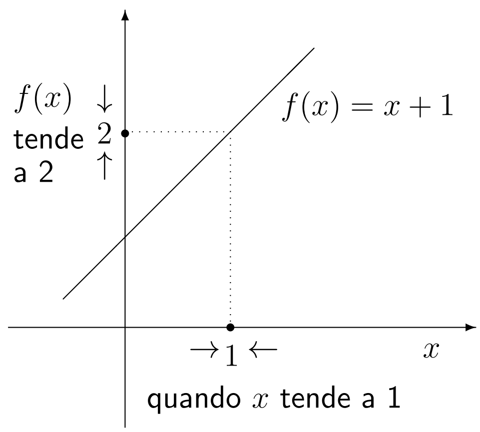
Capítulo 3

Limite e Continuidade

3.1 Noção Intuitiva

Vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ para valores de x próximos de um ponto p. Consideremos, por exemplo, a função $f(x) = x + 1$. Para valores de x próximos de 1, $f(x)$ assume os seguintes valores:

x	$x + 1$	x	$x + 1$
$1,5$	$2,5$	$0,5$	$1,5$
$1,1$	$2,1$	$0,9$	$1,9$
$1,01$	$2,01$	$0,99$	$1,99$
$1,001$	$2,001$	$0,999$	$1,999$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2



Da tabela vemos que quando x estiver próximo de 1 (de qualquer lado de 1) $f(x)$ estará próximo de 2. De fato, podemos tomar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos tomando x suficientemente próximo de 1. Expressamos isso dizendo que o *limite da função* $f(x) = x + 1$ *quando* x *tende a 1 é igual a 2.*

Definição 3.1 (Intuitiva)**.** *Escrevemos*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

e dizemos **o limite de** $f(x)$**, quando** x **tende a** p**, é igual a L** *se pudermos tomar valores de* $f(x)$ *arbitrariamente próximos de* L *tomando* x *suficientemente próximo de* p, *mas não igual a* p.

Observação: Ao procurar o limite quando x tende a p não consideramos $x = p$. Estamos interessados no que acontece próximo de p e a função $f(x)$ nem precisa estar definida para $x = p$. Consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1. *Encontre* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Observe que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ não está definida quando $x = 1$. Temos que para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Como os valores das duas funções são iguais para $x \neq 1$, então os seus limites quando x tende a 1 também. Portanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Exemplo 3.2. *Seja* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 0 & se\ x = 1. \end{cases}$ *Determine o limite quando x tende a 1.*

Observe que para $x \neq 1$ a função $f(x)$ é igual à função do exemplo anterior, logo $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, o qual não é o valor da função para $x = 1$. Ou seja, o gráfico desta função apresenta uma quebra em $x = 1$, neste caso dizemos que *a função não é contínua.*

Definição 3.2. *Uma função f é* **contínua em** p *se*

- $f(p)$ *está definida,*
- $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ *existe,*
- $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Se f não for contínua em p, dizemos que f é **descontínua em** p.

Exemplo 3.3.

(a) A função $f(x) = x + 1$ é contínua em $x = 1$.

(b) A função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ não é contínua em $x = 1$ pois não está definida nesse ponto.

(c) A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 0 & se\ x = 1 \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$ pois $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$.

3.2 Definições

Nesta seção vamos a dar a definição precisa de limite. Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x \neq 3 \\ 6 & se\ x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$. Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos do que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x-3|$ e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x)-5|$, logo nosso problema é achar um número δ tal que

$$\text{se} \qquad |x-3| < \delta, \quad \text{mas} \quad x \neq 3 \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-5| < 0,1.$$

Se $|x-3| > 0$ então $x \neq 3$. Logo uma formulação equivalente é achar um número δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x-3| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-5| < 0,1.$$

Note que se $0 < |x-3| < \dfrac{0,1}{2}$, então

$$|f(x)-5| = |(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < 0,1.$$

Assim a resposta será $\delta = \dfrac{0,1}{2} = 0,05$.

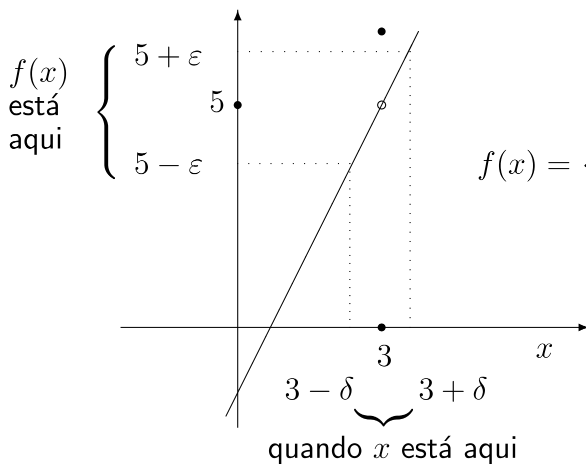
Se mudarmos o número 0,1 no problema para um número menor 0,01, então o valor de δ mudará para $\delta = \dfrac{0,01}{2}$. Em geral, se usarmos um valor positivo arbitrário ε, então o problema será achar um δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x-3| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)-5| < \varepsilon.$$

E podemos ver que, neste caso, δ pode ser escolhido como sendo $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Esta é uma maneira de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3. Também podemos escrever

$$5-\varepsilon < f(x) < 5+\varepsilon \qquad \text{sempre} \quad \text{que} \qquad 3-\delta < x < 3+\delta, \qquad x \neq 3,$$

ou seja, tomando os valores de $x \neq 3$ no intervalo $(3-\delta, 3+\delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$.



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x \neq 3 \\ 6 & se\ x = 3. \end{cases}$$

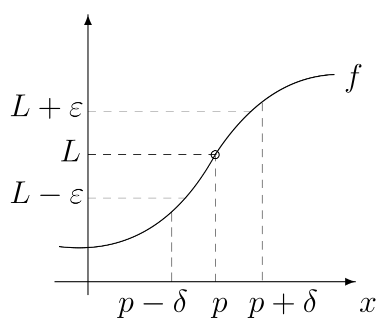
Definição 3.3 (Limite)**.** *Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número p, exceto possivelmente o próprio p. Então dizemos que* **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende** p **é** L *e escrevemos*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

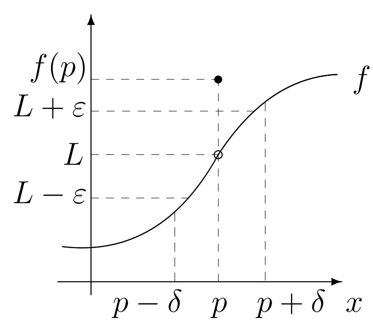
se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon\ .$$

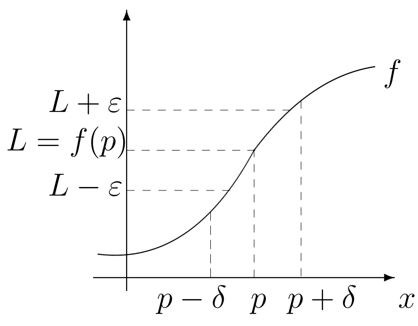
Interpretação geométrica do limite.



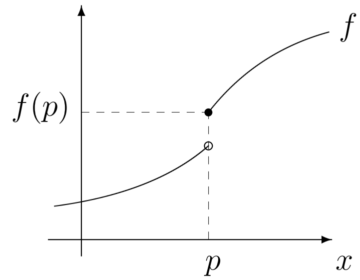
$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L \neq f(p)$$



$\lim\limits_{x\to p} f(x) = L = f(p)$



Não existe o limite de f em p

Exemplo 3.4. *Prove que* $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2) = 4.$

Devemos fazer uma análise preliminar para conjeturar o valor de δ. Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x-2| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |(3x-2)-4| < \varepsilon.$$

Mas $|(3x-2)-4| = |3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2|$. Portanto, queremos

$$3|x-2| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x-2| < \delta$$

ou

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x-2| < \delta.$$

Isto sugere que podemos escolher $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, então

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim,

$$|(3x-2)-4| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x-2| < \delta$$

logo, pela definição, $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2) = 4$.

Exemplo 3.5. *Prove que* $\lim\limits_{x\to p} x^2 = p^2$.

O próximo Teorema garante que o valor L satisfazendo a definição é único.

Teorema 3.1 (Unicidade do Limite)**.** *Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número p, exceto possivelmente o próprio p. Suponha que*

$$\lim_{x\to p} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x\to p} f(x) = L_2.$$

Então $L_1 = L_2$.

Podemos dar a definição precisa de função contínua.

Definição 3.4 (Continuidade)**.** *Sejam f uma função e $p \in D_f$. Então f **é contínua em** p se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0,$ tal que*

$$|x - p\,| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon \ ,$$

ou seja, se e somente se,

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p),$$

*Diremos que f **é contínua em** $A \subset D_f$, se f for contínua em todo ponto $a \in A$. Diremos simplesmente que f **é contínua**, se f for contínua em todo ponto de seu domínio.*

Exemplo 3.6.

(a) A função $f(x) = 3x - 2$ é contínua em $p = 2$.

(b) A função constante $f(x) = k$ é contínua para todo p.

(c) A função $f(x) = ax + b$ é contínua.

A seguinte propriedade será útil para determinar limites.

Proposição 3.1. *Sejam f e g duas funções. Se existe $r > 0$ tal que*

$$f(x) = g(x), \qquad p - r < x < p + r, \quad x \neq p, \qquad \text{e se existe} \quad \lim_{x\to p} g(x) = L,$$

então existe

$$\lim_{x\to p} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to p} f(x) = L.$$

Exemplo 3.7. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Observe que para $x \neq 2$
$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Sabemos que $\lim\limits_{x\to 2} x+2 = 4$. Logo, pela proposição anterior $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Exemplo 3.8. *Determine L para que a função* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2 \\ L\,,\ x = 2 \end{cases}$ *seja contínua em* $p = 2$.

Como $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ devemos tomar $L = 4$.

3.3 Propriedades do Limite

Suponha que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to p} g(x) = L_2$. Então:

- $\lim\limits_{x\to p}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to p} f(x) + \lim\limits_{x\to p} g(x) = L_1 + L_2$.
- $\lim\limits_{x\to p}\ k\ f(x) = k\ \lim\limits_{x\to p} f(x) = k\,L_1$, onde $k =$ constante.
- $\lim\limits_{x\to p} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to p} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} g(x) = L_1 \cdot L_2$.
- $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to p} f(x)}{\lim\limits_{x\to p} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Utilizando a propriedade do produto repetidamente obtemos:

$$\lim_{x\to p}[f(x)]^n = \Big[\lim_{x\to p} f(x)\Big]^n = L_1^n, \quad \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo.}$$

Para aplicar essas propriedades vamos usar os limites:

$$\lim_{x\to p} x = p \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to p} k = k,\ k \text{ constante.}$$

Exemplo 3.9. $\lim_{x\to p} x^n = p^n$, *onde n é um inteiro positivo.*

Exemplo 3.10. *Calcule* $\lim_{x\to 2}(5x^3-8)$, $[R:32]$.

Exemplo 3.11. *Calcule* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}$, $[R:1/4]$.

Exemplo 3.12. *Calcule* $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-9}{h}$, $[R:6]$.

De forma mais geral temos as seguintes propriedades. Seja n é um inteiro positivo, então

- $\lim_{x\to p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}$, se n for par supomos que $p>0$.
- $\lim_{x\to p} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to p} f(x)}$, se n for par supomos que $\lim_{x\to p} f(x) > 0$.

Exemplo 3.13. *Calcule* $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$, $[R:1/2\sqrt{3}]$.

Exemplo 3.14. *Calcule* $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$, $[R:1/6]$.

Os próximos três teoremas são propriedades adicionais de limites.

Teorema 3.2 (Teste da Comparação)**.** *Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e os limites de f e g existem quando x tende a p, então*

$$\lim_{x\to p} f(x) \leq \lim_{x\to p} g(x).$$

Teorema 3.3 (do Confronto)**.** *Sejam f, g, h funções e suponha que existe $r>0$ tal que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \qquad \textit{para} \quad 0 < |x-p| < r.$$

Se

$$\lim_{x\to p} f(x) = L = \lim_{x\to p} h(x)$$

então

$$\lim_{x\to p} g(x) = L\ .$$

Exemplo 3.15. *Mostre que* $\lim_{x\to 0} x^2 \mathrm{sen}\dfrac{1}{x} = 0$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} \leq 1$, multiplicando por x^2 temos $-x^2 \leq x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} \leq x^2$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2$. Então, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$.

Exemplo 3.16. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*

(a) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(b) Verifique se f é contínua em 0 .

Segue do Teorema do Confronto a seguinte propriedade:

Corolário 3.1. *Suponha que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$ e existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \leq M$ para x próximo de p. Então*

$$\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0\,.$$

Exercício: Prove que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to p} |f(x)| = 0$.

Exemplo 3.17. *Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x^2 g(x)$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por* $g(x) = \begin{cases} 1\ ,\ x \notin \mathbb{Q} \\ 0\ ,\ x \in \mathbb{Q}\,. \end{cases}$

Exercício: Calcule

$$(a)\ \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}; \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2}.$$

Teorema 3.4 (da Conservação do Sinal)**.** *Suponha que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$. Se $L > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,*

$$0 < |x - p| < \delta \implies f(x) > 0\,.$$

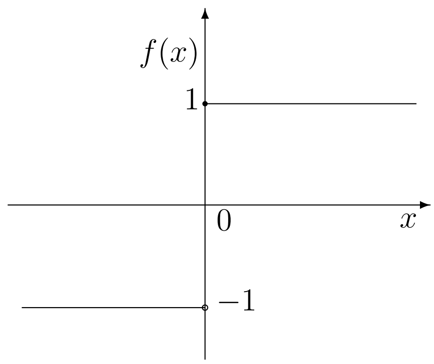
Analogamente, se $L < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que pata todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < \delta \implies f(x) < 0\,.$$

Prova. Tomar $\epsilon = L$ na definição de limite. $\square$

3.4 Limites Laterais

Considere a seguinte função $f(x) = \begin{cases} -1\ , & x < 0 \\ 1\ , & x \geq 0\,. \end{cases}$



Quando x tende a 0 pela esquerda, $f(x)$ tende a -1. Quanto x tende a 0 pela direita, $f(x)$ tende a 1. Não há um número único para o qual $f(x)$ se aproxima quando x tende a 0. Portanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe. Porém, nesta situação podemos definir os limites laterais.

Definição 3.5 (Intuitiva)**.**

- *Escrevemos*

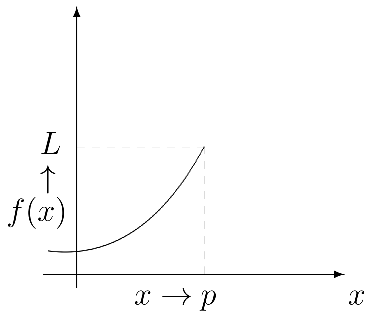
$$\lim_{x\to p^-} f(x) = L$$

e dizemos que **o limite de $f(x)$ quando x tende a p pela esquerda é igual a L** *se pudermos tomar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, tomando x suficientemente próximo de p e x menor do que p.*

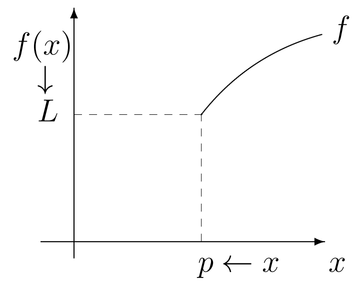
- *Escrevemos*

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = L$$

e dizemos que **o limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita é igual a L** *se pudermos tomar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, tomando x suficientemente próximo de p e x maior do que p.*



$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L$$

Definição 3.6 (Limite Lateral Esquerdo)**.**

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$p - \delta < x < p \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 3.7 (Limite Lateral Direito)**.**

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$p < x < p + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 3.18. *Prove que* $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos achar um $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < x < \delta,$$

ou seja,

$$\sqrt{x} < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < x < \delta,$$

ou elevando ao quadrado

$$x < \varepsilon^2 \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < x < \delta.$$

Isto sugere que devemos escolher $\delta = \varepsilon^2$. Verifiquemos que a escolha é correta. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon^2$. Se $0 < x < \delta$, então

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon, \qquad \text{logo} \qquad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon.$$

Isso mostra que $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Exemplo 3.19. *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$ *e* $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$.

Note que $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ não está definida em 0. Temos

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} -1 = -1.$$

Segue das definições de limites laterais o seguinte teorema.

Teorema 3.5.

$$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = L.}$$

Corolário 3.2. *Segue do Teorema 3.5 que*

- *se f admite limites laterais em p, e*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) \neq \lim_{x \to p^-} f(x),$$

  então **não** *existe* $\lim\limits_{x \to p} f(x)$*;*

- *se f* **não** *admite um dos limites laterais em p, então* **não** *existe* $\lim\limits_{x \to p} f(x)$*.*

Exemplo 3.20. *Verifique se o limite* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ *existe.*

Pelo exemplo anterior (Exemplo 3.19),

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} -1 = -1.$$

Portanto **não** existe $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$.

O conceito de limite lateral possibilita estender a definição de continuidade para intervalos fechados.

Definição 3.8 (Continuidade em um Intervalo Fechado)**.** *Uma função f é* **contínua em um intervalo fechado** $[a, b]$ *se é contínua no intervalo* (a, b) *e*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Exemplo 3.21. *A função $\sqrt{2-x}$ é contínua no intervalo $(-\infty, 2]$.*

Exercício: Calcule os limites, caso existam.

$$(a)\ \lim_{x \to 0} |x|; \quad (b)\ \lim_{x \to 3} [x]; \quad (c)\ \lim_{x \to 4} f(x),\ \text{onde}\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & se\, x > 4, \\ 8 - 2x & se\, x < 4. \end{cases}$$

3.5 Propriedades das Funções Contínuas

Seguem das propriedades do limite, as seguintes propriedades das funções contínuas. Sejam f e g funções contínuas em p e $k =$ constante. Então:

- $f + g$ é contínua em p.
- kf é contínua em p.
- $f \cdot g$ é contínua em p.
- $\frac{f}{g}$ é contínua em p, se $g(p) \neq 0$.

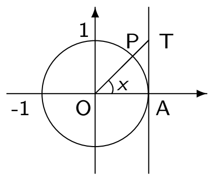
Exemplo 3.22. *$f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, é uma função contínua.*

Exemplo 3.23. *Toda função polinomial é contínua, pois é soma de funções contínuas.*

Exemplo 3.24. *Toda função racional é contínua em p se o denominador não se anular em p, pois uma função racional é quociente de duas funções polinomiais.*

Teorema 3.6. *As funções trigonométricas são contínuas.*

Prova. Assumamos primeiro que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e consideremos a seguinte figura:



Área do △ OPA $<$ Área do setor OPA $<$ Área do △ OTA

ou seja

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2} \qquad \text{portanto,} \qquad 0 < \text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

Se $x < 0$, $-x > 0$ então aplicamos a desigualdade para $-x$ obtendo $0 < \text{sen } (-x) =$ $-$sen $x < -x = |x|$. Daí $-|x| < \text{sen } x < |x|$. Como $\lim\limits_{x \to 0} \pm|x| = 0$, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen } x = 0$ e como sen$0 = 0$, concluímos que a função seno é contínua em 0.

Em geral, para qualquer p, temos que

$$|\text{sen}x - \text{sen}p| = \left|2\text{sen}\Big(\frac{x-p}{2}\Big)\cos\Big(\frac{x+p}{2}\Big)\right| \leq 2\left|\text{sen}\Big(\frac{x-p}{2}\Big)\right| \leq 2\left|\frac{x-p}{2}\right| = |x-p|.$$

Como $\lim\limits_{x \to p}(x-p) = 0$, pelo Teorema do Confronto temos que $\lim\limits_{x \to p} \text{sen}x - \text{sen}p = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x \to p} \text{sen}x = \text{sen}p$. Logo a função seno é contínua para todo p.

A prova da continuidade do cosseno é feita de maneira similar utilizando a igualdade $\cos x - \cos p = -2\text{sen}\Big(\dfrac{x+p}{2}\Big)\text{sen}\Big(\dfrac{x-p}{2}\Big)$.

A continuidade das outras funções trigonométricas seguem das propriedades das funções contínuas. □

Teorema 3.7 (O Primeiro Limite Fundamental)**.**

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.}$$

Prova. Já vimos que para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ vale a desigualdade $0 < \text{sen } x < x < \text{tg } x$. Dividindo por $\text{sen } x$ obtemos $1 < \dfrac{x}{\text{sen } x} < \dfrac{1}{\cos x}$ e conseqüentemente $\cos x < \dfrac{\text{sen } x}{x} < 1$, pois $\cos x > 0$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Por outro lado, se $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, aplicando a desigualdade a $-x$, obtemos $\cos(-x) < \dfrac{\text{sen } (-x)}{-x} < 1$. Utilizando a paridade das funções concluímos que

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$. $\square$

Exemplo 3.25. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}5x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}5x}{x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} \overset{u=5x}{=} 5 \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen } u}{u} = 5.$$

Exemplo 3.26. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \frac{\text{sen} x}{x} = 1.$$

Exemplo 3.27. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}(2x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo 3.28. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2} \frac{(1+\cos x)}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercício: Calcule

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\text{sen}(3x)}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(2x)}{\text{sen}(3x)}.$$

Teorema 3.8.

(a) A função inversa de uma função contínua é contínua.

(b) As funções exponenciais e logarítmicas são contínuas.

Comentário: (a) Sabemos que o gráfico da função inversa é obtido refletindo o da função em torno da reta $y = x$ portanto, se o gráfico de f não tiver quebra isto acontecerá com o de f^{-1}.

(b) Na seção 2.5 definimos a função exponencial a^x de forma a preencher os buracos no gráfico de a^x, onde x racional. Em outras palavras, a função exponencial é contínua pela propria definição. Portanto, sua função inversa $\log_a x$ também é contínua.

Exemplo 3.29. *A função* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$ *é contínua em* $(0, +\infty)$ *e* $x \neq \pm 1$ *, ou seja, em* $(0, 1)$ *e* $(1, +\infty)$.

Teorema 3.9. *Sejam* f *e* g *duas funções tais que* $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ *e* $L \in D_f$*. Se* f *for contínua em* L *onde* $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L$*, então*

$$\lim_{x \to p} f(g(x)) = f\big(\lim_{x \to p} g(x)\big) = f(L).$$

Observação: Nas condições do Teorema acima, fazendo $u = g(x)$, podemos escrever

$$\lim_{x \to p} f(g(x)) = \lim_{u \to L} f(u).$$

Exemplo 3.30. *Calcule*

$$(a)\ \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}\,[R : \sqrt{2}];\ (b)\ \lim_{x \to 1} \exp\Big(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\Big)\,[R : e^{1/2}];\ (c)\ \lim_{x \to 1} \frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}\,[R : -32].$$

Uma propriedade importante das funções contínuas é enunciada no teorema a seguir e diz que a composta de funções contínuas ainda é uma função contínua.

Teorema 3.10. *Se* f *for contínua em* $g(p)$ *e* g *for contínua em* p*, então* $h = f \circ g$ *será contínua em* p.

Prova. Como g é contínua em p, temos que $\lim\limits_{x \to p} g(x) = g(p)$. Uma vez que f é contínua em $g(p)$ podemos aplicar o Teorema anterior para obter

$$\lim_{x \to p} f(g(x)) = f\big(\lim_{x \to p} g(x)\big) = f(g(p)),$$

ou seja $f \circ g$ é contínua em p. $\square$

Exemplo 3.31. *$h(x) = sen(x^2)$ é contínua pois $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = x^2$ que são funções contínuas.*

Exemplo 3.32. *Onde a função $h(x) = \ln(1 + \cos x)$ é contínua?*

$h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = \ln x$ e $g(x) = 1 + \cos x$ que são funções contínuas. Portanto, pelo Teorema $h(x)$ é contínua onde está definida. Agora $\ln(1 + \cos x)$ está definida quando $1 + \cos x > 0$. Assim, não está definida quando $\cos x = -1$, ou seja, quando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, ...$

Exercício: Calcule $\lim\limits_{x \to 1} g(x^2 - 4)$, sabendo que g é uma função contínua.

3.6 Limites Infinitos

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Quando x se aproxima de 0, x^2 também se aproxima de 0 e $\dfrac{1}{x^2}$ fica muito grande. De fato, os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente grandes se tomarmos valores de x próximos de 0. Para indicar este comportamento usamos a notação

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty.$$

Definição 3.9 (Intuitiva). *Seja f uma função definida a ambos lados de p, exceto possivelmente no próprio p.*

- $$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty,$$

  significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes tomando valores de x suficientemente próximos de p.

- $$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty,$$

  significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes, porém negativos, tomando valores de x suficientemente próximos de p.

- *Definições análogas no caso de limites laterais.*

Exemplo 3.33. $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$

Exemplo 3.34. *Determine* $\lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x-3}$ *e* $\lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x-3}$.

Para valores $x > 3$ próximos de 3, $x-3$ é um número positivo muito pequeno, e $\frac{2}{x-3}$ é um número positivo grande. Então intuitivamente $\lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$. Analogamente, vemos que $\lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty$.

Definição 3.10 (Limite Infinito)**.** *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo p, exceto possivelmente no próprio p. Então diremos que*

- **o limite de $f(x)$ quando x tende a p é** $+\infty$ *se, dado $K > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $f(x) > K$ para todo $0 < |x-p| < \delta$,*
- **o limite de $f(x)$ quando x tende a p é** $-\infty$ *se, dado $K < 0$, existir $\delta > 0$ tal que $f(x) < K$ para todo $0 < |x-p| < \delta$.*

Exercício: Escreva as definições precisas dos limites laterais infinitos:

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty.$$

Definição 3.11. *A reta $x = p$ é chamada de* **assíntota vertical** *da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:*

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to p} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty.$$

Exemplo 3.35. *Prove que* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Dado $K > 0$, queremos achar $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{x} > K \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < x < \delta,$$

ou seja

$$x < \frac{1}{K} \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < x < \delta.$$

Isto sugere que devemos tomar $\delta = \dfrac{1}{K}$. De fato, seja $K > 0$ escolha $\delta = \dfrac{1}{K}$. Se $0 < x < \delta$, então

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = K.$$

O que mostra que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Exercício: Mostre que

$$(a) \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \qquad (b) \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Propriedades dos limites infinitos. Seja L um número real. Temos:

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to p} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to p} (f+g)(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to p} (f \cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to p} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to p} (f \cdot g)(x) = +\infty,\ L > 0 \\ \lim\limits_{x \to p} (f \cdot g)(x) = -\infty,\ L < 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to p} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to p} (f \cdot g)(x) = -\infty$$

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to p} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to +p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to p} (f+g)(x) = +\infty$$

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to p} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to p} (f+g)(x) = -\infty$$

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to p} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to p} (f+g)(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to p} (f \cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to p} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to p}(f\cdot g)(x) = -\infty,\ L > 0 \\ \lim\limits_{x\to p}(f\cdot g)(x) = +\infty,\ L < 0. \end{cases}$

Observação: As propriedades acima são válidas se, em lugar de $x \to p$, usarmos $x \to p^+$ ou $x \to p^-$.

Observação: As propriedades acima sugerem como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, por exemplo,

$$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty \qquad \text{e} \qquad L\cdot(-\infty) = +\infty \quad \text{se} \quad L < 0.$$

Temos as seguintes **indeterminações**:

$$\boxed{+\infty - (+\infty), \quad -\infty - (-\infty), \quad 0\cdot\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.}$$

Exemplo 3.36. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\cos x\frac{1}{x^2} = 1\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Exemplo 3.37. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, x^2}{x^4}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\, x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{sen\, x^2}{x^2}\frac{1}{x^2} = 1\cdot(+\infty) = +\infty.$$

A seguinte proposição será útil para calcular limites.

Proposição 3.2. *Suponha que* $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = 0$ *e que existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *(respectivamente* $f(x) < 0$*) para* $p < x < p + r$*. Então,* $\lim\limits_{x\to p^+}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ *(respectivamente* $-\infty$*.)*

Observação: Vale um resultado análogo para $x \to p^-$ e para $x \to p$.

Exemplo 3.38. *Calcule os limites seguintes e interprete-os graficamente:*

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}.$$

Temos

- $\lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0 = \lim_{x \to 1^-} (x-1)$;
- se $x > 1$, então $x - 1 > 0$;
- se $x < 1$, então $x - 1 < 0$.

Portanto

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty; \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \quad \text{não existe.}$$

Exemplo 3.39. *Calcule* $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4}$.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} \frac{x^2+3x}{x+2} = +\infty \cdot \frac{5}{2} = +\infty.$$

Exemplo 3.40. *Calcule* $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

Observe que $\frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}$. Assim,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}(x^2+x+1) = -\infty \cdot 3 = -\infty.$$

Exercício:

(a) Calcule os limites laterais $\lim_{x \to \pi/2^\pm} \operatorname{tg} x$ e esboce o gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg} x$.

(b) Verifique que $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$, $a > 1$.

(c) Calcule os limites laterais $\lim_{x \to 1^\pm} \frac{x}{x-1}$ e esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

3.7 Limites no Infinito

Vamos analisar o comportamento de uma função $f(x)$ quando os valores de x ficam arbitrariamente grandes. Consideremos a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Então $f(x)$ assume os seguintes valores:

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 10	$0,98$
± 100	$0,9998$
± 1000	$0,99999$

Observemos que, quando x for muito grande, então $f(x)$ será aproximadamente igual a 1. Este fato pode ser escrito seguinte forma

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

Definição 3.12 (Intuitiva)**.**

- *Seja f uma função definida em algum intervalo $(a, +\infty)$. Então*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grandes.

- *Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grandes em valor absoluto, mas negativo.

Podemos estabelecer a definição precisa de limite no infinito.

Definição 3.13 (Limite no Infinito)**.**

- *Seja f uma função definida em algum intervalo $(a, +\infty)$. Então*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

se, dado $\varepsilon > 0$, existir $R > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > R$.

- *Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se, dado $\varepsilon > 0$, existir $R < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < R$.

Definição 3.14. *A reta $y = L$ é chamada de* **assíntota horizontal** *da curva $y = f(x)$ se ou*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Exemplo 3.41. *Temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.*

Dado $\varepsilon > 0$, queremos achar $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$x > R > 0 \implies |f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Tomando $R = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ temos

$$x > R > 0 \implies 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{R} = \varepsilon.$$

Portanto, segue da definição que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. A prova para $x \to -\infty$ é análoga.

Observação: As propriedades do limite dadas na seção 3.3 são também válidas se $x \to p$ for substituído por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo 3.42. *Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}$ onde n é um inteiro positivo.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0.$$

Em geral, temos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$ onde r é um número racional positivo.

Exemplo 3.43. *Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}{2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Um cálculo análogo mostra que o limite, quando $x \to -\infty$, também é $\dfrac{1}{2}$.

Observação: A estratégia para calcular limites no infinito de uma função racional consiste em colocar em evidência a mais alta potência de x no denominador e numerador.

Exemplo 3.44. *Ache as assíntotas horizontais de* $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5}$.

Consideremos $x \to +\infty$, então $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(2+\frac{1}{x^2})}}{x(3+\frac{5}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x(3+\frac{5}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Agora, consideramos $x \to -\infty$, então $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x(3+\frac{5}{x})} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Logo, a reta $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ é assíntota para $x \to +\infty$ e $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ é assíntota para $x \to -\infty$.

Exemplo 3.45. *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{sen\ x}{x}\right)$.

Observe que $\left|\dfrac{\text{sen } x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$, para $x > 0$. Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, pelo Teorema do Confronto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$. Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{\text{sen } x}{x}\right) = 2 + 0 = 2$.

Exemplo 3.46. *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\frac{1}{x}$.

Fazendo $u = \dfrac{1}{x}$ temos que quando $x \to +\infty$, $u \to 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} x\,\text{sen}\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}\,\text{sen} u = 1.$$

Exercício: Verifique que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,\ \ a > 1$ e que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x = 0,\ 0 < a < 1$

3.8 Limites Infinitos no Infinito

Utilizamos a notação

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se tão grandes quanto x. De forma análoga utilizamos a notação

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemplo 3.47. *Encontre* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$.

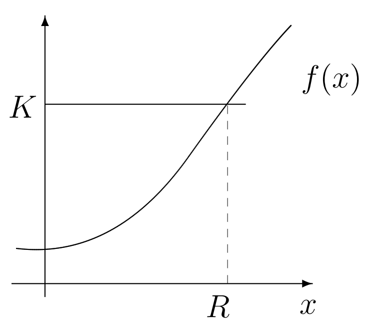
Quando x torna-se grande, x^2 também fica muito grande. Por exemplo, $10^2 = 100$, $100^2 = 10.000$, $1000^2 = 1.000.000$. Portanto, podemos dizer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

Podemos estabelecer a definição precisa de limite infinito no infinito.

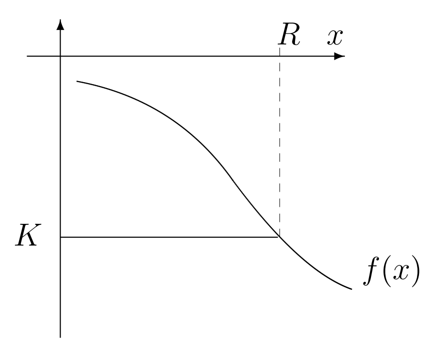
Definição 3.15 (Limite Infinito no Infinito)**.** *Seja f uma função definida em algum intervalo $(a, +\infty)$.*

-
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
se, dado $K > 0$, existir $R > 0$ tal que $f(x) > K$ sempre que $x > R$.

-
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$
se, dado $K < 0$, existir $R > 0$ tal que $f(x) < K$ sempre que $x > R$.

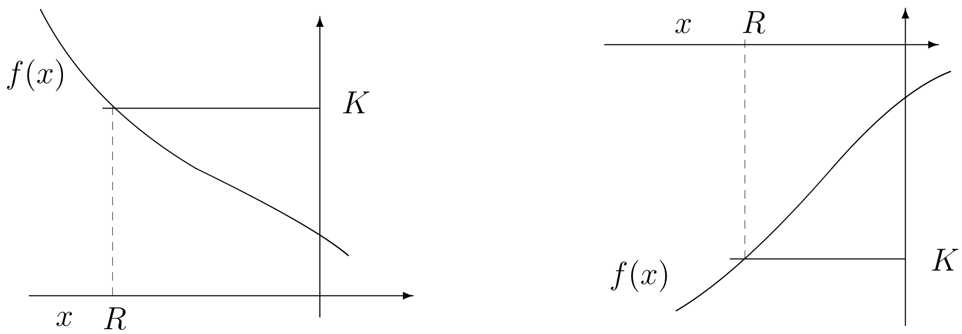


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Exercício: Escreva as definições precisas para $x \to -\infty$ no infinito.



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Observação: Todas as propriedades de limites infinitos dadas na seção 3.6 valem se substituirmos $x \to p$ por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Observação: Temos as mesmas **indeterminações**:

$$\boxed{+\infty - (+\infty), \quad -\infty - (-\infty), \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.}$$

Exemplo 3.48.

- *Prove, usando a definição, que* $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.
- *Segue das propriedades que* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, *onde* n *é um inteiro positivo.*

Exemplo 3.49. *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x)$.

Observe que temos uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Não podemos aplicar a propriedade da soma. Contudo, podemos escrever

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty \cdot (+\infty - 1) = +\infty.$$

Exemplo 3.50. *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\big(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\big)}{x^2\big(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\big)}=+\infty\frac{1+0-0}{2+0+0}=+\infty.$$

Exemplo 3.51. *Calcule* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x^2+1}{1-2x^2}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{1-2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\big(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\big)}{x^2\big(\frac{1}{x^2}-2\big)}=(-\infty)\big(-\frac{1}{2}\big)=+\infty.$$

Exercício:

(a) Seja $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, com $a_n\neq 0$. Determine os limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty}p(x)$.

(b) Sejam p e q polinômios, com $q\neq 0$. Encontre os limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

(c) Verifique que $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,\ \ a>1$.

(d) Verifique que $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty,\ \ a>1$ e que $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty,\ \ 0<a<1$.

3.9 O Número e

Definimos o *número e* como o seguinte limite, assumindo que ele existe,

$$\boxed{e=\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x.}$$

A partir deste limite vamos calcular outros limites que serão úteis mais adiante.

Exemplo 3.52. $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^x=e.$

Fazendo $x=-(t+1),t>0$, temos

$$\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x=\Big(1-\frac{1}{1+t}\Big)^{-t-1}=\Big(1+\frac{1}{t}\Big)^t\Big(\frac{t+1}{t}\Big).$$

Para $x\to-\infty$, $t\to+\infty$, assim

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x=\lim_{t\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{t}\Big)^t\Big(\frac{t+1}{t}\Big)=e.$$

Exemplo 3.53. $\lim_{h\to 0^+}\Big(1+h\Big)^{\frac{1}{h}} = e.$

Fazendo $h = \dfrac{1}{x}$, temos que para $h \to 0+$, $x \to +\infty$, assim

$$\lim_{h\to 0^+}\Big(1+h\Big)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x\to +\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x} = e.$$

Analogamente, temos que

Exemplo 3.54. $\lim_{h\to 0^-}\Big(1+h\Big)^{\frac{1}{h}} = e.$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\Big(1+h\Big)^{\frac{1}{h}} = e.}$$

Observação: O número e também pode ser definido como o limite acima e claramente as duas definições são equivalentes.

Exemplo 3.55. $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1.$

Fazendo $u = e^h - 1$ ou $h = \ln(1+u)$ temos

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{u}{\ln(u+1)} = \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}.$$

Para $h \to 0$, $u \to 0$, assim

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Observação: O número e também pode ser definido como um número tal que satisfaz o limite acima.

3.10 Outras Propriedades das Funções Contínuas

No caso particular de funções contínuas o Teorema da Conservação de Sinal tem a seguinte forma.

Teorema 3.11 (da Conservação do Sinal para Funções Contínuas)**.** *Seja f contínua em p. Se $f(p) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,*

$$|x - p| < \delta \implies f(x) > 0\,.$$

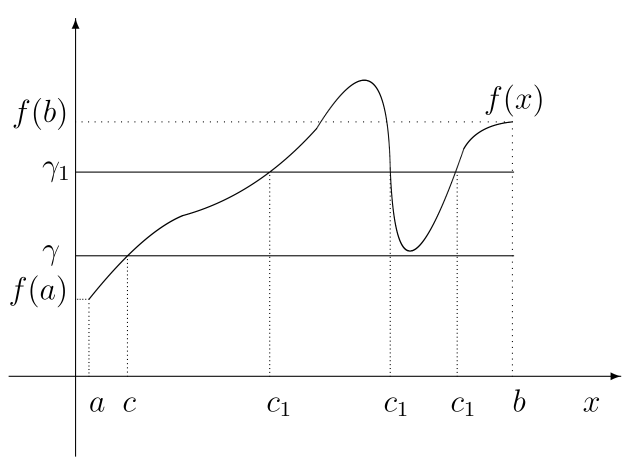
Analogamente, se $f(p) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,

$$|x - p| < \delta \implies f(x) < 0\,.$$

Além do Teorema da Conservação do Sinal acima vamos apresentar três Teoremas importantes envolvendo funções contínuas. Consideraremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nos resultados desta seção e quando dizemos que f é contínua em $[a, b]$, queremos dizer que f é contínua em (a, b), $\lim\limits_{x \to a^+} = f(a)$ e $\lim\limits_{x \to b^+} = f(b)$.

Teorema 3.12 (do Valor Intermediário)**.** *Se f for contínua e se γ pertencer ao intervalo aberto de extremos $f(a)$ e $f(b)$, então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \gamma$.*

O TVI estabelece que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre os valores $f(a)$ e $f(b)$. Geometricamente, o TVI diz que se for dada uma reta horizontal qualquer $y = \gamma$ entre $y = f(a)$ e $y = f(b)$, como mostra a figura abaixo, então o gráfico de f intercepta a reta $y = \gamma$ pelo menos uma vez. Observe que o TVI não é verdadeiro em geral para funções descontínuas.



Como um caso particular do TVI temos

Teorema 3.13 (de Bolzano ou do Anulamento)**.** *Se f for contínua e $f(a)$ e $f(b)$ assumirem sinais contrários, então existirá $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Uma aplicação do teorema é a localização de zeros de uma função.

Exemplo 3.56. *Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ tem pelo menos uma solução real.*

Seja $f(x) = x^3 - 4x + 8$. Temos que f é uma função contínua e como $f(0) = 8 > 0$ e $f(-3) = -7$ pelo Teorema do anulamento existe $c \in (-3, 0)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, c é uma solução da equação.

Exercício:

(a) Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo? [R: sim, para algum $x \in (-2, 0)$]

(b) A equação $\cos x = x$ tem pelo menos uma solução? e a equação $2\ \mathrm{tg} x - x = 1$? [R: sim, para algum $x \in (0, \pi/2)$; sim, para algum $x \in (0, \pi/4)$]

Teorema 3.14 (de Weierstrass ou do Valor Extremo)**.** *Se f for contínua, então existirão $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \textit{para todo } x \in [a,b].$$

Observação: Neste caso, dizemos que $f(x_1)$ é um valor mínimo de f no intervalo $[a,b]$ e $f(x_2)$ é um valor máximo e, $[a,b]$. O Teorema de Weierstrass diz que, se f for contínua em um intervalo fechado e limitado, então f assumirá os valores máximo e mínimo neste intervalo.

Se o intervalo não for limitado o teorema de Weierstrass não vale necessariamente, por exemplo, $f(x) = x^3$ não é limitada em $[0, +\infty)$. Se o intervalo não for fechado, o resultado também pode não ser válido, por exemplo, a função identidade $f(x) = x$ não possui valor máximo nem valor mínimo em $(0, 2)$. Se a função não for contínua, o resultado também não precisa valer, por exemplo, considere a função $f(x) = \begin{cases} 2 & se\ x = 1 \\ x & se\ 1 < x < 3 \\ 2 & se\ x = 3. \end{cases}$

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário 3.3. *Sejam* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua,* $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ *e* $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. *Então* $Im(f) = f([a,b]) = [m, M]$.

Exercício: Prove que o conjunto $A = \left\{x^2 + \dfrac{1}{2} \; ; \; \dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$ admite máximo e mínimo.

3.11 *Limite de Funções e Seqüências

$$\lim_{x \to b} f(x) = L.$$

Consideremos $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e b um ponto de acumulação de B. Suponhamos que $\lim_{x \to b} f(x) = L$. Podemos nos aproximar de b por pontos de B distintos de b. Seja $\{b_n\}$ uma seqüência tal que $b_n \in B$, $b_n \neq b$ e $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. Então podemos construir a seqüência $\{f(b_n)\}$ e perguntar se esta seqüência é convergente, ou seja, existe o limite

$$\lim_{n \to \infty} f(b_n) = L\,? \tag{3.1}$$

Em outras palavras, quando nos aproximamos de b por pontos b_n de B, com $b_n \neq b$, é verdade que $f(b_n)$ se aproxima de L? Quando isto ocorre para qualquer seqüência $f(b_n)$, isto é, quando existe um único L tal que vale (3.1) para toda seqüência $f(b_n)$, dizemos que L é o limite de f em b e escrevemos

$$\lim_{x \to b} f(x) = L.$$

Exemplo 3.57. *Seja* $f : \mathbb{R}\backslash\{1,2\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$. *Então o limite de* $f(x)$ *quando* $x \to 2$ *é* 4.

Embora tenhamos $2 \notin D_f$ no Exemplo 3.57, podemos nos aproximar de 2 por pontos x de D_f, com $x \neq 2$. Observe que, quando $x \in D_f$ se aproxima de 2, com $x \neq 2$, a função $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ se aproxima de 4. Então escrevemos

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \underbrace{\frac{2x}{x-1}}_{g(x)} \cdot \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{x-1} = 4.$$

Exemplo 3.58. *Seja* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$. *Então o limite de* $f(x)$ *quando* $x \to 0$ *não existe.*

Embora 0 não pertença a D_f no Exemplo 3.58, podemos nos aproximar de 0 por pontos de D_f. Note que, tomando $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, temos $b_n \in D_f$, $b_n \neq 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Entretanto a seqüência $\{f(b_n)\} = \{(-1)^n\}$ não é convergente e, portanto, o limite de $f(x)$ quando x tende a 0 não existe.

A noção intuitiva de limite usando seqüências se relaciona à definição precisa de limite da forma seguinte.

Proposição 3.3. *Sejam* $f : B \to \mathbb{R}$ *uma função e* $b \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* B. *Se*

$$\lim_{x\to b} f(x) = L$$

então, para toda seqüência $\{b_n\}$ *com* $b_n \neq b$, $b_n \in B$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = L.$$

Observação: Vale, também, a volta na proposição acima, isto é,

> *Se, para toda seqüência* $\{b_n\}$ *com* $b_n \neq b$, $b_n \in B$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *tivermos*
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = L,$$
>
> *então*
>
> $$\lim_{x\to b} f(x) = L.$$

Enunciamos este resultado apenas para mostrar que o caminho adotado para entender limite é, de fato, equivalente à definição precisa e não faremos a prova deste resultado aqui.

Observações: Sejam $f : B \to \mathbb{R}$ uma função e $b \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de B e suponhamos que exista $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L$. Note que

- Pontos de B próximos, mas distintos, de b são levados pela função f em pontos próximos de L.

- $\lim_{x \to b} f(x) = L$ significa que, uma vez especificado o erro $\varepsilon > 0$, para todo x suficientemente próximo de b (isto é, $0 < |x - b| < \delta$) em B, o erro cometido ao aproximarmos L por $f(x)$ é menor que ε.

- É preciso excluir o ponto b mesmo que este pertença ao domínio da função (por exemplo $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ e $f(1) = 2$).

- Não é possível abrir mão do fato de que b deve ser um ponto de acumulação de B, pois precisamos nos aproximar dele por pontos de B distintos de b o que equivale a b ser um ponto de acumulação de B.

A proposição abaixo segue imediatamente do fato de que limites de seqüências são únicos (Proposição 2.12) e da Proposição 3.3.

Proposição 3.4. *Sejam $f : B \to \mathbb{R}$ uma função, $b \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de B e suponha que o limite $\lim_{x \to b} f(x)$ existe. Então o tal limite é único.*

Também segue da Proposição 3.3 o seguinte critério negativo para existência de limite.

Proposição 3.5 (Critério Negativo)**.** *Sejam $f : B \to \mathbb{R}$ uma função e $b \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de B. Se, para alguma seqüência $\{x_n\}$ com $x_n \in B$, $x_n \neq b$ e $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, a seqüência $\{f(x_n)\}$ não for convergente, então o limite $\lim_{x \to b} f(x)$ não existirá.*

Exercício: Mostre que

(a) o limite de $f(x) = \dfrac{x - 2}{|\, x - 2|}$ quando $x \to 2$ não existe.

(b) o limite de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq -1 \\ 2x + 1, & x < -1 \end{cases}$ quando $x \to -1$ não existe.

Exemplo 3.59. *Não existem os limites $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ e $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$. Basta observar que, para $x_n = \dfrac{1}{n}$, as seqüências $\{n\}$ e $\{n^2\}$ são ilimitadas e, portanto, não são convergentes.*

Definição 3.16. *Seja $f : B \to \mathbb{R}$ uma função.*

- *Se $b \in \mathbb{R}$ for um ponto de acumulação de $C = B \cap (b, \infty)$ ($D = B \cap (-\infty, b)$), então b será dito um* **ponto de acumulação à direita** *(resp. à esquerda) de B.*

- *Se o limite*

$$\lim_{x\to b} f\big|_C(x) = L^+ \quad (resp.\ \ \lim_{x\to b} f\big|_D(x) = L^-)$$

existir, diremos que L^+ (L^-) é o **limite lateral à direita** *(resp. à esquerda) de f quando x tende a b.*

Notação: Escrevemos

$$\lim_{x\to b^+} f(x) := \lim_{x\to b} f\big|_C(x) \qquad (\text{resp. } \lim_{x\to b^-} f(x) := \lim_{x\to b} f\big|_D(x))$$

Proposição 3.6. *Sejam $f : B \to \mathbb{R}$ uma função e $b \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda de B. Então o limite $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existirá se, e somente se, os limites laterais*

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = L^+ \quad e \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = L^-$$

existirem e $L^+ = L^-$.

Definição 3.17. *Sejam $f : B \to \mathbb{R}$ uma função e $b \in B$. Diremos que f é* **contínua em** *b, se valerem uma das seguintes afirmações:*

- *b não é um ponto de acumulação de B;*
- *b é um ponto de acumulação de B e $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$.*

Segue da definição acima que se $f : B \to \mathbb{R}$ for uma função e $\{x_n\}$ for uma seqüência convergente com limite b, então a seqüência $\{f(x_n)\}$ será convergente com

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(b).$$

Teorema 3.15. *Sejam f uma função e $(x_n)_{n\in A}$ uma seqüência de elementos de D_f tal que $x_n \to p$ e $x_n \neq p$, $\forall\, n \in A$. Então*

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L\,.$$

Segue diretamente do teorema o seguinte corolário.

Corolário 3.4. *Seja f uma função. Se existem seqüências $(x_n)_{n\in A}$ e $(y_n)_{n\in A}$ de elementos de D_f tais que*

$$\begin{aligned} x_n &\longrightarrow p\,, \quad x_n \neq p\ ,\ \forall\ n \in A \\ y_n &\longrightarrow p\,, \quad y_n \neq p\ ,\ \forall\ n \in A \end{aligned}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L_1 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = L_2\,,\ L_1 \neq L_2\,,$$

então

$$\nexists\ \lim_{x\to p} f(x)\,.$$

Exemplo 3.60. *Seja* $f(x) = \begin{cases} 1\ ,\ x \in \mathbb{Q} \\ 0\ ,\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. *Mostre que* $\nexists\ \lim_{x\to p} f(x)\,,\ \forall\ p \in \mathbb{R}$.

Capítulo 4

A Derivada

4.1 Motivação e Definição

Seja $x = f(t)$ uma equação horária do movimento de uma partícula sobre a reta real x. Então $f(t)$ descreve a posição da partícula no instante t, para cada $t \in \mathbb{R}$. A **velocidade média** da partícula entre os instantes t_0 e t é dada por

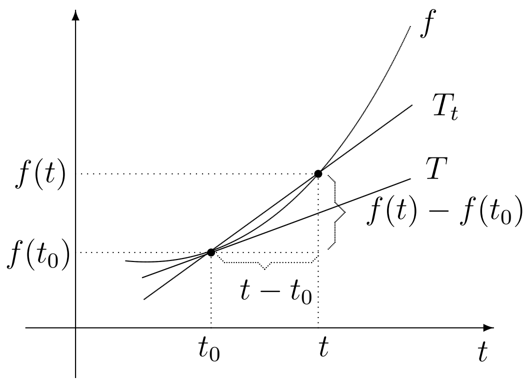
$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

e a **velocidade instantânea** ou simplesmente **velocidade** da partícula no instante t_0 é dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \ . \tag{4.1}$$

Logo, a velocidade instantânea, $v(t_0)$, é o limite, quando $t \to t_0$, das velocidades médias da partícula entre os instantes t_0 e t. Verifiquemos este fato intuitivamente.

Consideremos a seguinte figura.



Para cada t, a reta T_t que passa por $(t_0, f(t_0))$ e $(t, f(t))$ e tem coeficiente angular m_t, pode ser descrita pela equação

$$y - f(t_0) = m_t(s - t_0), \qquad s \in \mathbb{R}$$

onde

$$m_t = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Assim, o coeficiente angular da reta T_t determina a velocidade média da partícula entre os instantes t e t_0.

Notemos que, quando t se aproxima de t_0, a reta T_t "tende" à posição da reta T, ou seja, quando $t \to t_0$, o coeficiente angular, m_t, da reta T_t tende para o valor do coeficiente angular, m, da reta T. Logo

$$t \ \to \ t_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \ \to \ m,$$

ou seja

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = m.$$

Isto mostra que a velocidade instantânea da partícula dada pelo coeficiente angular da reta T é, de fato, o limite das velocidades médias dadas por m_t.

Fazendo a mudança de variável $t = t_0 + h$, temos

$$t \ \to \ t_0 \iff h \ \to \ 0.$$

Portanto a equação (4.1) pode ser re-escrita como

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \,.$$

Agora, podemos dar a definição seguinte.

Definição 4.1. *Sejam f uma função e $p \in D_f$ um ponto do seu domínio.*

- *Quando existir o limite*
$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L \neq \pm\infty,$$
diremos que L é a **derivada** *de f em p e escreveremos*
$$f'(p) = L\,.$$
Neste caso,
$$\boxed{f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}\,.}$$
- *Quando f admitir derivada $f'(p)$ em p, diremos que f é* **derivável** *ou* **diferenciável em** p.
- *Quando f admitir derivada $f'(p)$ em todo ponto $p \in A$, $A \subset D_f$, diremos que f é* **derivável** *ou* **diferenciável em** $A \subset D_f$.
- *Quando f admitir derivada $f'(p)$ em todo ponto $p \in D_f$, diremos simplesmente que f é* **derivável** *ou* **diferenciável**.

Exemplo 4.1. *Seja $f(x) = 2x^2 - 3$. Então*

$$(a)\ f'(0) = 0; \qquad (b)\ f'(2) = 8; \qquad (c)\ f'(p) = 4p.$$

Por definição

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2h = 0,$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(2+h)^2 - 8}{h} = \lim_{h \to 0} 8 + 2h = 8,$$

e em geral, para qualquer p,

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(p+h)^2-2p^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4p+2h = 4p.$$

Exemplo 4.2. *Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em 0.*

Vejamos que $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ não existe. Calculemos os limites laterais

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

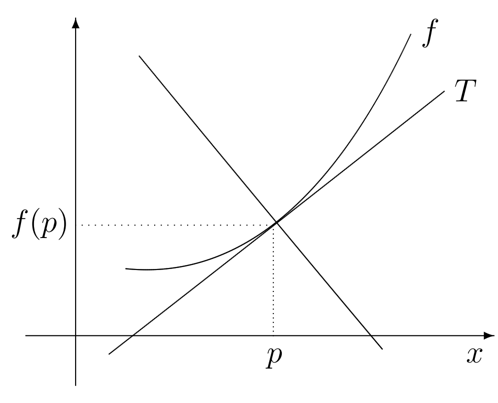
Portanto não existe $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$, ou seja, não existe $f'(0)$.

Conforme vimos, podemos interpretar a derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função.

Definição 4.2 (Reta Tangente e Reta Normal)**.** *A equação da* **reta tangente** *a uma curva $y = f(x)$ no ponto $(p, f(p))$ é dada por*

$$y - f(p) = f'(p)(x-p).$$

Definimos a **reta normal** *a uma curva $y = f(x)$ no ponto $(p, f(p))$ como a reta que é perpendicular à reta tangente nesse ponto.*



Se $f'(p) \neq 0$, então o coeficiente angular da reta normal é $-\dfrac{1}{f'(p)}$ e sua equação

$$y - f(p) = -\frac{1}{f'(p)}(x-p).$$

Se $f'(p) = 0$ então a equação da reta normal será $x = p$.

Exemplo 4.3. *Seja* $f(x) = 2x^2 - 3$*. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* f *nos pontos*

$$(a)\ (0\,,\ f(0)); \qquad\qquad (b)\ (2\,,\ f(2)).$$

(b) Já vimos que $f'(2) = 8$. Portanto, a equação da reta tangente é $y-5 = 8(x-2)$ e a equação da reta normal é $y - 5 = -\dfrac{1}{8}(x-2)$.

Exemplo 4.4. *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* $f(x) = 2x^2 - 3$ *e paralela à reta* $y = 2x + 3$.

Pela condição de paralelismo, devemos ter que

$$f'(p) = 2 \qquad \text{ou} \qquad 4p = 2, \qquad \text{logo} \qquad p = \frac{1}{2}.$$

Portanto a equação da reta tangente é

$$y - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = f'\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(x - \frac{1}{2}\Big), \qquad \text{ou seja} \qquad y + \frac{5}{2} = 2\Big(x - \frac{1}{2}\Big).$$

Taxas de Variação: Uma outra interpretação da derivada é como uma taxa de variação. Consideremos o problema de uma partícula que se desloca sobre o eixo x com função de posição $x = f(t)$. Então definimos a velocidade instantânea como o limite das velocidade médias em intervalos cada vez menores. Deste modo, a **velocidade instantânea** da partícula no instante t é dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)\,.$$

De maneira análoga, a **aceleração média** da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$ é dada por

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}\ ,$$

onde $v(t + \Delta t) - v(t)$ é a variação da velocidade entre os instantes t e $t + \Delta t$, e a **aceleração instantânea** ou simplesmente **aceleração** da partícula no instante t é dada por

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = f''(t).$$

Exemplo 4.5. *Uma partícula move-se sobre o eixo x de modo que, no instante t , a posição x é dada por $x = t^2,\ t \geq 0$,onde t é dado em segundos e x é dado em metros.*

(a) Qual a velocidade da partícula no instante t ?

(b) Qual a aceleração da partícula no instante t ?

A velocidade é dada pela derivada da função posição, logo

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = 2t,$$

e a aceleração é a derivada da velocidade,

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{2(t+h) - 2t}{h} = 2.$$

Assim, se $y = f(x)$ for uma função posição, a taxa de variação representa a velocidade. Suponhamos agora que uma quantidade y depende de outra quantidade x, de modo que y é uma função de x, ou seja $y = f(x)$. A **taxa média de variação** de f entre x e $x + \Delta x$ é dada por

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

A **taxa de variação** (instantânea) de f em x é dada por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e coincide com a derivada $f'(x)$ de f em x .

Observação: A taxa de variação tem uma interpretação específica dependendo da ciência à qual se refere. A seguir alguns exemplos:

- Suponha que a massa m de uma barra não homogênea seja uma função do comprimento, $m = f(x)$. Então definimos a **densidade linear** ρ como taxa de variação da massa em relação ao comprimento, ou seja, $\rho = f'(x)$.

- Se uma substância é mantida em uma temperatura constante, então seu volume V depende de sua pressão P, ou seja, $V(P)$. Podemos considerar a taxa de variação do volume em relação à pressão, ou seja, $V'(P)$. A **compressibilidade isotérmica** é definida por $\beta = -\frac{1}{V}V'(P)$.

- Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos em uma população no instante t. Então a taxa de variação da população com relação ao tempo é chamada **taxa de crescimento**.

- Suponha que $C(x)$ seja o custo total que uma companhia incorre na produção de x unidades de um produto. A taxa de variação do custo em relação ao número de ítens produzidos é chamado de **custo marginal**.

4.2 A Derivada Como uma Função

Definimos a derivada de uma função f em um número fixo p. Se substituirmos p por uma variável x, obteremos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dado um número x para o qual esse limite existe, atribuímos a x o número $f'(x)$, obtendo uma nova função f', chamada **derivada de** f. O domínio da função f' é o conjunto de pontos onde este limite existe.

Exemplo 4.6. *Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x-1}$ e determine o domínio de f'.*

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

Notações alternativas. Seja $y = f(x)$, onde f é uma função derivável. Podemos escrever, alternativamente,

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

para denotar a derivada de y ou f em relação à variável x.

O símbolo dy/dx não é um quociente; trata-se simplesmente de uma notação. Utilizando a notação de incremento, podemos escrever a definição de derivada como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.}$$

Daí, tomando $\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

O seguinte Teorema estabelece uma relação entre continuidade e diferenciabilidade.

Teorema 4.1. *Se f for uma função diferenciável em $p \in D_f$ então f será contínua em p.*

Prova. Devemos mostrar que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$ ou equivalentemente que $\lim\limits_{x \to p} f(x) - f(p) = 0$. Escrevemos

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}\,(x - p).$$

Assim

$$\lim_{x \to p} f(x) - f(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}\,(x - p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \lim_{x \to p}(x - p) = f'(p)0 = 0.$$

Portanto f é contínua em p. $\square$

Observação: Note que não vale a recíproca. A função $f(x) = |x|$ do Exemplo 4.2 é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo 4.7. *A função* $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ *é diferenciável em $x = 1$?*

Como o $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, $f(x)$ não é contínua em $x = 1$, logo não é diferenciável em $x = 1$.

Exercício: A função $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ é diferenciável em $x = 0$?

4.3 Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema 4.2 (Fórmulas de Derivação)**.** *São válidas as seguintes fórmulas de derivação*

(a) $f(x) = k$, k *constante* $\Longrightarrow$ $f'(x) = 0$,

(b) $f(x) = x^n \;\Longrightarrow\; f'(x) = n\,x^{n-1}\,,\;$ n *um inteiro positivo,*

(c) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \;\Longrightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}\,,\;$ n *un inteiro positivo,*

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x \;\Longrightarrow\; f'(x) = \cos x$,

(e) $f(x) = \cos x \;\Longrightarrow\; f'(x) = -\operatorname{sen} x$,

(f) $f(x) = e^x \Longrightarrow\; f'(x) = e^x$,

(g) $f(x) = \ln x \;\Longrightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0.$

Prova. Prova do item *(b)*. Lembremos que

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y\to x}(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Prova do item *(c)*. Fazendo $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ temos que quando $y \to x$, $u \to v$. Assim

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y - x} = \lim_{u\to v} \frac{u - v}{u^n - v^n} = \lim_{u\to v} \frac{1}{\frac{u^n - v^n}{u - v}} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Prova do item *(d)*.

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{sen\ y - sen\ x}{y - x} = \lim_{y\to x} \frac{2sen\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}{y - x} = \lim_{y\to x} \frac{sen\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}} = \cos x.$$

Prova do item *(e)*. Análoga ao item (d).

Prova do item *(f)*.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

pois, como vimos na seção 3.9, $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Prova do item *(g)*.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\Big(\frac{x+h}{x}\Big).$$

Fazendo $u = \frac{h}{x}$ temos que para $h \to 0,\ u \to 0$, assim

$$\lim_{h \to 0} \ln\Big(1 + \frac{h}{x}\Big)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{x} \ln\big(1+u\big)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

pois, como vimos na seção 3.9, $\lim_{u \to 0} \big(1+u\big)^{\frac{1}{u}} = e.$

$\square$

O seguinte Teorema fornece regras para calcular derivadas.

Teorema 4.3 (Regras de Derivação)**.** *Sejam f e g funções deriváveis em p e k uma constante. Então*

(a) kf será derivável em p e

$$\boxed{(kf)'(p) = kf'(p), \text{ (Regra do Múltiplo Constante)}}$$

(b) $f + g$ será derivável em p e

$$\boxed{(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p), \text{ (Regra da Soma)}}$$

(c) fg será derivável em p e

$$\boxed{(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p), \text{ (Regra do Produto)}}$$

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ *será derivável em* p*, se* $g(p) \neq 0$ *e, neste caso, teremos*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}, \quad \textbf{(Regra do Quociente)}.}$$

Exemplo 4.8. $f(x) = x^8 + 12x^5 - 6x + 2 \implies f'(x) = 8x^7 + 60x^4 - 6.$

Exemplo 4.9. $f(x) = x\cos x \implies f'(x) = \cos x - x sen\ x.$

Exemplo 4.10. $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3+6} \implies f'(x) = \dfrac{2x(x^3+6) - (x^2-2)3x^2}{(x^3+6)^2}.$

Exemplo 4.11. $f(x) = x^{-n} \implies f'(x) = -n\, x^{-n-1}\,, \quad x \neq 0\,,$ n *um inteiro positivo.*

Exemplo 4.12. $f(x) = \log_a x \implies f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}\,, \quad x > 0.$

Segue utilizando a mudança de base $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Exemplo 4.13. *Encontre a equação da reta tangente à curva* $y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ *no ponto* $(1, \frac{e}{2})$.

Como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$, a inclinação da reta tangente em $(1, \frac{e}{2})$ é $\dfrac{dy}{dx}(1) = 0$. Logo a equação da reta tangente é $y = \frac{e}{2}$.

Exercício: Calcule $f'(x)$ sendo

(a) $f(x) = \text{tg } x$; (b) $f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n$;

(c) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x\ln x}$; (d) $f(x) = e^x(\sqrt{x} + \sec x)$.

Exercício: Seja $y = 4x^2 + x\sqrt{x}$. Calcule a derivada em relação a x.

Exercício: Seja $s = \dfrac{\ln t}{t^2+1}$. Calcule $\dfrac{ds}{dt}$.

4.4 A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma fórmula para achar a derivada de uma função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

Teorema 4.4 (Regra da Cadeia - RC)**.** *Sejam $y = f(x)$ derivável e $x = g(t)$ derivável com $\mathrm{Im}\ g \subset D_f$. Seja $h = f \circ g$. Então h é derivável e vale*

$$\boxed{h'(t) = f'(g(t))g'(t), \quad \textit{para todo } t \in D_g.} \tag{4.2}$$

Notação alternativa. Nas condições do Teorema 4.4 temos

$$\begin{cases} y = f(x) & \Longrightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = f'(g(t)) \\ x = g(t) & \Longrightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = g'(t). \end{cases} \tag{4.3}$$

Por outro lado, $h(t) = f(g(t)) = f(x) = y$ ou seja $y = h(t)$. Portanto

$$\frac{dy}{dt} = h'(t). \tag{4.4}$$

Daí, substituindo (4.3) e (4.4) em (4.2), obtemos

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}, \quad \text{para todo } t \in D_g\,.}$$

Comentários sobre a prova da Regra da Cadeia. Seja $h = f \circ g$. Se assumimos que $g(t) \neq g(t_0)$, para t próximo de t_0, então,

$$h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{g(t) - g(t_0)} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = f'(g(t_0))g'(t_0).$$

No caso geral, uma outra prova deverá ser feita.

Exemplo 4.14. *Calcule a derivada de $h(t) = \cos(\sqrt{t})$.*

Fazendo $g(t) = \sqrt{t}$ e $f(x) = \cos x$, então $h(t) = f(g(t))$, $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $f'(x) = -\text{sen}\ x$. Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = -\text{sen}(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Observação: Observe que ao aplicar a Regra da Cadeia diferenciamos primeiro a função de fora f e avaliamos na função de dentro $g(x)$ e então multiplicamos pela derivada da função de dentro.

Exemplo 4.15. *Calcule a derivada de* $h(t) = \ln(4t-2)$.

Fazendo $g(t) = 4t-2$ e $f(x) = \ln x$, então $h(t) = f(g(t))$, $g'(t) = 4$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{1}{4t-2}4 = \frac{4}{4t-2}.$$

Exercício: Calcule $f'(x)$ se

$$(a)\ f(x) = (x^4 - 3x^2 + 7)^{10}; \qquad (b)\ f(x) = \operatorname{sen} 4x.$$

Exercício: Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $g(x) = f(\operatorname{tg} x)$. Calcule $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ supondo que $f'(1) = 2$.

Exemplo 4.16. *Se* $f(x) = e^{ax} \Longrightarrow f'(x) = ae^{ax}$.

Exemplo 4.17. *Calcule a derivada de* $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(e^x))$.

Podemos usar a Regra da Cadeia para derivar a função exponencial de qualquer base. Seja $a > 0$ uma constante com $a \neq 1$. Escrevemos $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a) = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

Logo

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Também podemos provar a **Regra da Potência**. Seja α uma constante e $x > 0$. Escrevemos $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha\ln x}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}e^{\alpha\ln x} = e^{\alpha\ln x}\frac{d}{dx}(\alpha\ln x) = x^\alpha\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Logo

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1} \text{ para todo } x > 0.}$$

Exercício: Prove a Regra da Potência para $x < 0$.

Regra da Potência combinada com a Regra da Cadeia: para qualquer número α e $g(x)$ diferenciável, temos

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^{\alpha} = \alpha[g(x)]^{\alpha-1}g'(x).$$

Exercício: Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$(a)\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}; \qquad\qquad (b)\ y = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^4.$$

Outras aplicações da Regra da Cadeia: Suponha $g(x)$ derivável. Então

$$(a)\ [e^{g(x)}]' = e^{g(x)}g'(x), \qquad\qquad (b)\ [\ln g(x)]' = \frac{g'(x)}{g(x)},$$

$$(c)\ [\cos g(x)]' = -g'(x)\,\mathrm{sen} g(x), \qquad\qquad (d)\ [\mathrm{sen} g(x)]' = g'(x)\cos g(x).$$

Exemplo 4.18.

$$(a)\ [e^{x^2}]' = e^{x^2}2x, \qquad\qquad (b)\ [\ln x^3]' = \frac{3x^2}{x^3},$$

$$(c)\ [\mathrm{sen} x^5]' = \cos(x^5)5x^4, \qquad\qquad (d)\ [\mathrm{sen}^5 x]' = 5\mathrm{sen}^4 x\cos x.$$

Podemos usar a Regra da Cadeia para calcular a derivada de uma função na forma $f(x)^{g(x)}$ onde f e g são deriváveis e $f(x) > 0$. Escrevemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Então,

$$[f(x)^{g(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)}[g(x)\ln f(x)]',$$

e portanto,

$$\boxed{[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)}[g(x)\ln f(x)]'.}$$

Exemplo 4.19. *Calcule a derivada de $f(x) = x^x$.*

Escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$ e aplicamos a Regra da Cadeia,

$$[x^x]' = e^{x\ln x}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1).$$

4.5 Derivação Implícita e Derivada da Função Inversa

Em geral, as funções são dadas na forma $y = f(x)$. Entretanto, algumas funções são definidas implicitamente por uma relação entre x e y. Por exemplo, $x^2+y^2 = 25$. Em alguns casos é possível resolver uma equação para y em função de x. Na equação anterior, obteremos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Logo, teremos duas funções determinadas pela equação implícita. Algumas vezes não é fácil resolver a equação para y em termos de x, tal como $x^3 + y^3 = 6xy$. Para calcular a derivada de y utilizamos a **derivação implícita**, que consiste em derivar a ambos os lados da equação em relação a x e então resolver a equação resultante para y'.

Exemplo 4.20. *Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.*

Derivando a ambos os lados da equação,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25 \Longrightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 0.$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dy}y^2\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}.$$

Assim, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

Exemplo 4.21. *Se $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.*

Derivando ambos os lados da equação em relação a x, obtemos $3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$. Resolvendo em y'

$$y' = \frac{2y^2 - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Exemplo 4.22. *Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável tal que $xf(x) + \text{sen}(f(x)) = 4$. Determine $f'(x)$.*

Exercício: Encontre y' se $\text{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

Vamos usar a derivação implícita para encontrar derivadas de funções inversas. Considere f inversível. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, então

$$[f(f^{-1}(x))]' = x' = 1.$$

Daí, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1\ .$$

Portanto, para todo $x \in D_{f^{-1}}$, tal que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, vale

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

e podemos enunciar o resultado seguinte.

Proposição 4.1 (Derivada de funções inversas)**.** *Seja f invertível. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$, com $f'(q) \neq 0$, e f^{-1} for contínua em p, então f^{-1} será diferenciável em p e*

$$\boxed{(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\ .}$$

Exemplo 4.23. $g(x) = x^{\frac{1}{n}} \implies g'(x) = \dfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$, *onde $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar* $(n \geq 2)$.

Note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ é a função inversa de $f(x) = x^n$. Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemplo 4.24. *A inversa da função $f(x) =$ sen x, para $x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, é a função $g(x) =$* $\operatorname{arcsen} x$, *para $x \in [-1,1]$. Qual é a derivada de $g(x)$?*

Observe que a função sen$x$ é injetora no intervalo $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ com imagem o intervalo $[-1,1]$. Portanto, existe a função inversa $g(x) = \operatorname{arcsen} x$, para $x \in [-1,1]$, dada por

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{sen} y = x.$$

Solução 1: Aplicando a Proposição 4.1.

$$\text{arcsen}'x = \frac{1}{\cos(\text{arcsen } x)}.$$

Agora, $1 = \cos^2(\text{arcsen } x) + \text{sen}^2(\text{arcsen } x) = \cos^2(\text{arcsen } x) + x^2$, logo $\cos(arcsenx) = \sqrt{1-x^2}$ pois $\cos y \geq 0$ para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Portanto,

$$\text{arcsen}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Solução 2: Utilizando derivação implícita.

$$y = \text{arcsen } x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{sen } y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Derivando implicitamente,

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Agora $1 = \cos^2 y + \text{sen}^2 y = \cos^2 y - x^2$. Como $\cos y \geq 0$ para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, concluímos

$$\text{arcsen}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, tg$x$, $\sec x$ e cotg x, denominadas arccos x, arctg x, arcsec x e arccotg x.

Exercício: Mostre que

$$(a)\ \text{arccos}'x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (b)\ \text{arctg}'x = \frac{1}{1+x^2};$$
$$(c)\ \text{arcsec}'x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}; \qquad (d)\ \text{arccotg}'x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

4.6 Derivadas de Ordens Superiores

Seja f uma função derivável em A. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ ou simplesmente f' é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de** f. De modo análogo, podemos definir a derivada de f' que será chamada **derivada segunda de** f. Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

e escrevemos $f'' = (f')'$, quando o limite existir. Também podemos escrever

$$f^{(2)} := f''.$$

A **derivada terceira de** f é a derivada da derivada segunda da f, escreveremos

$$f^{(3)} \quad \text{ou} \quad f'''$$

Para $n \in \mathbb{N}^*$, a **derivada n-ésima de** f será denotada por

$$f^{(n)}$$

quando esta existir.

Alternativamente, podemos escrever

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

para denotar a derivada segunda, f'', de $y = f(x)$. Analogamente, usamos

$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{ou} \quad \frac{d^3f}{dx^3}$$

para denotar a derivada de terceira, f''', de $y = f(x)$, e assim por diante.

Exemplo 4.25. *A posição da partícula é dada pela equação $s = f(s) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Encontre a aceleração no instante t.*

Exemplo 4.26. *Seja $f(x) = 3x^2 - 4x$. Calcule f', f'' e f'''.*

Exemplo 4.27. *Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$ então $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.*

Exemplo 4.28. *Seja $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$. Calcule f' e f'' quando existirem.*

Para $x < 0$ $f(x) = -x^2$, daí $f'(x) = -2x$. Para $x > 0$, $f(x) = x^2$, daí $f'(x) = 2x$. Em $x = 0$ devemos aplicar a definição. Note que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{x} & se\ x < 0, \\ \dfrac{x^2}{x} & se\ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & se\ x < 0, \\ x & se\ x > 0 \end{cases} = 2|x|$$

Portanto, $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Agora, $f''(x) = 2$ se $x < 0$, $f''(x) = 2$ se $x > 0$, e $f''(0)$ não existe.

Exercício: Seja $s = x(t)$ derivável até 2ª ordem. Mostre que

$$\frac{d}{dt}\left(s^2\frac{ds}{dt}\right) = 2s\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + s^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right).$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to (1, +\infty)$ diferenciável e suponha que $x^2 \ln(f(x)) = 3$, para todo $x \neq 0$. Mostre que, para todo $x \neq 0$, vale

$$f'(x) = \ln\left(\frac{1}{f(x)^{2f(x)}}\right).$$

4.7 Taxas Relacionadas

Suponha que z representa uma quantidade que depende de outras duas quantidades x e y, ou seja $z = f(x)$ e $z = u(y)$. A relação entre x e y pode ser expressada por uma função $y = v(x)$. Assim, $z = u(y) = u(v(x)) = f(x)$. Utilizando a Regra da Cadeia temos que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Portanto, a taxa de variação de z com relação a x é o produto entre a taxa de variação de z com relação a y e da taxa de variação de y com relação a x.

Exemplo 4.29. *Suponha que está sendo bombeado ar para dentro de um balão esférico, e seu volume cresce a uma taxa de $50cm^3/s$. Quão rápido o raio do balão está crescendo quando o raio é $5cm$.?*

Seja r o raio e V o volume do balão no instante t. Sabemos que a taxa de crescimento do volume é $\dfrac{dV}{dt} = 50$ e queremos determinar a taxa de crescimento do raio, $\dfrac{dr}{dt}$ quando $r = 5$. Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}.$$

Lembrando que $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Longrightarrow \dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$, logo

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}.$$

Concluímos que para $r = 5$, $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}$.

Exemplo 4.30. *Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio 2m e altura igual a 4m. Se a água está sendo bombeada dentro do tanque a uma taxa de 2m^3/min, encontre a taxa na qual o nível da água está elevando quando a água está a 3m de profundidade.*

Sejam V, r e h o volume da água, o raio da superfície e a altura no instante t. Sabemos que $\dfrac{dV}{dt} = 2$ queremos achar $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 3$. Temos que h e V estão relacionadas pela equação: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Por semelhança de triângulos $\dfrac{r}{h} = \dfrac{2}{4}$ logo $r = h/2$. Substituindo na expressão para V, obtemos $V = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{h}{2}^2 h = \dfrac{\pi}{12}h^3$. Agora, derivando com relação a t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt} \qquad \Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

Substituindo $h = 3$, $\dfrac{dV}{dt} = 2$, temos $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{8}{9\pi.}$

Exercício: O raio r de uma esfera está variando, com o tempo, a uma taxa constante de 5(m/s). Com que taxa estará variando o volume da esfera no instante em que $r = 2$(m)?

Exercício: Um ponto P move-se sobre a elipse

$$4x^2 + y^2 = 1\,.$$

Sabe-se que as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de P são funções definidas e deriváveis num intervalo I.

Verifique que

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4x}{y}\,\frac{dx}{dt}\,, \qquad \text{para todo } t \in I \text{ com } y(t) \neq 0\,.$$

Exercício: Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de 4 pés/s. Um holofote localizado no chão a 20 pés do caminho focaliza o homem. A que taxa o holofote esta girando quando o homem está a 15 pés do ponto do caminho mais próximo da luz?

4.8 Aproximações Lineares e Diferencial

Lembremos que uma curva fica muito perto de sua reta tangente nas proximidades do ponto de tangência. Assim, para aproximar uma função $y = f(x)$ quando x está próximo de p, usamos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, cuja equação é

$$y = f(p) + f'(p)(x - p)$$

e a aproximação

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p)$$

é chamada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** de f em p. A função linear $L(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ é chamada de **linearização** de f em p.

Exemplo 4.31. *Aproxime os números $\sqrt{3,98}$ e $\sqrt{4,05}$ utilizando a função $f(x) = \sqrt{x+3}$.*

Determinemos a equação da reta tangente em $p = 1$. Temos que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$. Logo a aproximação linear é

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \frac{1}{4}(x - 1).$$

Agora,

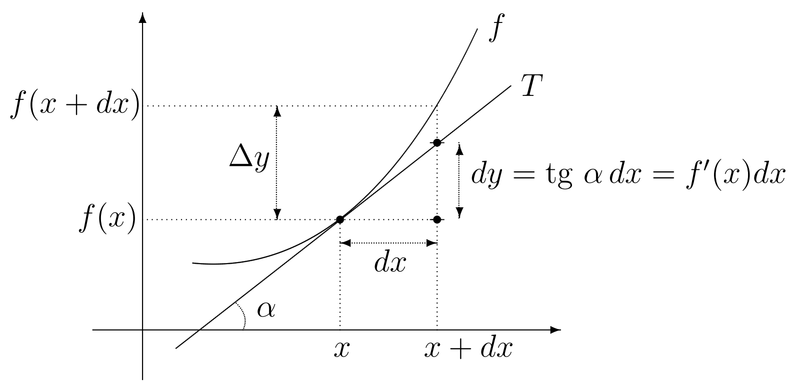
$$\sqrt{3,98} = f(0,98) \approx L(0,98) = 1,995 \quad \text{e} \quad \sqrt{4,05} = f(4,05) \approx L(1,05) = 2,0125.$$

As idéias por trás das aproximações lineares são algumas vezes formuladas em termos de diferenciais. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável. Considerando dx como uma variável independente, a diferencial é definida em termos de dx pela equação

$$dy = f'(x)dx.$$

Dizemos que dy é a **diferencial** de f em x ou simplesmente **diferencial** de $y = f(x)$.

Para interpretar geometricamente a diferencial, considere a seguinte figura.



Seja $dx = \Delta x$ a variação em x e $\Delta y = f(x+dx) - f(x)$ a variação em y. Sabemos que $f'(x)$ é o coeficiente angular da reta T tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$. Portanto dy representa a distância que a reta tangente sobe ou desce, enquanto Δy representa a distância que a curva $y = f(x)$ sobe ou desce quando x varia por uma quantidade dx.

Observação: Note que, quando dx for suficientemente pequeno, dy irá se aproximar de $\Delta y = f(x+dx) - f(x)$ no seguinte sentido

$$\frac{\Delta y - dy}{dx} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad dx \to 0.$$

Isto significa que o erro cometido ao aproximarmos Δy por dy é pequeno quando comparado a dx. Portanto

$$\Delta y \approx dy$$

para dx suficientemente pequeno.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear pode ser escrita como

$$f(p + dx) \approx f(p) + dy.$$

No exemplo anterior, para a função $f(x) = \sqrt{x+3}$ temos $dy = f'(x)dx = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+3}}$. Se $p = 1$ e $dx = \Delta x = 0,05$, então $dy = 0,0125$ e $\sqrt{4,05} = f(1,05) \approx f(1) + dy = 2,0125$ exatamente como antes.

Exemplo 4.32. *O raio de uma esfera tem 21 cm, com um erro de medida possível de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para computar o volume da esfera?*

Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \dfrac{4}{3}\pi\, r^3$. Denotamos o erro na medida do raio por $dr = \Delta r$. O erro correspondente no cálculo do volume é ΔV que pode ser aproximado pela diferencial $dV = 4\pi r^2 dr$. Quando $r = 21$ e $dr = 0,05$, temos $dV = 4\pi 21^2 0,05 \approx 277$. Logo o erro máximo no volume calculado será de aproximadamente $277cm^3$.

Exercício: Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para o acréscimo $\Delta\, y$ que a função $y = x^3$ sofre quando se passa de $x = 1$ para $1 + dx = 1,01$. Calcule o erro $\Delta y - dy$.

Exercício: Seja $V = \dfrac{4}{3}\pi\, r^3$.

(a) Calcule a diferencial de $V = V(r)$

(b) Calcule o erro $\Delta V - dV$.

Exercício: Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para $\sqrt{0,98}$. Avalie o erro.

Capítulo 5

Aplicações da Derivada

5.1 Máximos e Mínimos

Definição 5.1. *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.*

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de máximo local** *de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um* **máximo local**.

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de mínimo local** *de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é* **mínimo local**.

- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um* **ponto extremo local**, *se x_0 for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local.*

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de máximo global (ou absoluto)** *de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é* **máximo global**.

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de mínimo global** *de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é* **mínimo global**.

- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um* **ponto extremo global**, *se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.*

Exemplo 5.1. *O valor máximo de $f(x) = \cos x$ é 1, o qual é assumido infinitas vezes.*

Definição 5.2. *Um* **ponto crítico** *de uma função f é um ponto c onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Exemplo 5.2. *Os pontos críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$ são $\dfrac{3}{2}$ e 0.*

Temos que $f'(x) = \dfrac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$. Então, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, ou seja $x = \dfrac{3}{2}$ e $f'(0)$ não existe.

Observação: É claro que todo ponto extremo de uma função diferenciável definida num intervalo aberto é um ponto crítico e que nem todo ponto crítico é um ponto extremo. No entanto, se f estiver definida em um intervalo aberto, deveremos procurar os pontos extremos entre os pontos críticos. Estes últimos são, em geral, mais fáceis de encontrar.

Proposição 5.1. *Seja I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $c \in I$ for um ponto extremo (máximo ou mínimo) de f, então $f'(c) = 0$.*

Observações:

- Note que, se I não for um intervalo aberto, o resultado acima poderá não ser verdadeiro. Por exemplo, se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ for dada por $f(x) = x$, então os pontos extremos serão $x = 0$ e $x = 1$. Em ambos os casos, teremos $f'(x) = 1$.

- Note, ainda, que não vale a volta. Um exemplo que ilustra este fato é a função $f(x) = x^3$ que é estritamente crescente e é tal que $f'(0) = 0$.

- A função $f(x) = |x|$ tem valor mínimo em $x = 0$, mas $f'(0)$ não existe. Não podemos tirar a hipótese de diferenciável.

O Teorema de Weierstrass 3.14 afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo global, mas não diz como encontrar esses valores extremos. Notemos que o valor extremo ou ocorre num ponto crítico ou ocorre em um extremo do intervalo.

Método do Intervalo Fechado. Para encontrar os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos pontos críticos de f em (a, b).

2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo.

3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo global e o menor desses valores é o mínimo global.

Exemplo 5.3. *Um triângulo isósceles tem uma base de 6 unidades e uma altura de 12 unidades. Encontre a área máxima possível de um retângulo que pode ser colocado dentro do triângulo com um dos lados sobre a base do triângulo.*

Introduzimos um sistema de coordenadas cartesianas de modo a que a base do triângulo esta sobre a o eixo x e o eixo y corta o triângulo no meio. Logo, nosso problema será achar o valor máximo da área A dada por $A = 2xy$. Como o ponto (x, y) está sobre o lado do triângulo temos que $y = 12-4x$. Assim, a área pode ser expressa apenas em função de $x:\ A(x) = 2x(12-4x) = 24x - 8x^2$. Como x e y representam comprimentos e A é uma área, estas variáveis não podem ser negativas. Segue-se que $0 \leq x \leq 3$. Assim, nosso problema pode ser formulado da seguinte maneira: encontre o valor máximo da função

$$A(x) = 24x - 8x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3.$$

Temos que $A'(x) = 24 - 16x$, então $x = \dfrac{3}{2}$ é o único ponto crítico. Avaliamos A nos extremos e no ponto crítico: $A(0) = 0\, A(\frac{3}{2}) = 18$ e $A(3) = 0$. Portanto, a área máxima possível é 18 unidades.

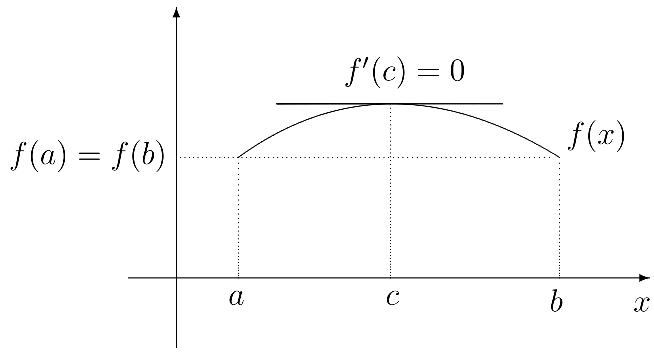
Exercício: Determine os valores máximo e mínimo globais fa função $f(x) = x - 2\text{sen } x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

5.2 O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas mais importantes do Cálculo. A sua demonstração depende do seguinte resultado:

Teorema 5.1 (de Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Interpretação: Seja $x = f(t)$ a posição de um objeto em movimento. Se o objeto estiver no mesmo lugar em 2 instantes diferentes, então pelo Teorema de Rolle existirá um tempo no qual a velocidade é nula.



Prova. Se f for constante em $[a, b]$ então $f'(x) = 0$. Logo pode ser tomado qualquer número c. Suponhamos agora que f não é constante. Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass 3.14, existem x_1 e x_2 tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$. Como f não é constante, $f(x_1) \neq f(x_2)$, logo x_1 ou x_2 pertence ao intervalo (a, b) e como são pontos extremos, $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$. Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. □

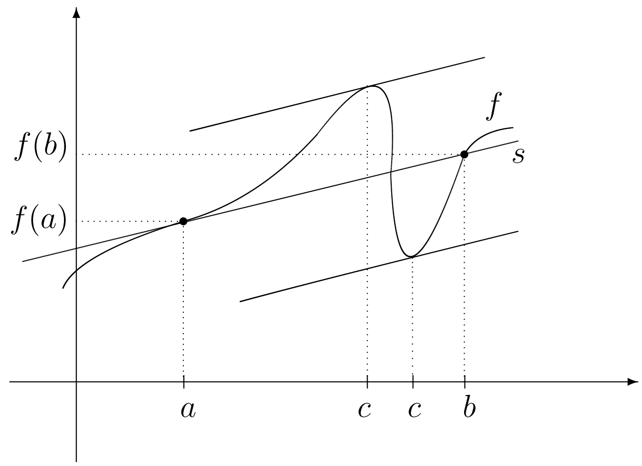
Teorema 5.2 (do Valor Médio - TVM)**.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b). *Então existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,,}$$

ou seja

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\;.}$$

Observação: O TVM nos diz que, se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta S que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Veja a figura seguinte.



Observação. Sabemos que, se $x = f(t)$ for a função de posição do movimento de uma partícula sobre o eixo x , então $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ será a velocidade média entre os instantes $t = a$ e $t = b$. Pelo TVM, existe um instante $c \in \ (a, b)$ tal que a velocidade média é igual à velocidade instantânea em $t = c$, isto é $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Prova. A equação da reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Definamos

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Para aplicar o Teorema de Rolle 5.1 a $h(x)$ devemos verificar as hipóteses.

(a) $h(x)$ é contínua em $[a, b]$ pois é soma da função contínua f e um polinômio de grau 1.

(b) Analogamente, $h(x)$ é diferenciável em (a, b).

(c) $h(a) = h(b) = 0$.

Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

e o TVM está demonstrado. □

Agora vamos obter informação do comportamento de uma função a partir de suas derivadas.

Os fatos a seguir são conseqüências do TVM.

Corolário 5.1 (Teste Crescente/Decrescente)**.** *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável no intervalo (a, b).*

- *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será estritamente crescente em $[a, b]$.*
- *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f será estritamente decrescente em $[a, b]$.*

Prova. Queremos provar que se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$. Pelo TVM aplicado a f em $[x_1, x_2]$, existe um $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ devemos ter que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Logo f é crescente. A prova do outro item é análoga. □

É fácil ver que, se f for diferenciável e crescente (resp. decrescente) em (a, b), então $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$), para todo $x \in (a, b)$. O corolário a seguir mostra que a recíproca também é verdadeira.

Corolário 5.2. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável no intervalo (a, b).*

- *Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será crescente em $[a, b]$.*
- *Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f será decrescente em $[a, b]$.*

Exemplo 5.4. *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f e esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.*

Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)(x - \frac{1}{3})$ e analisamos o sinal.

- $f'(x) > 0$ em $(-\infty, \frac{1}{3})$ e $(1, +\infty) \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $(-\infty, \frac{1}{3}]$ e $[1, +\infty)$,
- $f'(x) < 0$ em $(\frac{1}{3}, 1) \Rightarrow f$ é estritamente decrescente $[\frac{1}{3}, 1]$.

A proposição seguinte segue dos corolários do TVM.

Proposição 5.2 (Teste da Derivada Primeira)**.** *Seja f uma função contínua e c um ponto crítico de f.*

(i) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(ii) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

Exemplo 5.5. *Determine os valores de máximo e mínimo locais de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$ e esboce o gráfico.*

Temos que $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{(1 + 3x^2)^2}$. Como $(1 + 3x^2)^2 > 0$ para todo x, o sinal de f' é dado pelo sinal do numerador $3x^2 + 2x - 1 = 3(x + 1)(x - \frac{1}{3})$. Então,

- $f'(x) = 0$ se $x = -1$ e $x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1$ e $x = \frac{1}{3}$ são pontos críticos,
- $f'(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(\frac{1}{3}, +\infty) \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $(-\infty, -1]$ e $[\frac{1}{3}, +\infty)$,
- $f'(x) < 0$ em $(-1, \frac{1}{3}) \Rightarrow f$ é estritamente decrescente $[-1, \frac{1}{3}]$.

Portanto, $x = -1$ é um ponto de máximo local com valor máximo $f(-1) = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{3}$ é um ponto de mínimo local com valor mínimo $f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$.

Exemplo 5.6. *Mostre que $e^x > x$, para todo $x \geq 0$.*

Considere $f(x) = e^x - x$. Temos que $f(0) = 1$ e $f'(x) = e^x - 1 > 0$ para $x > 0$. Assim f é estritamente crescente em $[0, +\infty)$. Portanto $f(x) = e^x - x \geq f(0) = 1 > 0$.

Exemplo 5.7. *Determine os valores de máximo e mínimo locais de $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$ e esboce o gráfico.*

Temos que $f'(x) = \dfrac{8x}{(4 - x^2)^2}$. Então,

- $f'(x) = 0$ se $x = 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto crítico,
- $f'(x) > 0$ se $x > 0$, $x \neq 2 \Rightarrow f$ é estritamente crescente para $x \geq 0$, $x \neq 2$
- $f'(x) < 0$ se $x < 0$, $x \neq -2 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente para $x \leq 0$, $x \neq -2$.

Portanto, $x = 0$ é um ponto de mínimo local com valor mínimo $f(0) = 0$.

Exercício: Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, os valores de máximo e de mínimo e esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x - 3x^2}$

Exercício: Seja $a \in \mathbb{R}$.

(a) Prove que $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + a$ admite uma única raiz real.

(b) Determine a para que a raiz real de f pertença a $(-2, -1)$.

5.3 Concavidade e Pontos de Inflexão

Agora vamos obter informação da f a partir de sua derivada segunda. Sejam f derivável em (a, b) e $p \in (a, b)$. Consideremos a reta tangente T_p ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ dada por

$$T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Definição 5.3. *Seja f derivável em (a, b). Diremos que*

- *f tem* **concavidade para cima** *em (a, b) se, para quaisquer $x, p \in (a, b)$, com $x \neq p$, tivermos*

  $$f(x) > T_p(x).$$

  Neste caso, f será dita **côncava** *ou* **côncava para cima** *em (a, b).*

- *f tem* **concavidade para baixo** *em (a, b) se, para quaisquer $x, p \in (a, b)$, com $x \neq p$, tivermos*

  $$f(x) < T_p(x).$$

  Neste caso, f será dita **convexa** *ou* **côncava para baixo** *em (a, b).*

O próximo teorema estabelece condições suficientes para que uma função f seja côncava para cima ou para baixo.

Teorema 5.3. *Seja f uma função derivável em (a, b). Valem as afirmações*

(i) Se f' for estritamente crescente em (a, b), então f será côncava para cima em (a, b).

(ii) Se f' for estritamente decrescente em (a, b), então f será côncava para baixo em (a, b).

Corolário 5.3 (Teste da Concavidade)**.** *Seja f uma função derivável até segunda ordem em (a, b). Valem as afirmações*

(i) Se $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f será côncava para cima (a, b).

(ii) Se $f''(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f será côncava para baixo em (a, b).

Exemplo 5.8. *Estude a concavidade de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e esboce o gráfico.*

$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Como $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ para todo x, o sinal de f'' é dado pelo sinal de $x^2 - 1$. Portanto,

- $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty) \Rightarrow f$ é côncava para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$,
- $f''(x) < 0$ em $(-1, 1) \Rightarrow f$ é côncava para baixo em $(-1, 1)$.

Definição 5.4. *Seja f uma função contínua em $p \in D_f$. Diremos que p é* **ponto de inflexão de** *f se existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

(i) $p \in (a, b) \subset D_f$;

(ii) ou $f\big|_{(a,p)}$ é côncava e $f\big|_{(p,b)}$ é convexa, ou $f\big|_{(a,p)}$ é convexa e $f\big|_{(p,b)}$ é côncava.

Ou seja, p é um ponto onde muda a concavidade da função.

Exemplo 5.9. *Os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão de $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.*

Exemplo 5.10. *$x = 0$ é um ponto de inflexão de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.*

Exercício: Mostre que $x = 0$ é um ponto de inflexão de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Definição 5.5. *Se f for uma função diferenciável em $p \in (a, b)$ e p for um ponto de inflexão de f, diremos que p é um* **ponto de inflexão horizontal**, *se $f'(p) = 0$. Caso contrário diremos que p é um* **ponto de inflexão oblíquo**.

Observação: Os pontos de inflexão horizontais são pontos críticos, enquanto que os pontos de inflexão oblíquos não os são. No exemplo acima, $x = 0$ é um ponto de inflexão horizontal.

Exemplo 5.11. *Os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão oblíquos de $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.*

Exemplo 5.12. *O ponto $x = 0$ é um ponto de inflexão horizontal de $f(x) = x^3$.*

Corolário 5.4. *Se f for duas vezes diferenciável em (a, b) e $p \in (a, b)$ for um ponto de inflexão de f, então $f"(p) = 0$.*

Exercício: Mostre que $x = 0$ é um ponto de inflexão de $f(x) = x^{2n+1}$, para todo número natural $n \geq 1$.

Teorema 5.4. *Seja f três vezes diferenciável em (a, b) com derivada terceira contínua. Se $p \in (a, b)$ for tal que $f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$, então p será um ponto de inflexão de f.*

Teorema 5.5. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a, b) e $p \in [a, b]$. Valem as afirmações:*

(i) Se $f'(p) = 0$ e f' for crescente em (a, b), então p será ponto de mínimo local de f.

(ii) Se $f'(p) = 0$ f' for decrescente em (a, b), então p será ponto de máximo local de f.

Proposição 5.3 (Teste da Derivada Segunda)**.** *Suponhamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admita derivada de segunda ordem contínua em (a, b) e seja $p \in [a, b]$. Valem as afirmações:*

(i) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p será ponto de mínimo local de f.

(ii) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então p será ponto de máximo local de f.

Exemplo 5.13. *Determine os pontos críticos da função f e classifique-os (pontos máximo, mínimo local) sendo*

$$(a)\ f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3; \qquad\qquad (b)\ f(x) = x^2 e^{-5x}.$$

(a) Temos $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4)$. Portanto, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 4$ são os pontos críticos de f. Como $f''(-1) = 5$, $f''(0) = -4$ e $f''(4) = 20$ concluímos que 0 é ponto de máximo e -1 e 4 são pontos de mínimo.

(b) $x = 0$ é ponto de máximo e $x = \dfrac{2}{5}$ é ponto de mínimo.

Exemplo 5.14. *Esboce o gráfico de* $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

Calculando as derivadas

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Os pontos críticos são $x = 4$, $x = 0$ e $x = 6$. Analisando o sinal da derivada primeira

- Se $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.
- Se $0 < x < 4 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente.
- Se $4 < x < 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.
- Se $x > 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.

Pelo teste da Derivada Primeira

- $x = 0$ é um ponto de mínimo local.
- $x = 4$ é um ponto de máximo local.

Observe que o teste da Derivada Segunda poderia ser usado em 4, mas não em 0 ou 6. Analisando o sinal da derivada segunda

- Se $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ é côncava para baixo.
- Se $0 < x < 6 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ é côncava para baixo.
- Se $x > 6 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ é côncava para cima.

O único ponto de inflexão é $x = 6$. Observe que as retas tangentes em $x = 0$ e $x = 6$ são verticais.

Exemplo 5.15. *Esboce o gráfico de* $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Calculando as derivadas

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}, \qquad f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

O ponto crítico é $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Analisando o sinal da derivada primeira

- $f'(x) > 0$ se $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f$ é crescente em $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ se $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

Pelo teste da Derivada Primeira ou Segunda $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é um ponto de mínimo local. Analisando o sinal da derivada segunda

- Se $-1 < x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ é côncava para baixo.
- Se $x > 0$ ou $x < -1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ é côncava para cima.

O único ponto de inflexão é $x = -1$.

Exercício: Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercício: Mostre que $x = 0$ é um ponto de mínimo e um ponto de inflexão para

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Observações: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a, b). É preciso destacarmos que

- Se $f'(p) = 0$, então p não será necessariamente um ponto de máximo ou de mínimo local. Neste caso, p poderá ser ponto de inflexão (horizontal).
- Nas condições da Proposição 5.1, se $f'(p) \neq 0$, então p não será ponto de máximo ou mínimo local de f.

Entretanto,

- Podemos ter p um ponto de máximo ou mínimo local de f sem que exista $f'(p)$. Neste caso, p será ponto das extremidades de $[a, b]$, isto é, $p = a$ ou $p = b$.

5.4 Regras de L'Hospital

As regras de L'Hospital se aplicam a cálculos de limites que apresentam as seguintes indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\infty}{\infty}\,.$$

1ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g funções deriváveis em $(p-r\,,\,p)$ e em $(p\,,\,p+r)$, $r>0$, com $g'(x)\neq 0$ para $0<|x-p|<r$. Se

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 = \lim_{x\to p} g(x)$$

e o limite $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então o limite $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$ também existirá e teremos

$$\boxed{\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .}$$

Comentários sobre a prova da Regra de L'Hospital: No caso particular no qual $f(p) = g(p) = 0$, f' e g' contínuas e $g'(p)\neq 0$ é fácil ver que é verdadeira. De fato,

$$\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{g(x)-g(p)} = \lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Observação: A 1ª regra de L'Hospital ainda será válida se, em lugar de $x\to p$, tivermos $x\to p^+$, $x\to p^-$, $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.

Exemplo 5.16. *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{x}$.

Como $\displaystyle\lim_{x\to 0} 1-e^{2x} = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} x = 0$ pela Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{2x})'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{-2e^{2x}}{1} = -2.$$

Exemplo 5.17. *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}$.

Como $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} x = 0$ pela Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\ x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}\ x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

2ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g funções deriváveis em $(p-r\,,\,p)$ e em $(p\,,\,p+r)$,

$r > 0$, com $g'(x) \neq 0$ para $0 < |x - p| < r$. Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty = \lim_{x \to p} g(x)$$

e o limite $\lim_{x \to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então o limite $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ também existirá e teremos

$$\boxed{\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ .}$$

Observação: A 2ª regra de L'Hospital ainda será válida se, em lugar de $x \to p$, tivermos $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Esta regra também permanecerá válida caso tenhamos $-\infty$ em lugar de $+\infty$ em um ou ambos os limites.

Exemplo 5.18. *Calcule* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

Como $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ pela Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Exemplo 5.19. *Calcule* $\lim_{x \to 0} \dfrac{tg\ x - x}{x^3}$.

Como $\lim_{x \to 0} \operatorname{tg}\ x - x = 0$ e $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$ usamos a Regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}\ x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}.$$

Como $\lim_{x \to 0} \sec^2 x - 1 = 0$ e $\lim_{x \to 0} 3x^2 = 0$ usamos mais uma vez a Regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\ \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}.$$

Como ainda o numerador e o denominador tendem a zero, usamos pela terceira vez a Regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\ \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{4\ \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\ \sec^4 x}{6} = \frac{1}{3}.$$

Observação: As Regras de L'Hospital se aplicam a indeterminações da forma $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$. As outras formas de indeterminação, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, $\infty^0, 0^\infty, 1^\infty$, podem ser reduzidas a estas.

Exemplo 5.20. *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$.

Observe que é uma indeterminação da forma $0 \cdot -\infty$. Escrevendo $x \ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ obtemos uma indeterminação da forma $\dfrac{-\infty}{\infty}$. Pela Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0.$$

Exemplo 5.21. *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{sen\ x} \right)$.

Observe que é uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Escrevendo

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen } x} \right) = \frac{\text{sen } x - x}{x\text{sen } x}$$

obtemos uma indeterminação da forma $\dfrac{0}{0}$ e podemos aplicar a Regra de L'Hospital.

Exemplo 5.22. *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$.

Observe que é uma indeterminação da forma 0^0. Escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = \exp\Big(\lim_{x \to 0^+} x \ln x \Big) = e^0 = 1.$$

Exemplo 5.23. *Calcule* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Observe que é uma indeterminação da forma ∞^0. Escrevemos $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \exp\Big(\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \Big).$$

Observe que temos uma indeterminação da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, então pela Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Exemplo 5.24. *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$.

Observe que é uma indeterminação da forma 0^∞. Escrevemos $\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)}$. Agora,

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right) = +\infty \cdot -\infty = -\infty$$

e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to+\infty} e^{(x+1)\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)\ln\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) = 0.$$

Exemplo 5.25. *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Observe que é uma indeterminação da forma 1^∞. Escrevemos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Agora temos uma indeterminação da forma $0\cdot\infty$ que pode ser reduzida a $\dfrac{\infty}{\infty}$. Então, pela regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = e^1 = e.$$

Exercício: Calcule os seguintes limites:

$$
\begin{array}{ll}
(a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}, [R:0]; & (b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}}, [R:e]; \\
(c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}, [R:+\infty]; & (d)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}, [R:0]; \\
(e)\ \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\text{sen } x}{1-\cos x}, [R:0]; & (f)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \text{tg } x}{x - \text{sen } x}, [R:-2]; \\
(g)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-x}, [R:4]; & (h)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x, [R:1].
\end{array}
$$

5.5 Polinômios de Taylor

Os polinômios são as funções mais fáceis de manipular, já que os valores das funções polinomiais podem ser obtidos através de simples adições e multiplicações. Parece natural, portanto, aproximar funções mais complicadas por funções polinomiais.

Nesta seção, vamos discutir a **Fórmula de Taylor** a qual nos fornece uma regra para determinar o polinômio de grau n que melhor aproxima uma dada função ao redor de um ponto a interior ao domínio de f.

O exemplo mais simples de aproximação de uma função por um polinômio é a aproximação linear (diferencial) que estudamos na seção 4.8. Assim como naquele caso, vamos considerar a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x = p$

$$L(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$$

para aproximar a função $f(x)$ para x no ao redor de p. A idéia básica é aproximar a função $f(x)$ ao redor de a por uma função linear que passe pelo ponto $(p, f(p))$ e cuja derivada seja a mesma da função $f(x)$ no ponto p.

Definimos o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $L(x)$ por

$$E(x) = f(x) - L(x).$$

Observemos que, para $x \neq a$, temos

$$\frac{E(x)}{x-p} = \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p).$$

Daí,

$$\lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x-p} = 0,$$

ou seja, quando $x \to p$, o erro $E(x)$ tende a zero *mais rapidamente* do que $(x-p)$.

Então definimos o **polinômio de Taylor de ordem 1 de** $f(x)$ **ao redor de** p por

$$\boxed{P_1(x) = f(p) + f'(p)(x-p),}$$

e P_1 é a função linear que melhor aproxima localmente $f(x)$ ao redor de p.

Exemplo 5.26. *O polinômio de Taylor de grau 1 da função* $f(x) = (1-x)^{-2}$ *ao redor do ponto zero é* $P_1(x) = 1 + 2x$.

Suponhamos agora que a função $f(x)$ seja duas vezes diferenciável e procuremos um polinômio $P(x)$, de grau no máximo 2, tal que

$$f(p) = P(p), \quad f'(p) = P'(p) \text{ e } f''(p) = P''(p).$$

Devemos procurar $P(x)$ na forma $P(x) = c_0 + c_1(x-p) + c_2(x-p)^2$ com os coeficientes a serem determinados. Utilizando as condições acima, obtemos

- $f(p) = P(p) \implies c_0 = f(p)$,
- $P'(x) = c_1 + 2c_2(x-p) \implies P'(p) = c_1 = f'(p)$,
- $P'(x) = 2c_2 \implies P'(p) = 2c_2 = f''(p) \implies c_2 = \dfrac{f''(p)}{2}$.

Concluímos, portanto, que

$$P(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2.$$

Assim como anteriormente, definimos o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $P(x)$ por

$$E(x) = f(x) - P(x).$$

Observemos que, para $x \neq p$,

$$\frac{E(x)}{(x-p)^2} = \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) - \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2}{(x-p)^2},$$

e, utilizando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x \to p} \frac{E(x)}{(x-p)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to p} \left[\frac{f'(x) - f'(p)}{(x-p)} - f''(p) \right] = 0.$$

Ou seja, quando $x \to p$, o erro $E(x)$ tende a zero *mais rapidamente* que $(x-p)^2$.

Definimos o **polinômio de Taylor de ordem 2 de** $f(x)$ **ao redor de** p por

$$\boxed{P_2(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2,}$$

e temos que P_2 é o polinômio de grau 2 que melhor aproxima localmente $f(x)$ ao redor de p.

Exemplo 5.27. *O polinômio de Taylor de grau 2 da função* $f(x) = e^x$ *ao redor do ponto zero é* $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

De forma geral, se a função dada $f(x)$ for derivável até ordem n e procuramos um polinômio P de grau n satisfazendo

$$P^{(k)}(p) = f^{(k)}(p), \qquad k = 0, 1, 2, ..., n,$$

poderemos concluir que tal polinômio terá a seguinte forma

$$\boxed{P_n(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n,}$$

o qual é chamado de **polinômio de Taylor de ordem n de** $f(x)$ **ao redor de** p.

Exemplo 5.28. *O polinômio de Taylor de ordem 4 ao redor do zero da função* $f(x) = e^x$ *é* $P_4(x) = 1 + x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!}$.

Para avaliarmos a precisão com que uma função é aproximada por polinômios de Taylor, vamos definir o erro como sendo

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

onde $f(x)$ é a função dada e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de grau n ao redor de p.

Exercício: Verifique que, quando $x \to p$, o erro $R_n(x)$ tenderá a zero *mais rapidamente* que $(x-p)^n$.

O teorema a seguir nos fornece uma fórmula para o erro.

Teorema 5.6 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)**.** *Suponhamos que a função $f(x)$ seja $(n+1)$ vezes diferenciável no ao redor do ponto p. Então*

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}}$$

para algum $\bar{x}$ entre x e p.

Exemplo 5.29. *Utilizando polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado para $\ln(1,03)$ e avalie o erro.*

O polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = \ln x$ em volta de $p = 1$ é

$$P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Logo, $P_2(1,03) = 0,02955$ é uma aproximação para $\ln(1,03)$. Avaliemos o erro. Temos que $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, assim, $|f'''(x)| \leq 2$ para $x \geq 1$. Pela fórmula do erro,

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{2}{3!}|x-1|^3, \qquad x \geq 1.$$

Segue que, para $x = 1,03$ o erro cometido na aproximação é

$$|f(1,03) - P_2(1,03)| \leq \frac{1}{3}(0,03)^3 = 9(10)^{-6} < 10^{-5}.$$

Exemplo 5.30. *O polinômio de Taylor de ordem n ao redor do zero da função $f(x) = e^x$ é $P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$.*

Exemplo 5.31. *Calcule um valor aproximado para o número e e avalie o erro.*

Observe que para $x \in [0,1]$, $0 \leq e^x = f^{(n+1)}(x) \leq e < 3$. Pelo Teorema anterior, o erro é dado por

$$|e^1 - P_n(1)| = \Big|e - \Big(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!}\Big)\Big| = |R_n(1)| = \Big|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\Big|$$

para algum $x \in [0,1]$. Logo,

$$\Big|e - \Big(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!}\Big)\Big| \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Observação: Aplicando o Teorema do Confronto obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!}\Big) = e.$$

Exemplo 5.32. *Avalie e com um erro inferior a 10^{-5}.*

Queremos que $R_n(1) < 10^{-5}$. Logo basta tomar n tal que $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$, ou seja, tal que $(n+1)! > 3(10^5)$. Por tentativas, chega-se a $n = 8$.

Exercício: Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{7,9}$ e avalie o erro.

5.6 Assíntotas

Definição 5.6. *A reta $x = p$ é chamada de* **assíntota vertical** *para uma função f se*

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty \quad ou \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty \quad ou \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x\to p} f(x) = -\infty \quad ou \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty \quad ou \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty.$$

Exemplo 5.33. *A reta $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$.*

Definição 5.7. *A reta $y = L$ é chamada de* **assíntota horizontal** *para uma função f se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad ou \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Exemplo 5.34. *A reta $y = 1$ é assíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.*

Definição 5.8. *Seja f uma função. Se existir uma reta de equação $y = mx + n$ tal que*

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (mx+n)] = 0$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx+n)] = 0\ ,$$

então tal reta será dita uma **assíntota** *para f. Se $m = 0$, teremos uma* **assíntota horizontal** *e, se $m \neq 0$, teremos uma* **assíntota oblíqua**.

Observação: A distância vertical entre a curva $y = f(x)$ e a reta $y = mx + n$ tende a 0.

Exemplo 5.35. *Determine as assíntotas de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ e esboce o gráfico.*

Como $x^2 + 1$ nunca é 0, não há assíntota vertical. Uma vez que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, não há assíntotas horizontais. Escrevemos

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

então

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Portanto, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua. Para esboçar o gráfico calculamos as derivadas

$$f'(x) = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} \qquad\qquad f''(x) = \frac{-2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

Portanto, $x = 0$ é o único ponto crítico e f é estritamente crescente, logo não tem máximos nem mínimos. Analisando o sinal da derivada segunda, concluímos que

- se $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ ou $x \in (0, \sqrt{3}) \Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow f$ é côncava para cima,
- se $x \in (-\sqrt{3}, 0)$ ou $x \in (\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow f$ é côncava para baixo.

Procedimento para determinar assíntotas: Primeiro determine m, caso exista, através do limite

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Em seguida, calcule

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx].$$

Se n for finito então $y = mx + n$ será assíntota para $x \to \pm\infty$.

Exemplo 5.36. *Determine as assíntotas de $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$ e esboce o gráfico.*

Temos

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \begin{cases} \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Segue que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$. Assim $m = 2$ para $x \to +\infty$ e $m = -2$ para $x \to -\infty$. Determinemos agora n.

$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} = \frac{1}{4}.$$

Logo, $y = 2x + \dfrac{1}{4}$ é assíntota para $x \to +\infty$. Analogamente vemos que $y = -2x - \dfrac{1}{4}$ é assíntota para $x \to -\infty$. Para esboçar o gráfico calculamos as derivadas

$$f'(x) = \frac{8x + 1}{2\sqrt{4x^2 + x + 1}} \qquad\qquad f''(x) = \frac{15}{4\sqrt{4x^2 + x + 1}(4x^2 + x + 1)}.$$

O único ponto crítico é $x = -\dfrac{1}{8}$ que é um ponto de mínimo local. Como $f'' > 0$, f é côncava para cima para todo x.

Exercício:

(a) Mostre que

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{3x^3 - x^2} - \sqrt[3]{3}\,x + \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \right) = 0.$$

(b) Conclua que a reta de equação $y = \sqrt[3]{3}\,x + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{9}$ é uma assíntota de f.

5.7 Esboço de Gráficos de Funções

A lista a seguir fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço do gráfico de uma função que mostre os aspectos mais importantes do seu comportamento.

1. Explicite o domínio da função.
2. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento.
3. Encontre os pontos críticos, determine os pontos de máximo e mínimo e calcule os seus valores.
4. Estude a concavidade e destaque os pontos de inflexão.
5. Calcule os limites laterais de f nos pontos p tais que f não é contínua em p ou se $f(p)$ não estiver definida, mas p for um extremo do domínio de f.
6. Calcule os limites de f para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.
7. Determine as assíntotas.
8. Localize as raízes de f.
9. Esboce a curva utilizando todas as informações anteriores.

Exercício: Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$
\begin{array}{ll}
(a)\ f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}; & (b)\ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}; \\
(c)\ f(x) = xe^x; & (d)\ f(x) = \ln(4-x^2); \\
(e)\ f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}; & (f)\ f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}.
\end{array}
$$

5.8 Problemas de Mínimos e Máximos

Os métodos estudados para encontrar mínimos e máximos de funções podem ser aplicados para resolver problemas práticos. O primeiro passo consiste em compreender o problema e converter-lo em um problema matemático estabelecendo a função que dever ser maximizada ou minimizada.

Exemplo 5.37. *Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que esteja inscrito na circunferência de raio R.*

Sejam x a altura do triângulo, y a base e z a medida de um dos lados congruentes. A área do triângulo é $A = \dfrac{1}{2}xy$ onde $x \in (0, 2R)$ e $y \in (0, 2R)$. Utilizando Teorema de Pitágoras temos que

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + (x - R)^2 = R^2 \quad \text{e portanto} \quad y = 2\sqrt{2Rx - x^2}.$$

Substituindo obtemos $A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2}$. Logo, nosso problema é maximizar a função

$$A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2} \qquad x \in (0, 2R).$$

Calculando a derivada

$$A'(x) = \frac{x(3R - 2x)}{\sqrt{2Rx - x^2}},$$

temos que ou $x = \dfrac{3}{2}R$ é o único candidato a ponto de máximo no intervalo $(0, 2R)$. Analisando o sinal da derivada primeira vemos que de fato $x = \dfrac{3}{2}R$ é um ponto de máximo. Portanto as dimensões são

$$\text{altura } x = \frac{3}{2}R \quad \text{e base } y = \sqrt{3}R \quad \text{e daí } z^2 = \frac{9}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2 = 3R^2.$$

Logo o triângulo é equilátero.

Exemplo 5.38. *Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.*

Seja r o raio da lata e h a altura em cm. Para minimizar o custo do material minimizamos a área da superfície total (topo, base e área lateral) dada por $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Agora, como o volume $V = \pi r^2 h$ tem $1000cm^3$, temos $\pi r^2 h = 1000$ ou seja $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$. Substituindo na expressão da área total obtemos $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\dfrac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$. Logo, nosso problema é minimizar a função

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0.$$

Calculamos a derivada

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}.$$

O ponto crítico é $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Como $S'(r) > 0$ se $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ e $S'(r) < 0$ se $r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ concluímos que $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ é um ponto de mínimo de S.

Portanto as dimensões da lata que exigem menor quantidade de material são:

$$\text{raio } r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \quad \text{e altura } h = \frac{1000}{\pi}\Big(\frac{\pi}{500}\Big)^{2/3} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

Logo a altura deve ser igual ao diâmetro da lata.

Exemplo 5.39. *Os pontos A e B estão em lados opostos de um rio reto com 3km de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas 2km rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por km de cabo é 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja menor para a companhia?*

Seja P um ponto na mesma margem que B e C e entre B e C, de tal forma que o cabo será estendido de A para P e deste para C. Seja $x\,km$ a distância de B a P. Logo, $(2-x)\,km$ será a distância de P até C e $x \in [0,2]$. Seja k o custo por km em terra e $\frac{5}{4}k$ o custo por km sob a água. Se $C(x)$ for o custo total, então

$$C(x) = \frac{5}{4}k\sqrt{3^2 + x^2} + k(2-x) \qquad x \in [0,2].$$

Para determinar o valor mínimo de C procuramos os pontos críticos.

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k.$$

Logo $x = \pm 4$ são pontos críticos, porém não pertencem ao intervalo $[0,2]$. Assim, o mínimo ocorre num dos extremos do intervalo. Calculando $C(0) = \dfrac{23}{4}k$ e $C(2) = \dfrac{5}{4}k\sqrt{13}$, concluímos que o valor mínimo ocorre quando $x = 2$. Logo para minimizar o custo, devemos estender o cabo diretamente de A até C sob a água.

Exemplo 5.40. *Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo $12 \times 12\,cm^2$ e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados dos lados devem ter para que a caixa chegue a sua capacidade máxima?*

Denotamos por x a medida dos lados dos quadrados a serem recortados. O volume da caixa é $V(x) = (12-2x)^2x = 144x - 48x^2 + 4x^3$ com $0 < x < 6$, a qual é a função que devemos maximizar. Derivando

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \text{ ou } x = 2.$$

O candidato a ponto de máximo é $x = 2$. Analisando o sinal de $V''(2) = -96 + (24)2 = -48 < 0$ vemos que, de fato, $x = 2$ é um ponto de máximo.

Exercício: Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$. [R: $(2, 2)$.]

Exercício: Um fabricante de armários é capaz de fazer 5 peças por dia. Uma entrega do material custa 5.000, enquanto sua estocagem custa 10 por dia por unidade (quantidade de materia prima para fazer uma peça). Quanto materia prima deve ser encomendada de cada vez e com que freqüência, de modo a minimizar o custo médio diário nos ciclos de produção entre as entregas?

[R: a função custo é $C(x) = \frac{5000}{x} + 25x$, onde x é o número de dias que a materia prima é estocada.]

Capítulo 6

A Integral

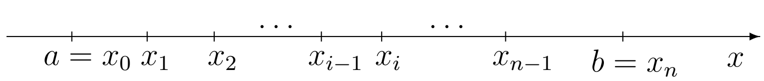
6.1 A Integral de Riemann

Definição 6.1. *Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado. Dizemos que*

$$P: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \ ,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, é uma **partição** *ou* **divisão** *de $[a,b]$. Neste caso, escrevemos $P = (x_i)$.*

Uma partição P de $[a,b]$ divide o intervalo em n intervalos.



Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos

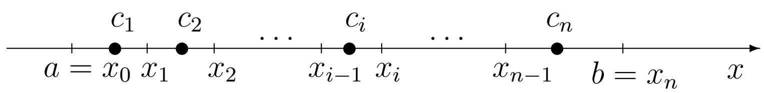
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

que é o "tamanho" ou comprimento do intervalo $[x_{i-1}\,,\, x_i]$. Definimos, também,

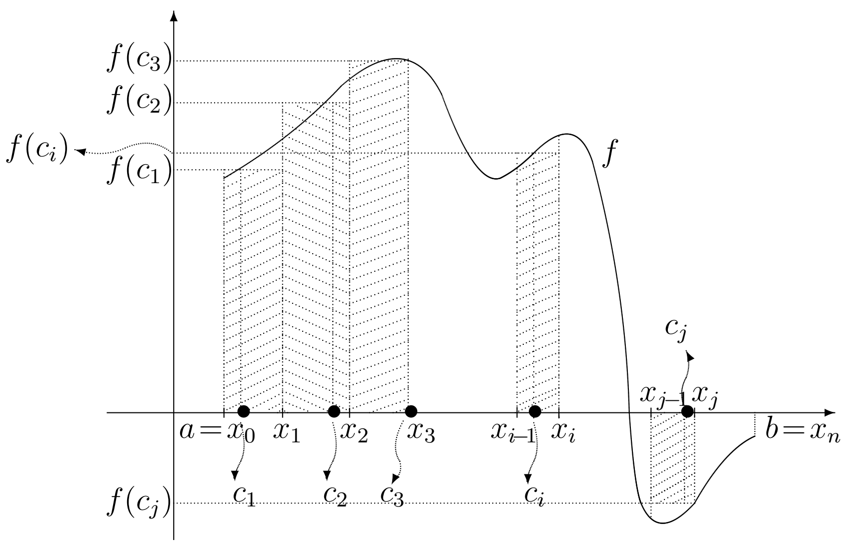
$$\Delta_P = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

que é o "tamanho máximo" ou comprimento máximo que um intervalo $[x_{i-1}\,,\, x_i]$ pode ter.

Sejam $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e $P = (x_i)$ uma partição de $[a,b]$. Para cada índice i seja c_i um número em $[x_{i-1}\,,\, x_i]$ escolhido arbitrariamente.



Consideremos a figura seguinte.

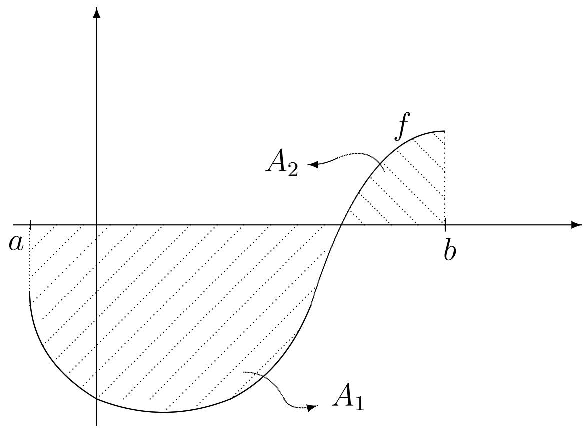


Definição 6.2. *A* **soma de Riemann** *de f em relação à P é dada por*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.}$$

Observação: Note que a soma de Riemann é igual à soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x menos a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x. Portanto a soma de Riemann é a diferença entre a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x.

Consideremos a figura seguinte.



Sejam f uma função contínua definida em $[a, b]$ e $P = (x_i)$ uma partição tal que $\Delta_P = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ seja suficientemente pequeno. Então a área

$$A = A_2 - A_1,$$

pode ser aproximada pela soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

ou seja,

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ .$$

Fazendo $\Delta_P \longrightarrow 0$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ \longrightarrow \ A$$

e, portanto,

$$\lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A.$$

Então podemos dar a definição seguinte.

Definição 6.3. *Diremos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é* **Riemann integrável** *ou simplesmente*

integrável, *se existir um número $A \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\boxed{\lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A}$$

onde $P = (x_i)$ é uma partição de $[a, b]$ e $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$.

Escrevendo o limite acima com ε's e δ's temos

Definição 6.4. *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ será dita* **integrável**, *se existir $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - A \right| < \varepsilon$$

para toda partição de $[a, b]$ com $\Delta_P < \delta$, qualquer que seja a escolha de $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$. Neste caso, escrevemos

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

que é chamada **integral definida** *ou simplesmente* **integral** *de f em relação à x no intervalo $[a, b]$.*

Observação: De acordo com a definição, o limite não depende da escolha dos c_i.

Propriedade: Se f for contínua em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.

Definição 6.5. *Se existir a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, então definiremos*

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

6.2 Propriedades da Integral

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Valem as seguintes propriedades

- A integral é única, isto é, f tem no máximo uma integral definida.

- A integral é linear, isto é, para todo $k \in \mathbb{R}$, a função $f + kg$ é integrável e

$$\int_a^b (f + kg)(x)\ dx = \int_a^b [f(x) + kg(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\ dx\,.$$

- A integral é positiva, isto é, se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$. Em particular, se $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx\,.$$

- A integral é aditiva, isto é, se existirem as integrais $\displaystyle\int_a^c f(x)\ dx$ e $\displaystyle\int_c^b f(x)\ dx$, com $c \in [a, b]$, então existirá a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ e

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ .$$

  Isto quer dizer que se f for integrável em todos os subintervalos de um intervalo $[a, b]$, então f será integrável em $[a, b]$. Em particular, quando $c = a$, teremos $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$.

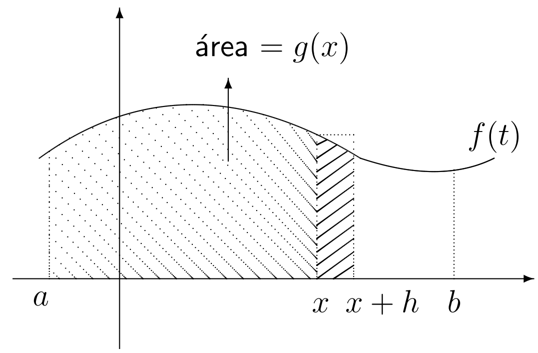
6.3 O Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

O Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre cálculo integral e o cálculo diferencial.

Consideremos qualquer função contínua f com $f(t) \geq 0$. Então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

pode ser interpretada como a área de f de a até x, onde x pode variar de a até b.



Para calcular $g'(x)$ por definição, primeiro observamos que, para $h > 0$, $g(x+h) - g(x)$ é obtida subtraindo-se as áreas, logo ela é a área sob o gráfico de f de x até $x+h$. Para h pequeno essa área é aproximadamente igual à área do retângulo com altura $f(x)$ e largura h,

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x), \qquad \text{logo} \qquad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Portanto, intuitivamente esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Isso é verdade em geral, como demonstra o seguinte Teorema.

Teorema 6.1 (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo - 1TFC)**.** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então a função g definida por*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\ dt, \qquad a \le x \le b$$

é diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Prova. Se x e $x+h$ estão em (a, b), então

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt \\ &= \int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt = \int_x^{x+h} f(t)\ dt, \end{aligned}$$

logo para $h \neq 0$,

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt.$$

Suponhamos que $h > 0$. Como f é contínua em $[x, x+h]$, pelo Teorema de Weierstrass 3.14 existem x_1 e x_2 em $[x, x+h]$ tais que $f(x_1) \leq f(t) \leq f(x_2)$ para todo $t \in [x, x+h]$. Logo,

$$f(x_1)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\ dt \leq f(x_2)h.$$

Como $h > 0$, podemos dividir por h, obtendo

$$f(x_1) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt \leq f(x_2),$$

ou equivalentemente,

$$f(x_1) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(x_2).$$

A desigualdade anterior pode ser provada de forma similar para $h < 0$.

Agora, quando $h \to 0$, $x_1 \to x$ e $x_2 \to x$. Conseqüentemente,

$$\lim_{h\to 0} f(x_1) = \lim_{x_1\to x} f(x_1) = f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} f(x_2) = \lim_{x_2\to x} f(x_2) = f(x),$$

pois f é contínua, e assim pelo Teorema do Confronto 3.3,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x),$$

e o 1TFC fica demonstrado. □

Exemplo 6.1. *Ache a derivada da função* $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\ dt$.

Como $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ é contínua, pelo 1TFC $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Exemplo 6.2. *Calcule a derivada de* $g(x) = \displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\ dt$.

Utilizamos o 1TFC e a Regra da Cadeia. Seja $u = x^4$, então

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\ dt \overset{RC}{=} \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\ dt\frac{du}{dx} = \sec u\frac{du}{dx} = \sec(x^4)4x^3.$$

6.4 Antiderivadas ou Primitivas

Já sabemos que a derivada de uma função constante é zero. Entretanto, uma função pode ter derivada zero em todos os pontos de seu domínio e não ser constante; por exemplo a função $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é tal que $f'(x) = 0$ em todo ponto de seu domínio, mas f não é constante. O seguinte corolário do TVM mostra que se f tiver derivada zero num intervalo, então f será constante nesse intervalo.

Corolário 6.1. *Se f for contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f será constante.*

Prova. Seja $x_0 \in [a,b]$ um ponto fixo. Para todo $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$, pelo TVM existe um $\bar{x}$ pertence ao intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0).$$

Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, temos que $f'(x_0) = 0$, logo

$$f(x) - f(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(x_0)$$

para todo $x \in [a,b]$. Portanto, f é constante. □

Observação: No corolário acima, é importante que o domínio de f seja um intervalo para que o resultado seja válido. No exemplo $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ temos $f'(x) = 0$ em todo ponto do domínio. A função f não é constante e, por outro lado, o domínio de f não é um intervalo.

Corolário 6.2. *Se duas funções definidas num intervalo aberto I tiverem a mesma derivada em todo ponto $x \in I$, então elas vão diferir por uma constante.*

Exercício: Encontre todas as funções f definidas em $\mathbb{R}$ tais que $f'(x) = x^2$ e $f''(x) = \operatorname{sen} x$.

Definição 6.6. *Uma* **primitiva** *ou* **antiderivada** *de f em um intervalo I é uma função derivável em I tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \textit{para todo } x \in I\,.$$

Observação: Se F for uma primitiva de f, então F será contínua, pois F é derivável.

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então $F(x)+k$ também será primitiva de f. Por outro lado, se houver uma outra função $G(x)$ primitiva de f, pelo visto anteriormente, F e G diferem, neste intervalo, por uma constante. Segue que as primitivas de f são da forma $F(x)+k$, com k constante. Denotamos por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \quad k \text{ constante}$$

a *família* de primitivas de f e é chamada de **integral indefinida de** f.

Exemplo 6.3. $\displaystyle\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + k.$

Exemplo 6.4. $\displaystyle\int\ dx = \int 1\ dx = x + k.$

Das fórmulas de derivação já vistas seguem as seguintes primitivas

(a) $\displaystyle\int c\,dx = cx + k;$

(b) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + k;$

(c) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1;$

(d) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen}\ x + k;$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + k \quad x > 0;$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + k \quad x < 0;$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\ x\,dx = -\cos x + k;$

(h) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + k;$

(i) $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k;$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + k;$

(k) $\displaystyle\int \sec x \operatorname{tg}\ x\,dx = \sec x + k;$

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k;$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + k.$

Exercício: Calcule as integrais indefinidas

(a) $\displaystyle\int (x^5 + \frac{1}{x^3} + 4)\ dx;$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int e^{\alpha x}\,dx\,;$

(c) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + \frac{1}{x})\ dx;$ $\qquad$ (d) $\displaystyle\int \cos(\alpha x)\,dx.$

6.5 O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Computar integrais a partir da definição como um limite de somas de Riemann pode ser um procedimento longo e difícil. O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo nos fornece um método muito mais simples para o cálculo de integrais.

Teorema 6.2 (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo - 2TFC)**.** *Suponha que f é contínua em $[a, b]$ então*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

onde F é qualquer primitiva de f, ou seja, uma função tal que $F' = f$.

Prova. Seja $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$. Pelo 1TFC, $g'(x) = f(x)$, ou seja, g é uma primitiva de f. Pelo Corolário 6.2, duas primitivas só podem diferir por uma constante portanto, $F(x) - g(x) = k$, onde k é uma constante. Fazendo $x = a$, a fórmula implica que $F(a) = k$ e fazendo $x = b$, temos $F(b) - g(b) = k = F(a)$. Daí,

$$F(b) - F(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\ dt,$$

e a prova está completa. □

Observação: Note que, sob as hipóteses do 2TFC, temos

$$\int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

ou seja, a integral da derivada de uma função que é uma primitiva é a própria primitiva calculada nos limites de integração.

Exemplo 6.5. *Calcule a integral de $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 2]$.*

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exemplo 6.6. *Calcule $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^3 + 3x - 1)\ dx$.*

$$\int_{-1}^{0}(x^3+3x-1)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{-1}^{0} 3x\,dx - \int_{-1}^{0} 1\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - x\Big|_{-1}^{0} = -\frac{11}{4}.$$

Exercício: Calcule a integral de $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}$ no intervalo $[1, 2]$.

Exercício: Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/8}$ sen $2x\,dx$.

6.6 O Logaritmo Definido como uma Integral

O logaritmo é um conceito que pode ser definido de várias formas. Nesta seção vamos definir o logaritmo como uma integral e a exponencial como sua inversa.

Definição 6.7. *A função* **logaritmo natural** *é uma função definida por*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0.$$

Observação: A função $\ln x$ está bem definida pois a integral de uma função contínua sempre existe.

Propriedades do logaritmo.

(a) $\ln 1 = 0$,

(b) $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$,

(c) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, para todo $a, b > 0$,

(d) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, para todo $a, b > 0$,

(e) $\ln(a^r) = r \ln a$ para todo $a > 0$ e r racional.

Prova. A parte (a) segue da definição e a parte (b) do 1TFC 6.1. Para provar a parte (c), seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Pela Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax}a = \frac{1}{x}.$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ tem a mesma derivada, então pelo Corolário 6.2, diferem por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C.$$

Fazendo $x = 1$, temos que $\ln a = C$. Assim,

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a,$$

e escolhendo $x = b$, fica demonstrada a propriedade (c).

(d) : Utilizando a parte (c) com $a = 1/b$, temos que

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln b = \ln 1 = 0, \quad \text{portanto} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b.$$

Agora,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

A parte (e) é provada de maneira análoga. $\square$

Gráfico do logaritmo. Como a derivada de $\ln x$ é sempre positiva, o logaritmo é crescente e como a derivada segunda é sempre negativa, $\ln''(x) = -1/x^2$, o logaritmo é côncavo para abaixo em $(0, +\infty)$.

Calculemos seus limites. Utilizando a propriedade (e) com $a = 2$ e $r = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, temos que $\ln(2^n) = n \ln 2$. Portanto $\ln(2^n) \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Mas, como $\ln x$ é crescente, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Por outro lado, fazendo $t = 1/x$, então $t \to +\infty$ quando $x \to 0^+$. Portanto,

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} -\ln t = -\infty.$$

Como $\ln 1 = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ e $\ln x$ é uma função contínua crescente, pelo Teorema do Valor Intermediário 3.12, existe um número onde $\ln x$ assume o valor 1. Esse número é denotado por e.

Definição 6.8. *Denotamos por* e *o número tal que* $\ln e = 1$.

Esta definição é consistente com a definição do número e como um limite. Provemos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.}$$

Seja $f(x) = \ln x$. Então $f'(1) = 1$ e pela definição de derivada

$$f'(1) = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right),$$

pois a função $\ln$ é contínua. Assim,

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = 1$$

e portanto

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

6.7 Mudança de Variável ou Regra da Substituição

Nesta seção aprenderemos como substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples.

Sejam f e g tais que $Im(g) \subset D_f$. Suponhamos que F seja uma primitiva de f. Então $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$, de fato, pela Regra da Cadeia,

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Portanto,

$$\int f(g(x))g'(x)\;dx = F(g(x)) + k\,,$$

onde k é uma constante arbitrária. Assim, se fizermos a *mudança de variável* ou *substituição* $u = g(x)$ temos

$$\int F'(g(x))g'(x)\;dx = \int [F(g(x))]'\;dx = F(g(x)) + k = F(u) + k = \int F'(u)\,du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos a **Regra da Substituição**:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int f(u)\ du.} \tag{6.1}$$

Exemplo 6.7. *Encontre* $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Fazemos a substituição $u = 1+x^2$, então sua diferencial é $du = 2xdx$. Pela Regra da Substituição,

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + k.$$

Exemplo 6.8. *Encontre* $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$.

Fazemos a substituição $u = x^4+2$, então sua diferencial é $du = 4x^3\,dx$. Assim, usando $x^3\,dx = \frac{du}{4}$ e a Regra da Substituição temos

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx = \int \cos(u)\frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}\mathrm{sen}u + k = \frac{1}{4}\mathrm{sen}(x^4+2) + k.$$

Exemplo 6.9. *Calcule* $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

Se fazemos $u = 1+x^4$, teremos $du = 4x^3\,dx$. Como $4x^2$ não é constante

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{4x^2}\frac{4x^3}{1+x^4}\,dx \neq \frac{1}{4x^2}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx.$$

Isto nos mostra que a mudança $u = 1+x^4$ não resolve o problema. Entretanto, se fizermos $u = x^2$, teremos $du = 2x\,dx$, assim,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(u) + k = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x^2) + k.$$

Exemplo 6.10. *Encontre* $\int \mathrm{tg}x\,dx$.

Fazemos a substituição $u = \cos x$, então sua diferencial é $du = -\mathrm{sen}\ x\,dx$; portanto

$$\int \mathrm{tg}x\,dx = \int \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + k = -\ln|\cos x| + k = \ln|\sec x| + k.$$

Existem dois métodos para calcular uma integral definida por substituição. Um deles consiste em calcular primeiro a integral indefinida e então usar o 2TFC. Por exemplo,

$$\int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(5)^{3/2} - \frac{2}{3}(1)^{3/2} = \frac{2}{3}((5)^{3/2}-1).$$

Um outro modo consiste em se mudar os limites de integração ao se mudar a variável.

Regra da Substituição para Integrais Definidas. Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$, então

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.}$$

Prova. Seja F uma primitiva de f. Então, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$, logo, pelo 2TFC (Teorema 6.2), temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por outro lado, aplicando uma segunda vez o 2TFC também temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

□

Exemplo 6.11. *Calcule* $\int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\ dx.$

Fazendo $u = 2x-1$, temos $du = 2\,dx$ ou $\frac{1}{2}\,du = dx$ Quando $x = \dfrac{1}{2}$, $u = 0$; quando $x = 1$, $u = 1$. Assim,

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\ dx = \int_0^1 \sqrt{u}\frac{1}{2}\ du = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\ du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 6.12. *Calcule* $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\ dx.$

Fazendo $u = \ln x$, temos $du = \dfrac{1}{x}\ dx$. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quando $x = e$, $u = \ln e = 1$.

Assim,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_0^1 u\, du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Exercício: Calcule as integrais

$$(a)\ \int x\sqrt{x^2+1}\, dx; \qquad (b)\ \int \frac{\text{sen } x}{\cos^3 x}\, dx; \qquad (c)\ \int (2x-1)^3\, dx;$$

$$(d)\ \int \frac{2}{3+x^2}\, dx; \qquad (e)\ \int x^2\sqrt{3x+2}\, dx; \qquad (f)\ \int xe^{-x^2}\, dx$$

$$(g)\ \int_1^2 x\sqrt{x^2+1}\, dx; \qquad (h)\ \int_0^2 x^2\sqrt{3x+2}\, dx; \qquad (i)\ \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx.$$

6.8 Integração por Partes

A Regra da Substituição para integração corresponde à Regra da Cadeia para diferenciação. A Regra do Produto para diferenciação corresponde a uma regra chamada de integração por partes.

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em (a,b). Então, para cada $x \in (a,b)$, vale

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou seja,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x)\,.$$

Como $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, se existir uma primitiva de $f'(x)g(x)$, então também existirá uma primitiva de $f(x)g'(x)$ e valerá a **fórmula de integração por partes**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx\,.} \qquad (6.2)$$

Notação alternativa. Tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos

$$du = f'(x)\, dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\, dx$$

e podemos re-escrever (6.2) como

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.}$$

Exemplo 6.13. *Calcule* $\int x \operatorname{sen} x\,dx.$

Suponha $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então, $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. Assim

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)\,dx = -x\,\cos x + \operatorname{sen} x + k.$$

Exemplo 6.14. *Calcule* $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\underbrace{1\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du = (\operatorname{arctg} x)\;x - \int x\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\;\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + k.$$

Exemplo 6.15. *Calcule* $\int x^2 e^x\,dx.$

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'}\underbrace{e^x}_{g}\,dx.$$

Utilizando a fórmula de integração por partes mais uma vez, calculamos

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + k.$$

Portanto,

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + k.$$

Combinando a fórmula de integração por partes com o 2TFC, podemos avaliar integrais definidas por partes. Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,.}$$

Exemplo 6.16. *Calcule* $\int_1^t x\ln x\,dx.$

$$\int_1^t \underbrace{x}_{g'}\underbrace{\ln x}_{f}\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f}\underbrace{\ln x}_{g}\Bigg|_1^t - \int_0^t \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g}\,dx = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{2}\int_1^t x\,dx$$

$$= \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^t = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}.$$

Exercício: Calcule as integrais

$(a)\ \int \mathrm{arcsen}\, x\ dx;$ $\quad (b)\ \int \ln x\ dx;$ $\quad (c)\ \int x^2 \mathsf{sen}\, x\ dx;$

$(d)\ \int e^x \cos x\ dx;$ $\quad (e)\ \int_0^1 \mathrm{arctg}\ x\,dx;$ $\quad (f)\ \int_1^4 e^{\sqrt{x}}\ dx.$

Capítulo 7

Aplicações da Integral

7.1 Deslocamento e Espaço Percorrido

Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação de posição $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Sabemos que $\dfrac{dx}{dt}(t) = v(t)$, ou seja, $x(t)$ é uma primitiva de $v(t)$. Portanto, pelo 1º 2TFC (Teorema 6.2), temos

$$\int_a^b v(t)\, dt = x(b) - x(a) \tag{7.1}$$

que é o **deslocamento** da partícula entre os instantes a e b. Para calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos que considerar os intervalos quando $v(t) \geq 0$ e também quando $v(t) \leq 0$. Portanto, definimos por

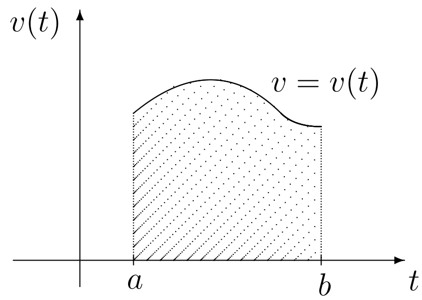
$$\int_a^b |\, v(t)|\, dt \tag{7.2}$$

o **espaço percorrido** pela partícula entre os instantes a e b.

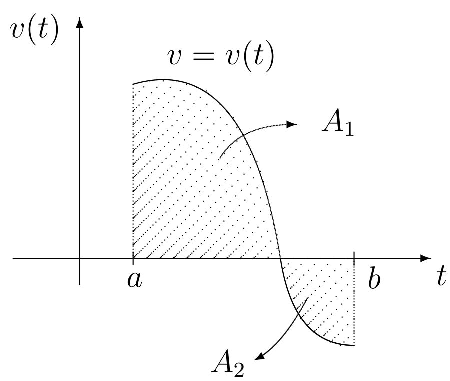
Observação: Se $v(t) \geq 0$, para todo $t \in [a, b]$, então (7.1) e (7.2) implicam que o espaço percorrido pela partícula e o seu deslocamento <u>coincidem</u> entre os instantes a e b e são iguais à

$$\int_a^b v(t)\, dt$$

que determina a área do conjunto limitado pelas retas $t = a$, $t = b$, pelo eixo $0t$ e pelo gráfico de $v = v(t)$. Veja a figura abaixo.



Observação: Seja $c \in [a, b]$ e suponha que $v(t) \geq 0$ em $[0, c]$ e $v(t) \leq 0$ em $[c, b]$ conforme a figura.



Então o deslocamento da partícula é dado por (7.1) acima, ou seja,

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)\, dt = A_1 - A_2\,,$$

mas o espaço percorrido entre os instantes a e b é dado por (7.2), ou seja,

$$\int_a^b |\, v(t)|\, dt = \int_a^c v(t)\, dt - \int_c^b v(t)\, dt = A_1 + A_2\ .$$

Logo, neste caso, deslocamento e espaço percorrido <u>não coincidem</u>.

Exemplo 7.1. *Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2 - t$.*

(a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.

(b) Calcule o espaço percorrido entre os instantes 1 e 3.

(c) Interprete o movimento.

$$\text{Deslocamento } = \int_1^3 (2-t)\,dt = \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^3 = 0.$$

$$\text{Espaço percorrido } = \int_1^3 |2-t|\,dt = \int_1^2 (2-t)\,dt - \int_2^3 (2-t)\,dt = 1.$$

Interpretação: em $[1, 2)$ a velocidade é positiva, o que significa que neste intervalo a partícula avança no sentido positivo; em $(2, 3]$ a velocidade é negativa, o que significa que neste intervalo a partícula recua, de tal modo que em $t = 3$ ela volta a ocupar a mesma posição por ela ocupava no instante $t = 1$.

Exercício: Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 1 - t^2$.

(a) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.

(b) Calcule o espaço percorrido entre os instantes 0 e 2.

(c) Interprete o movimento.

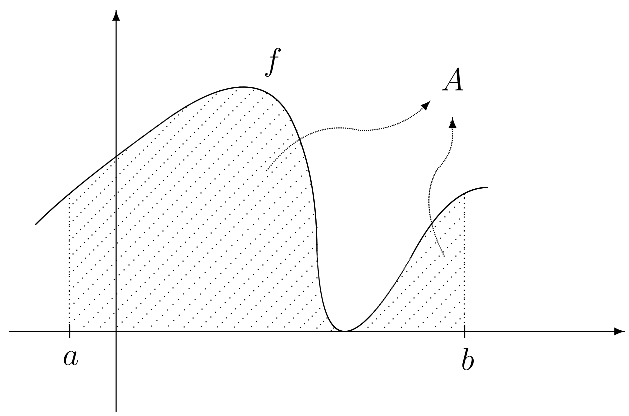
7.2 Cálculo de Áreas

Queremos determinar a área de diferentes regiões. Começaremos pelo problema de achar a área de uma região A que está sob a curva de uma função.

Caso 1: Seja f contínua em $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Queremos calcular a área do conjunto A do plano limitado pelas retas

$$x = a \qquad x = b \qquad y = 0$$

e pelo gráfico de $y = f(x)$ conforme a figura abaixo.



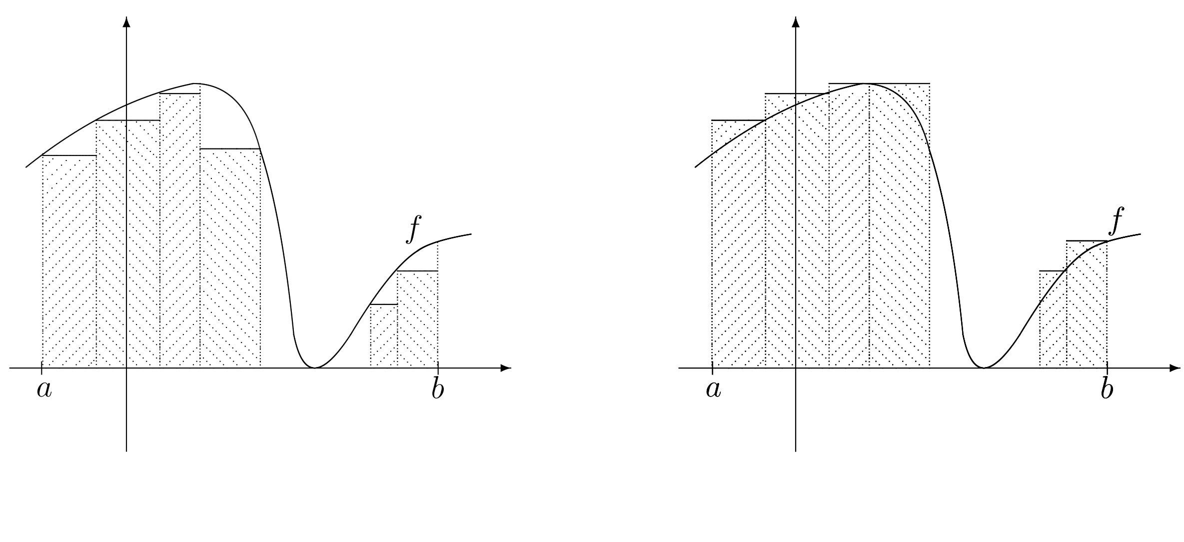
Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$ e $c_i{}'$ e $c_i{}''$ tais que

$$f(c_i{}') = \min\{f(x);\ x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\}$$
$$f(c_i{}'') = \max\{f(x);\ x \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\}.$$

Então, as somas de Riemann correspondentes satisfazem temos

$$\sum_i f(c_i{}')\Delta x_i \leq A \leq \sum_i f(c_i{}'')\Delta x_i\,,$$

conforme ilustra a figura seguinte.



Isto significa que a soma de Riemann $\sum_i f(c_i{}')\Delta x_i$ se aproxima da área A por "falta" e a soma de Riemann $\sum_i f(c_i'')\Delta x_i$ se aproxima da área A por "sobra".

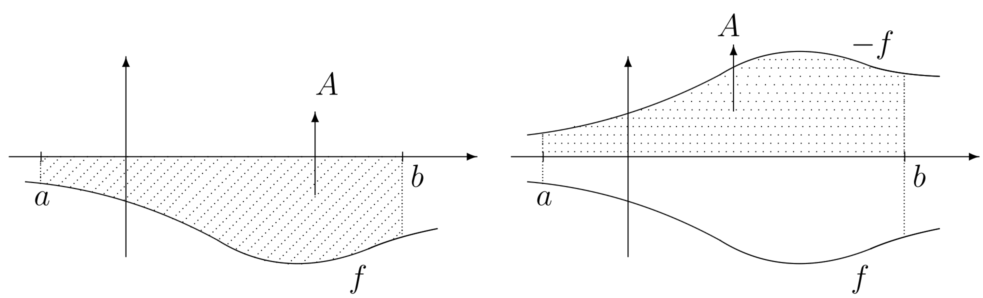
Daí, fazendo $\Delta_P = \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i \longrightarrow 0$ temos

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{\Delta d\to 0} \sum\limits_i f(c_i')\Delta x_i & \leq & \lim\limits_{\Delta d\to 0} A & \leq & \lim\limits_{\Delta d\to 0} \sum\limits_i f(c_i'')\Delta x_i \\ \| & & \| & & \| \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx & & A & & \displaystyle\int_a^b f(x)dx \end{array}$$

ou seja, $A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exemplo 7.2. *A área do conjunto do plano limitado pelas retas* $x = 0$, $x = 1$ *e pelo gráfico de* $f(x) = x^2$ *é* $\dfrac{1}{3}$.

Caso 2: Seja A o conjunto hachurado conforme mostra a figura.



Logo

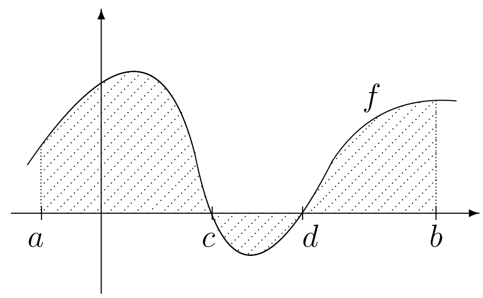
$$\text{área } A = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|\,dx\ .$$

Observe que como $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [a, b]$ temos

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Exemplo 7.3. *A área do conjunto do plano limitado pelas retas* $x = 0$, $x = 1$ *e pelo gráfico de* $f(x) = x^4 - x$ *é* $\dfrac{3}{10}$.

Caso 3: Seja A o conjunto hachurado conforme a figura abaixo.

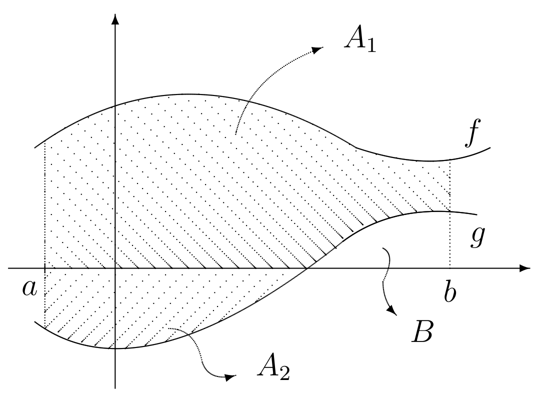


Então

$$\text{área } A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|\, dx\ .$$

Exemplo 7.4. *A área do conjunto do plano limitado pelas retas* $x = -1$, $x = 1$ *e pelo gráfico de* $f(x) = x^3$ *é* 1.

Caso 4: Considere A o conjunto hachurado da figura seguinte.



Então A é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ limitado pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos das funções f e g, onde $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Segue que

$$\text{área } A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Observação: No Caso 4 acima temos

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 + B\,;$$

$$\int_a^b g(x) = B - A_2.$$

Portanto

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx = A_1 + A_2\ .$$

Em geral, a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ é

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Exemplo 7.5. *Calcule a área do conjunto* $A = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\,\right\}$.

Temos que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq 1$. Portanto

$$\text{área } A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 7.6. *Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de* $y = x$ *e* $y = x^2$*, com* $0 \leq x \leq 2$.

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ interceptam-se nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Então,

$$\text{área} = \int_0^1 (x - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = 1.$$

Exercício: Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$. $[R: 2\sqrt{2} - 2]$

7.3 Volume de Sólido de Revolução

7.3.1 Secções Transversais

Seja S um sólido qualquer. Interceptamos S com um plano e obtemos uma região plana que é chamada de **secção transversal** de S. Seja $A(x)$ a área de secção transversal perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leq x \leq b$. Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$.

Vamos dividir S em n fatias usando os planos $P_{x_1}, \cdots, P_{x_{n-1}}$. Escolhemos pontos $c_i \in [x_{i-1}\, ,\, x_i]$ e aproximamos a i-ésima fatia S_i por um cilindro com área de base $A(c_i)$ e altura Δx_i.

O volume deste cilindro é $A(c_i)\Delta x_i$; assim, uma aproximação para o volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(c_i)\Delta x_i.$$

Somando os volumes destas fatias obtemos uma aproximação para o volume total

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i.$$

Fazendo $\Delta_P = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i \to 0$, esta aproximação parece melhorar. Portanto, definimos o **volume do sólido** S por

$$\boxed{V = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\, dx.}$$

Em particular, se S é o conjunto obtido por rotação, *em torno do eixo* x, do conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

então

$$A(x) = \pi[f(x)]^2.$$

Portanto, o **volume do sólido** S **obtido por rotação, em torno do eixo** x, **do conjunto** A é

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.}$$

Exemplo 7.7. *Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 4.*

Quando fatiamos através do ponto x, obtemos um disco com raio $\sqrt{x}$. A área desta secção transversal é

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x.$$

Portanto, o volume do sólido é

$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$$

Para determinar o volume de um sólido obtido com a rotação, *em torno do eixo y*, de uma região compreendida entre o eixo y e uma curva $x = R(y)$, $c \leq y \leq d$, usamos o método com x substituído por y. Nesse caso, a secção transversal circular é

$$A(y) = \pi[R(y)]^2 \quad \text{e o volume} \quad \boxed{V = \int_c^d A(y)\,dy.}$$

Exemplo 7.8. *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região compreendida entre o eixo y e a curva $x = \dfrac{2}{y}$, $1 \leq y \leq 4$.*

O volume é

$$V = \int_1^4 A(y)\,dy = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_1^4 = 3\pi.$$

Exemplo 7.9. *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x , do conjunto*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{1}{x} \leq y \leq x\,,\ 1 \leq x \leq 2\right\}\ .$$

O volume $V = V_2 - V_1$, onde V_2 e V_1 são os volumes obtidos pela rotação, em torno do eixo x, dos conjuntos

$$A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,; 0 \leq y \leq x\,,\ 1 \leq x \leq 2\right\}$$

e

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\,,\ 1 \leq x \leq 2\right\}\ .$$

Assim,

$$V_2 = \pi \int_1^2 x^2\, dx = \frac{7\pi}{3} \qquad V_1 = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, $V = \dfrac{7\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{11\pi}{6}$.

Exemplo 7.10. *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante.*

A reta e a parábola se cortam em $y = 0$ e $y = 4$, portanto os limites de integração são $c = 0$ e $d = 4$. O volume $V = V_2 - V_1$, são os volumes dos sólidos obtidos pela rotação, em torno do eixo y, das curvas $R(y) = \sqrt{y}$ e $r(y) = \dfrac{y}{2}$, respectivamente. Assim,

$$V_2 = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2\, dy = 8\pi \qquad V_1 = \pi \int_0^4 \frac{y^2}{4}\, dy = \frac{\pi 16}{3}.$$

Portanto, $V = 8\pi - \dfrac{16\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3}$.

Exercício: Ache o volume de um sólido obtido pela rotação do eixo x do conjunto de pares (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$ $(r > 0)$. $[R : 4\pi r^3/3]$.

Exercício: Ache o volume de um sólido obtido pela rotação do eixo y da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$. $[R : 96\pi/5]$.

7.3.2 Cascas Cilíndricas

Considere um sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = f(x)$, onde $f(x) \geq 0$, e pelas retas $y = 0, x = a$ e $x = b$. Seja $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e seja $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ o ponto médio do i-ésimo intervalo, $c_i = (x_i + x_{i-1})/2$. Se o retângulo com base $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ e altura $f(c_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica cujo volume é

$$V_i = (2\pi c_i) f(c_i) \Delta x_i = [\text{circunferência}][\text{altura}][\text{espessura}].$$

Portanto uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma dos volumes dessas seções:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi c_i) f(c_i) \Delta x_i.$$

Esta aproximação torna-se melhor quando $\Delta_P = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$. Então definimos o **volume do sólido** S **obtido pela rotação, em torno do eixo** y, **da região limitada por** $y = f(x)$, **onde** $f(x) \ge 0$, $y = 0, x = a$ **e** $x = b$ por

$$\boxed{V = 2\pi \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} c_i f(c_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.}$$

Exemplo 7.11. *Determine o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.*

$$V = 2\pi \int_0^2 x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\, dx = 2\pi(8 - \frac{32}{5}) = \frac{16}{5}\pi.$$

Exercício: Ache o volume do sólido obtido pela rotação do eixo y do conjunto de todos os pares (x, y) tais que $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \dfrac{x^2}{2} + 1$ e $y \ge x^2 - 1$. $[R : 7\pi/2]$.

7.4 Comprimento de Arco

Queremos definir o comprimento de uma curva. Se a curva é uma poligonal, podemos facilmente encontrar seu comprimento somando os comprimentos dos segmentos de reta que formam a poligonal. Agora suponhamos que a curva C seja dada pela equação $y = f(x)$, onde f é derivável e $a \le x \le b$. Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Então a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ é uma aproximação para C. O comprimento da curva C é aproximadamente o comprimento da poligonal, e a aproximação torna-se melhor quando $\Delta_P \to 0$.

O comprimento da poligonal é

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Aplicando o TVM 5.2 em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe um $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i.$$

Segue

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i.$$

Então, definimos o **comprimento da curva** C por

$$\boxed{L = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.}$$

Exemplo 7.12. *Calcule o comprimento de arco de* $y = x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 4$.

Como $y = f(x)$, temos $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$, e assim,

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx.$$

Fazendo, $u = 1 + \dfrac{9}{4}x$, então $du = \dfrac{9}{4}dx$. Quando $x = 1$, $u = \dfrac{13}{4}$; quando $x = 4$, $u = 10$. Portanto,

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right].$$

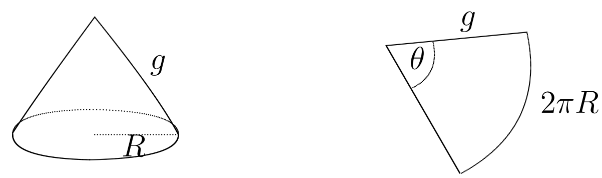
Exercício: Calcule o comprimento da curva $y = \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $[R : \pi/4]$.

Exercício: Calcule o comprimento da curva $y = \dfrac{x^2}{2},\ 0 \leq x \leq 1$. $[R : 1/2[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]]$.

7.5 Área de Superfície de Revolução

Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta. Tal superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução já discutido na seção 7.3.

Consideremos um cone circular com base de raio R e geratriz g. Cortando o cone e desenrolando-o, obtemos um sector de um círculo com raio g e ângulo central $\theta = \dfrac{2\pi R}{g}$.

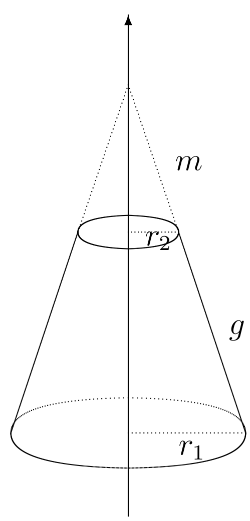


Sabemos que a área de um sector é dada por:

$$A = \frac{1}{2}g^2\theta = \frac{1}{2}g^2\left(\frac{2\pi R}{g}\right) = \pi R g.$$

Portanto definimos a área da superfície lateral de um cone como sendo $A = \pi r g$.

Consideremos agora um tronco de cone circular reto, de geratriz g, raio da base maior r_1 e raio da base menor r_2. Queremos determinar a área lateral, A_T, do tronco de cone.



A área do tronco é calculada pela subtração das áreas dos dois cones:

$$A_T = \pi r_1(m+g) - \pi r_2 m = \pi[(r_1 - r_2)m + r_1 g]$$

Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{r_1}{m+g} = \frac{r_2}{m}$$

o que resulta em

$$r_1 m = (m+g)r_2 \qquad \text{ou} \qquad (r_1 - r_2)m = r_2 g.$$

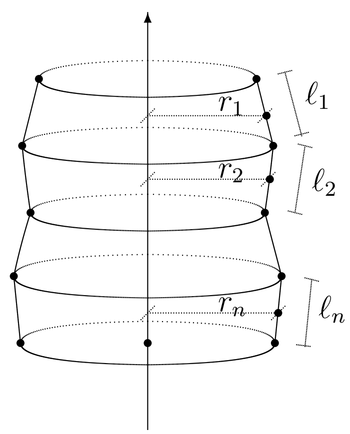
Logo a área lateral, A_T, do tronco de cone é dada por

$$\boxed{A_T = \pi(r_1 + r_2)g = 2\pi r g,}$$

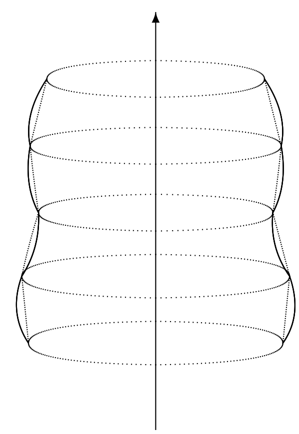
onde $r = \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Podemos generalizar para uma superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo deste plano pois a área desta superfície é a soma das áreas laterais de troncos de cones.

Seja A a área lateral da superfície gerada pela rotação da poligonal da figura abaixo. Então temos



$A = 2\pi\, r_1\ell_1 + \cdots + 2\pi\, r_n\ell_n$



Agora vamos deduzir a área lateral de um sólido de revolução qualquer em torno do eixo x pela aproximação da soma das áreas laterais de vários troncos de cone.

Consideremos f definida e positiva em $[a, b]$ com derivada contínua em (a, b). Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Consideremos a poligonal com vertices $(x_i, f(x_i))$ e girando-a ao redor do eixo x obtemos uma aproximação para a superfície. A área de cada tronco de cone é

$$A_i = 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i,$$

onde $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$, como foi feito na seção 7.4. Quando Δx_i é pequeno temos que $f(x_i) \approx f(c_i)$

e também $f(x_{i-1}) \approx f(c_i)$ pois f é contínua. Portanto,

$$A_i \approx 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\Delta x_i,$$

e então uma aproximação para a área da superfície é

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\Delta x_i.$$

Esta aproximação torna-se melhor quando $\Delta_P \to 0$. Então definimos a **área da superfície obtida por rotação, ao redor do eixo x, da curva** $y = f(x),\ f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b$, como

$$\boxed{S = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\ \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx\,.}$$

Exemplo 7.13. *Encontre a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = \sqrt{4-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, ao redor do eixo x.*

Temos $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, e assim,

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\ dx = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\ dx = 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 8\pi.$$

Exercício: Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}\, x,\ 0 \leq x \leq \pi$. $[R: 2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))]$.

7.6 Trabalho

Nesta seção, vamos definir trabalho realizado por uma força que varia com a posição. No caso de uma força constante F, o trabalho realizado é definido pelo produto da força pela distância d que o objeto se move:

$$\tau = Fd, \qquad \text{trabalho} = \text{força } \times \text{ distância}.$$

Vamos considerar agora uma força F que atua sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x. Suponhamos que esta força seja paralela ao deslocamento e variável com a função de posição x. Então escrevemos

$$\vec{F}(x) = f(x)\vec{i}\,,$$

onde $f(x)$ é a componente de $\vec{F}(x)$ na direção do deslocamento (isto é, na direção de $\vec{i}$).

Consideremos o deslocamento da partícula de $x = a$ até $x = b$ com $a < b$ e suponhamos que $f(x)$ seja contínua no intervalo $[a, b]$. Seja $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e escolhemos por amostragem $c_i \in [x_{i-1}\,,\, x_i]\,,\ i = 1, \ldots, n$. Se $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ for suficientemente pequeno, f será praticamente constante no intervalo, e então podemos dizer que trabalho realizado por $\vec{F}$ de x_{i-1} até x_i será aproximadamente

$$\tau_i = f(c_i)\Delta x_i.$$

Logo podemos aproximar o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ de a até b pela soma dos trabalhos realizados nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é

$$\tau \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

A intuição acima nos motiva a definirmos *trabalho* como segue.

Definição 7.1. *O* **trabalho** τ *realizado por uma força* $\vec{F}(x) = f(x)\vec{i}$ *sobre uma partícula no deslocamento de* $x = a$ *até* $x = b$ *é dado por*

$$\boxed{\tau = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx\,.}$$

Observação: Na Definição 7.1, a e $b \in \mathbb{R}$ são quaisquer, isto é, podemos ter $a \geq b$ ou $a \leq b$, e f é integrável em $[a, b]$, mas não necessariamente contínua. Em particular, se $a < b$ e $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então o trabalho τ coincidirá com a área do conjunto limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo 7.14. *Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo* x *atua uma força paralela ao deslocamento e de componente* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. *Calcule o trabalho realizado pela força no deslocamento de* $x = 1$ *até* $x = 2$.

$$\tau = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 7.15 (Trabalho e Energia Cinética)**.** *Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x = x(t)$, com $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$. Suponha que $x(t)$ seja 2 vezes derivável em $[t_0, t_1]$ e que a componente $f(x)$, na direção do deslocamento, da força resultante que atua sobre a partícula seja contínua em $[x_0, x_1]$. Seja $v = v(t)$ a função que descreve a velocidade da partícula, com $v_0 = v(t_0)$ e $v_1 = v(t_1)$. Verifique que o trabalho realizado pela resultante de x_0 até x_1 é igual à variação na energia cinética, isto é,*

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\, mv_1^2 - \frac{1}{2}\, mv_0^2 = \frac{1}{2} mv^2(t)\Big|_{t_0}^{t_1}.}$$

Temos $x = x(t)$. Logo $dx = x'(t)\, dt$. Como $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$, então para $x = x_0$, $t = t_0$ e, para $x = x_1$, $t = t_1$. Assim

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\underbrace{x(t)}_{x})\, \underbrace{x'(t)\, dt}_{dx} = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t)) v(t)\, dt. \tag{7.3}$$

Pela 2ª Lei de Newton, temos

$$f(x(t)) = m \cdot a(t), \tag{7.4}$$

onde $a = a(t)$ é a aceleração da partícula no instante t. Fazendo a mudança de variável $v = v(t)$, $dv = v'(t)\, dt = a(t)\, dt$, para $t = t_0$, $v = v_0$ e para $t = t_1$, $v = v_1$; portanto, de 7.3 e 7.4,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t)) v(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m\, a(t) v(t)\, dt = m \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{v(t)}_{v}\, \underbrace{a(t)\, dt}_{dv} =$$

$$= m \int_{v_0}^{v_1} v dv = m \frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v_1} = \frac{1}{2}\, mv_1^2 - \frac{1}{2}\, mv_0^2.$$

Exemplo 7.16. *Considere uma mola sobre uma superfície horizontal (paralela ao eixo x) com uma das extremidades fixa num anteparo (paralelo ao eixo y). Suponha que a origem $x = 0$ coincide com a extremidade livre quando a mola não está comprimida nem distendida. Agora, suponha que a mola seja distendida e que uma partícula seja presa à sua extremidade livre. Considere que a força exercida sobre a mola obedece a Lei de Hooke: $\overrightarrow{F}(x) = -kx\vec{i}$, onde k é a constante elástica da mola. Calcule o trabalho realizado pela mola quando a partícula se desloca* *das posições* $x = 0,5$ *até* $x = 0$ *e* $x = 0,5$ *até* $x = -0,5$.

$$\tau = \int_{1/2}^{0} -kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{1/2}^{0} = \frac{k}{8}.$$

$$\tau = \int_{1/2}^{-1/2} -kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{1/2}^{-1/2} = 0.$$

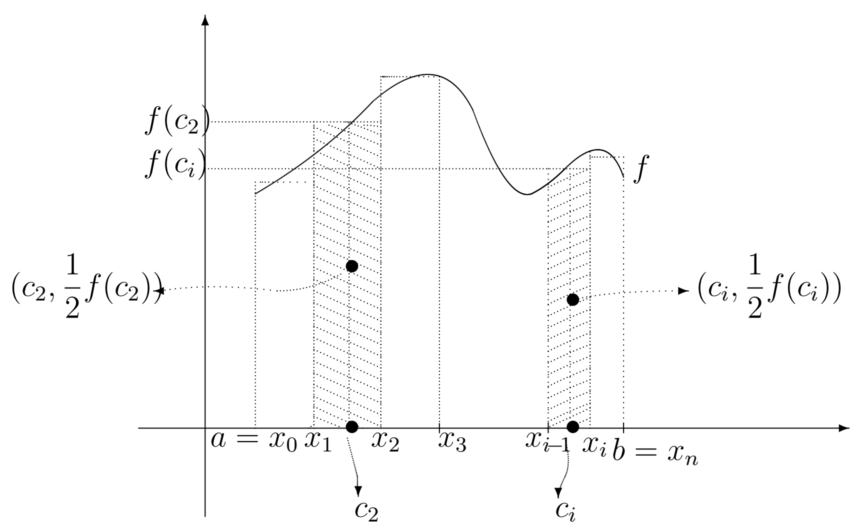
7.7 Centro de Massa

Consideremos uma fina placa (chamada de *lâmina*) com densidade uniforme ρ que ocupa uma região A do plano. Desejamos encontrar o ponto P no qual a placa se equilibra horizontalmente. Esse ponto é chamado *centro de massa* da placa ou *centróide* de A. Suponha que a região A seja da forma

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ a \leq x \leq b\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}\ ,$$

onde f é função definida e contínua em $[a,b]$, com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$.

Consideremos uma partição $P = (x_i)$ de $[a,b]$ e escolhemos o ponto c_i como sendo ponto médio do intervalo $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, que é $c_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Isto determina uma aproximação poligonal a A.



O centro de massa do retângulo hachurado R_i é seu centro $\left(c_i\,,\ \dfrac{f(c_i)}{2}\right)$. Sua área é $f(c_i)\Delta x_i$;

assim sua massa é

$$m_i = \rho \underbrace{\Delta x_i}_{\text{base}} \underbrace{f(c_i)}_{\text{altura}} . \tag{7.5}$$

O centro de massa dos retângulos R_1 , R_2 ... R_n será dado por

$$\begin{aligned}
(x_c, y_c) &= \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i\, m_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} \, , \, \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{f(c_i)}{2}\, m_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} \right) \overset{(7.5)}{=} \\
&= \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \rho\, f(c_i) \Delta x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \rho\, f(c_i) \Delta x_i} \, , \, \frac{\displaystyle\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \rho f(c_i) \Delta x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \rho\, f(c_i) \Delta x_i} \right) \\
&= \left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i\, f(c_i) \Delta x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i} \, , \, \frac{\displaystyle\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f^2(c_i) \Delta x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i} \right) .
\end{aligned}$$

Daí, fazendo $\Delta_P = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, obtemos o **centro de massa** da região A

$$\begin{aligned}
(x_c, y_c) &= \left(\frac{\displaystyle\int_a^b x\, f(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx} \, , \, \frac{\displaystyle\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\text{área } A} \int_a^b x\, f(x)\, dx \, , \, \frac{1}{\text{área } A} \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\, dx \right) .
\end{aligned}$$

Exemplo 7.17. *Calcule o centro de massa da região limitada pelas curvas* $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ *e* $x = \pi/2$.

A área da região é: $\text{Área } A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} = 1$; assim,

$$x_c = \frac{1}{\text{área } A} \int_0^{\pi/2} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} x\, \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$y_c = \frac{1}{\text{área } A}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2x))\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\text{sen }(2x)\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

Portanto o centro de massa é $\left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8}\right)$.

Se a região A está entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$, então o mesmo argumento anterior pode ser usado para mostrar que o **centro de massa** de

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$

é dado por

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{1}{\text{área } A}\int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx\ ,\ \frac{1}{\text{área } A}\frac{1}{2}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx\right).$$

Exemplo 7.18. *Determine o centro de massa da região A limitada pela reta $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.*

A área da região é
$$\text{Área } A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Portanto,
$$x_c = 6\int_0^1 x(x - x^2)\,dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$y_c = 6\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

O centro de massa é $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

Exercício: Determine o centro de massa da região A limitada pela reta $y = 1$ e pela parábola $y = x^2$. $[R : (0, 2/5)]$.

Capítulo 8

Técnicas de Integração

Com o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo podemos integrar uma função a partir de uma primitiva ou integral indefinida. Neste capítulo desenvolveremos outras técnicas para calcular integrais indefinidas.

8.1 Integrais Trigonométricas

Nesta seção usaremos identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas.

Exemplo 8.1. *Calcule* $\int \cos^3 x\, dx$.

Observe que $\cos^3 x = \cos^2 x\ \cos x = (1-\text{sen}^2 x)\cos x$. Fazendo $u = \text{sen}\ x$ temos $du = \cos x\, dx$.

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-\text{sen}^2 x)\cos x\, dx = \int (1-u^2)\, du = u - \frac{u^3}{3} + k = \text{sen}\ x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + k.$$

Exemplo 8.2. *Calcule* $\int \text{sen}(3x)\cos(2x)\, dx$.

Observe que $\text{sen}(3x)\cos(2x) = \frac{1}{2}[\text{sen}(5x) + \text{sen}(x)]$. Então,

$$\int \text{sen}(3x)\cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int [\text{sen}(5x) + \text{sen}(x)]\, dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos x + k.$$

Exemplo 8.3. *Calcule* $\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx$.

Observe que $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$. Então,

$$\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2\ dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\cos^2(2x))\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\frac{1}{2}(1+\cos(4x))\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\operatorname{sen}(2x)+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{8}\right)+k.$$

Exemplo 8.4. *Calcule* $\int \operatorname{sen}^5 x\ \cos^2 x\,dx$.

Observe que $\operatorname{sen}^5 x\ \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2\ \cos^2 x\operatorname{sen}(x) = (1-\cos^2 x)^2\cos^2 x\operatorname{sen} x$. Fazendo $u = \cos x$ temos $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ e assim

$$\int \operatorname{sen}^5 x\ \cos^2 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2\cos^2 x\operatorname{sen} x\,dx = \int (1-u^2)^2 u^2(-du)$$

$$= -\int (u^2-2u^4+u^6)\,du = -\left(\frac{u^3}{3}-2\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}\right)+k = -\frac{\cos^3 x}{3}+2\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^7 x}{7}+k.$$

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{sen}^m x\ \cos^n x\,dx$.

(a) Se n for ímpar,

$$\int \operatorname{sen}^m x\ \cos^{(2k+1)} x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x\,(\cos^2 x)^k\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x(1-\operatorname{sen}^2 x)^k\ \cos x\,dx.$$

Então faça $u = \operatorname{sen}\ x$.

(b) Se m for ímpar,

$$\int \operatorname{sen}^{(2k+1)} x\ \cos^n x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k\ \cos^n x\operatorname{sen} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^k\ \cos^n x\operatorname{sen} x\,dx.$$

Então faça $u = \cos x$.

(c) Se m e n forem pares, utilizamos as identidades dos ângulos metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)).$$

Algumas vezes pode ser útil a identidade

$$2\,\mathrm{sen}x\,\cos x = \mathrm{sen}(2x).$$

Estratégia para avaliar $\int \mathrm{sen}(mx)\,\cos(nx)\,dx$ **ou** $\int \mathrm{sen}(mx)\,\mathbf{sen}(nx)\,dx$ **ou** $\int \cos(mx)\,\cos(nx)\,dx$. Utilize a identidade correspondente:

(a) $2\mathrm{sen}\,a\,\cos b = \mathrm{sen}(a-b) + \mathrm{sen}(a+b)$,

(b) $2\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,

(c) $2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Podemos usar uma estratégia semelhante para avaliar integrais envolvendo potências de tangente e secante.

Exemplo 8.5. *Calcule* $\int \mathrm{tg}^6 x\,\sec^4 x\,dx$.

Observe que $\mathrm{tg}^6 x\,\sec^4 x = \mathrm{tg}^6 x\,\sec^2 x\,\sec^2 x = \mathrm{tg}^6 x(1+\mathrm{tg}^2 x)\sec^2 x$. Fazendo $u = \mathrm{tg}x$ temos $du = \sec^2 x\,dx$ e assim

$$\int \mathrm{tg}^6 x\,\sec^4 x\,dx = \int \mathrm{tg}^6 x(1+\mathrm{tg}^2 x)\sec^2 x\,dx = \int u^6(1+u^2)\,du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + k = \frac{\mathrm{tg}^7 x}{7} + \frac{\mathrm{tg}^9 x}{9} + k.$$

Exemplo 8.6. *Calcule* $\int \mathrm{tg}^5 x\,\sec^7 x\,dx$.

Observe que $\mathrm{tg}^5 x\,\sec^7 x = \mathrm{tg}^4 x\,\sec^6 x\,\sec x\mathrm{tg}x = (\sec^2 x - 1)^2\,\sec^6 x\,\sec x\,\mathrm{tg}x$. Fazendo $u = \sec x$ temos $du = \sec x\,\mathrm{tg}x\,dx$ e assim

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,\sec^7 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)^2\,\sec^6 x\,\sec x\,\mathrm{tg}x\,dx = \int (u^2-1)^2 u^6\,du$$

$$= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + k = \frac{\sec^{11} x}{11} - 2\frac{\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + k.$$

Estratégia para avaliar $\int \mathrm{tg}^m x\,\sec^n x\,dx$.

(a) Se n for par,

$$\int \mathrm{tg}^m x \, \sec^{2k} x \, dx = \int \mathrm{tg}^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx = \int \mathrm{tg}^m x (1 + \mathrm{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx.$$

Então faça $u = \mathrm{tg}\ x$.

(b) Se m for ímpar,

$$\int \mathrm{tg}^{(2k+1)} x \, \sec^n x \, dx = \int (\mathrm{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \, \sec x \, \mathrm{tg} x \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \, \sec x \, \mathrm{tg} x \, dx.$$

Então faça $u = \sec x$.

Exercício: Calcule as seguintes integrais

$(a) \int \mathrm{sen}(3x) \cos(5x) \, dx;$ $(b) \int \mathrm{sen}^3(3x) \, dx;$ $(c) \int \cos^5 x \ dx;$

$(d) \int \mathrm{sen}^3(3x) \cos^3(3x) \ dx;$ $(e) \int \mathrm{sen}^2 x \, \cos^2 x \ dx;$ $(f) \int \sec x \, \mathrm{tg}^2 x \, dx.$

8.2 Substituição Inversa

Em geral podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$ usando a Regra da Substituição ao contrário. Suponhamos que $x = g(t)$ seja inversível, então trocando u por x e x por t na Regra de Substituição 6.1 obtemos

$$\boxed{\int f(x) \, dx = \int f(g(t)) g'(t) \, dt.}$$

Este tipo de substituição é chamada de **substituição inversa** e também de **mudança de variáveis**.

Exemplo 8.7. *Calcule* $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx.$

Como $1 - \text{sen}^2 t = \cos^2 t$, a mudança $x = \text{sen}\, t\,, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, elimina a raiz do integrando. Temos $dx = \cos t\, dt$. Então,

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - \text{sen }^2 t} \cos t\, dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t\, dt = \int |\cos t| \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt,$$

pois $\cos t \geq 0$ se $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$. Assim,

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int \cos^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}(2t) + k = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\text{sen}\, t\, \cos t + k.$$

Devemos retornar à variável x original. Como $x = \text{sen}\, t \; -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, segue $t = \text{arcsen} x$ e $\cos t = \sqrt{1 - x^2}$; logo

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\text{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + k, \quad -1 < x < 1.$$

Exemplo 8.8. *Calcule* $\displaystyle\int x^2 \sqrt{x + 1}\, dx$.

Fazendo $u = x + 1$, temos $x = u - 1$ e $du = dx$. Então,

$$\int x^2\sqrt{x + 1}\, dx = \int (u - 1)^2 \sqrt{u}\, du = \int (u^2 - 2u + 1)u^{1/2}\, du = \int \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right)\, du$$

$$= \frac{2}{7}u^{7/2} - 2\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{7}(x + 1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x + 1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} + k.$$

Exemplo 8.9. *Calcule* $\displaystyle\int \sqrt{1 + x^2}\, dx$.

Como $1 + \text{tg}^2 t = \sec^2 t$, a mudança $x = \text{tg}\, t\,, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, elimina a raiz do integrando. Temos $dx = \sec t\, dt$. Então,

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + \text{tg}^2 t} \sec^2 t\, dt = \int |\sec t| \sec^2 t\, dt = \int \sec^3 t\, dt,$$

pois $\sec t \geq 0$ se $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$. Agora,

$$\int \sec^3 t\,dt = \int \underbrace{\sec t}_{f}\underbrace{\sec^2 t}_{g'}\,dt = \underbrace{\sec t}_{f}\,\underbrace{\operatorname{tg} t}_{g} - \int \underbrace{\sec t \operatorname{tg} t}_{f'}\,\underbrace{\operatorname{tg} t}_{g} = \sec t \operatorname{tg} t - \int \sec t(\sec^2 t - 1)\,dt.$$

Portanto,

$$2\int \sec^3 t\,dt = \sec t \operatorname{tg} t + \int \sec t\,dt = \sec t \operatorname{tg} t + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + k.$$

Devemos retornar à variável x original. Como $x = \operatorname{tg} t$, segue $1 + x^2 = \sec^2 t$ e como $\sec t > 0$, $\sec t = \sqrt{1+x^2}$; logo

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\sec t \operatorname{tg} t + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + k\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln|\sqrt{1+x^2} + x|\right) + k.$$

Exercício: Indique, em cada caso, qual a mudança de variável que elimina a raiz do integrando.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$, $[R: 2x = \operatorname{sen} t]$; (b) $\displaystyle\int \sqrt{5-4x^2}\,dx$, $\left[R: \frac{2}{\sqrt{5}}x = \operatorname{sen} t\right]$;

(c) $\displaystyle\int \sqrt{3+4x^2}\,dx$, $\left[R: \frac{2}{\sqrt{3}}x = \operatorname{tg} t\right]$; (d) $\displaystyle\int \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$, $[R: x-1 = \operatorname{sen} t]$;

(e) $\displaystyle\int \sqrt{x-x^2}\,dx$, $\left[R: x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right]$; (f) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$, $[R: x = \sec t]$.

8.3 Primitivas de Funções Racionais

Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional (quociente de polinômios) expressando-a como soma de *frações parciais*. Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. É possível expressar f como soma de frações mais simples desde que o grau de P seja menor que o grau de Q. Se o grau de P for maior ou igual ao grau de Q, então primeiro dividimos os polinômios,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde $S(x)$ e $R(x)$ são também polinômios.

Exemplo 8.10. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx.$

Dividindo obtemos

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+k.$$

Uma segunda etapa consiste em fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. Pode ser mostrado que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como produto de fatores lineares e de fatores quadráticos irredutíveis.

Exemplo 8.11. $x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)$.

Finalmente, devemos expressar a função racional como uma soma de **frações parciais**. Explicamos os detalhes dos diferentes casos que ocorrem.

8.3.1 Denominadores Redutíveis do 2^o Grau

Teorema 8.1. *Sejam* α, β, m, $n \in \mathbb{R}$, *com* $\alpha \neq \beta$. *Então existem* $A, B \in \mathbb{R}$ *tais que*

(i) $\displaystyle\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$;

(ii) $\displaystyle\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}$.

Observação: Note que, para aplicarmos o teorema, o grau do numerador deve ser estritamente menor do que o grau do denominador do lado esquerdo das igualdades em (i) e (ii) do Teorema 8.1.

Procedimento para calcular $\displaystyle\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx$ **, onde grau** $P<2$ **.**

- Se $\alpha \neq \beta$, então o Teorema 8.1 (i) implica que existem A, $B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}\,.$$

Portanto

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = \int \frac{A}{x-\alpha}\,dx + \int \frac{B}{x-\beta}\,dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + k\,.$$

- Se $\alpha = \beta$, então o Teorema 8.1 (ii) implica que existem A, $B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

Logo

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)^2}\,dx = A\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx + B\int \frac{1}{(x-\alpha)^2}\,dx = A\ln|x-\alpha| - \frac{B}{(x-\alpha)} + k\,.$$

Exemplo 8.12. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx.$

Observe que $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$. O método de frações parciais dá

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

e portanto $A(x-2)+B(x-1) = x+3$ ou $(A+B)x-2A-B = x+3$. Como os polinômios são idênticos, seus coeficientes devem ser iguais. Logo, $A+B=1$ e $-2A-B=3$. Resolvendo, obtemos $A=-4$ e $B=5$ e assim

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{-4}{x-1} + \frac{5}{x-2}\right)dx = -4\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + k.$$

Exemplo 8.13. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2}\,dx.$

Neste caso é melhor fazer uma mudança de variáveis. Seja $u = x-1$ ou $x = u+1$ e $du = dx$. Assim,

$$\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(u+1)^3}{u^2}\,du = \int \frac{u^3+3u^2+3u+3}{u^2}\,du$$

$$= \frac{u^2}{2} + 3u + 3\ln|u| - \frac{3}{u} + k = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + k.$$

8.3.2 Denominadores Redutíveis do 3^o Grau

Teorema 8.2. *Sejam α, β, γ, m, n, $p \in \mathbb{R}$, com α , β , $\gamma \neq 0$. Então existem $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que*

(i) $$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} \ ;$$

(ii) $$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(x-\beta)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2} \ ;$$

(iii) $$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)^3} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3} \ .$$

Exemplo 8.14. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$

Como 1 é raiz de x^3-x^2-x+1, sabemos que $(x-1)$ é um fator e obtemos $x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$. A decomposição em frações parciais é

$$\frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Então, $2x+1 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$. Fazendo $x = 1$ obtemos $3 = 2C$ ou $C = \dfrac{3}{2}$. Fazendo $x = -1$, obtemos $-1 = 4A$ ou $A = -\dfrac{1}{4}$. Fazendo $x = 0$, obtemos $1 = -\dfrac{1}{4} - B + \dfrac{3}{2}$ ou $B = \dfrac{1}{4}$. Assim,

$$\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + k.$$

8.3.3 Denominadores Irredutíveis do 2^o Grau

Queremos calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c}\, dx\,,$$

onde P é um polinômio e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então devemos reescrever o denominador como soma de quadrados. Em seguida, fazemos uma mudança de variável e calculamos a integral.

Exemplo 8.15. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\, dx.$

Escrevamos o denominador como soma de quadrados $x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$. Fazendo $u = x+1$, temos $du = dx$;

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\, dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}\, dx = \int \frac{2(u-1)+1}{u^2+1}\, du = \int \frac{2u}{u^2+1}\, du + \int \frac{-1}{u^2+1}\, du$$

$$= \ln(1+u^2) - \operatorname{arctg} u + k = \ln(1+(x+1)^2) - \operatorname{arctg}(x+1) + k.$$

Exemplo 8.16. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\, dx.$

Como o grau do denominador é igual ao grau do denominador, primeiro vamos dividir os polinômios,

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{(2x-1)^2+2}.$$

Fazendo $u = 2x-1$ ou $x = \dfrac{u+1}{2}$, temos $du = 2\,dx$, assim

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\, dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{(2x-1)^2+2}\right) dx = x + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{u+1}{2}-1}{u^2+2}\, du = x + \frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\, du$$

$$= x + \frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\, du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\, du = x + \frac{1}{8}\ln|u^2+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + k$$

$$= x + \frac{1}{8}\ln|(2x-1)^2+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{2}}\right) + k.$$

Agora, vamos considerar integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}\,dx\,,$$

onde P é um polinômio e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Teorema 8.3. *Sejam* m, n, p, a, b, c, $\alpha \in \mathbb{R}$ *tais que* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. *Então existem* $A, B, D \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+D}{ax^2+bx+c}\ .$$

Exemplo 8.17. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx\,.$

Observe que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$. Dividindo obtemos

$$\frac{x^5+x+1}{x^3-8} = x^2 + \frac{8x^2+x+1}{x^3-8} = x^2 + \frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

Pelo método de frações parciais,

$$\frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Então, $8x^2+x+1 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$. Fazendo $x=2$ obtemos $35 = 12A$ ou $A = \dfrac{35}{12}$. Fazendo $x=0$, obtemos $1 = 4A - 2C$ ou $C = \dfrac{16}{3}$. Fazendo $x=1$, obtemos $10 = 7A - B - C$ ou $B = \dfrac{61}{12}$. Assim,

$$\int \frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}\,dx = \frac{35}{12}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{61}{12}x + \frac{16}{3}}{x^2+2x+4}\,dx$$

$$= \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\int \frac{61x+64}{x^2+2x+4}\,dx.$$

Para calcular a última integral, escrevemos $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$ e fazemos $u = x+1$ ou $x = u-1$ e $du = dx$; portanto,

$$\int \frac{61x+64}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{61x+64}{(x+1)^2+3}\,dx = \int \frac{61(u-1)+64}{u^2+3}\,du$$

$$= 61\int \frac{u}{u^2+3}\,du + 3\int \frac{1}{u^2+3}\,du = \frac{61}{2}\ln(u^2+3) + \frac{3}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + k$$
$$= \frac{61}{2}\ln((x+1)^2+3) + \frac{3}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + k.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{61}{24}\ln((x+1)^2+3) + \frac{3}{12\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + k.$$

Exercício: Calcule as integrais

$$(a)\ \int \frac{1}{\cos x}\,dx; \qquad (b)\ \int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx; \qquad (c)\ \int \frac{x^2+2x+3}{x^2+4x+13}\,dx.$$

8.4 A Substituição $u = tg(x/2)$

A substituição $u = \text{tg}(x/2)$ transforma qualquer função racional envolvendo seno e cosseno em uma função racional de polinômios. Observemos que

$$\text{sen } x = 2\text{sen}(x/2)\cos(x/2) = 2\frac{\text{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}\cos^2(x/2).$$

Assim,

$$\text{sen } x = \frac{2\text{tg}(x/2)}{1+\text{tg}^2(x/2)} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Também temos que

$$\cos x = 1 - 2\text{sen}^2(x/2) = \cos^2(x/2)\sec^2(x/2) - 2\cos^2(x/2)\text{tg}^2(x/2),$$

logo,

$$\cos x = \frac{1-\text{tg}^2(x/2)}{1+\text{tg}^2(x/2)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Exemplo 8.18. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x + sen\ x}\,dx.$

Fazendo $u = \text{tg}(x/2)$, temos que $du = \frac{1}{2}(1+\text{tg}^2(x/2))dx$, então $dx = \frac{2}{1+u^2}du$. Utilizando as identidades trigonométricas anteriores,

$$\cos x + \text{sen } x = \frac{1 - u^2 + 2u}{1 + u^2}.$$

Assim,

$$\int \frac{1}{\cos x + \text{sen} x}\ dx = 2\int \frac{1}{1 - u^2 + 2u}\ du,$$

a qual pode ser integrada utilizando frações parciais. Note que

$$\frac{1}{u^2 - 2u - 1} = \frac{1}{(u-a)(u-b)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b}\right),$$

onde $a = 1 + \sqrt{2}$ e $b = 1 - \sqrt{2}$. Portanto,

$$\int \frac{1}{\cos x + \text{sen} x}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln|u-b| - \ln|u-a|\right) + k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\ln|\text{tg}(x/2) - 1 + \sqrt{2}| - \ln|\text{tg}(x/2) - 1 - \sqrt{2}|\Big) + k.$$

Exercício: Calcule as integrais:

$$(a) \int \frac{1}{1 - \cos x \text{sen } x}\ dx, \quad [R: \ln|\text{tg}(x/2)| - \ln|1 + \text{tg}(x/2)| + k;]$$

$$(b) \int \frac{1}{2 + \text{sen } x}\ dx, \qquad \left[R: \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2\text{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{3}}\right) + k\right].$$

Capítulo 9

Integrais Impróprias

Na definição de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ exige-se que a função f esteja definida num intervalo limitado e fechado $[a,b]$ e que f seja limitada nesse intervalo. Neste capítulo estendemos o conceito de integral definida para casos mais gerais.

9.1 Intervalos Infinitos

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e calculemos a área A limitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = 1$ e $x = b$, com $b > 1$. Então

$$A = \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Fazendo $b \to +\infty$, temos $A \to 1$. Isto quer dizer que a área A do conjunto *ilimitado*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le f(x),\ x \ge 1\}$$

é *finita* e igual a 1.

Definição 9.1 (Integral Imprópria do Tipo 1)**.**

- *Se* $\int_a^t f(x)\,dx$ *existe para cada número* $t \geq a$, *então definimos*

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx,}$$

se o limite existir.

- *Se* $\int_t^b f(x)\,dx$ *existe para cada número* $t \leq b$, *então definimos*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx}$$

se o limite existir.

Quando uma das integrais impróprias acima existir e for finita, diremos que ela é **convergente**. *Caso contrário, ela será dita* **divergente**.

Observação: As integrais impróprias podem ser interpretadas como uma área, desde que f seja uma função positiva.

Exemplo 9.1. *Determine se a integral* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ *é convergente ou divergente.*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$$

Como o limite é infinito, a integral é divergente.

Exemplo 9.2. *Determine se a integral* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ *é convergente ou divergente.*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-2x^2}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-2t^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como o limite é finito, a integral é convergente.

Exemplo 9.3. *Determine se a integral* $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$ *é convergente ou divergente.*

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \left(xe^x\Big|_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx \right) = \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t) = -1.$$

Como o limite é finito, a integral é convergente.

Exercício: Calcule as integrais impróprias

$$(a) \int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{(9-x)^2}, \quad [R: 1/6]; \qquad\qquad (b) \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx, \quad [R: Diverge].$$

Exercício: Determine a área A da região do primeiro quadrante limitado pela curva $y = 2^{-x}$, o eixo x e o eixo y. $[R: 1/\ln 2]$.

Exercício: Determine a convergência ou não da integral $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$, $p \in \mathbb{R}$. $[R: Converge \Leftrightarrow p > 1]$.

Definição 9.2. *Se as integrais* $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$, $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ *existem e são convergentes, então definimos*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx.}$$

Observação: Se uma das integrais impróprias $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ ou $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ for divergente, então $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ também o será.

Exemplo 9.4. *Avalie* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

É conveniente escolher $a = 0$ na definição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Calculemos as integrais.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{t} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{t}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Exercício: Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$. $[R:0]$.

9.2 Testes de Convergência

Algumas vezes não é possível encontrar um valor exato para uma integral imprópria, mas podemos saber se ela é convergente ou divergente usando outras integrais conhecidas.

Teorema 9.1 (Teste da Comparação)**.** *Sejam f e g funções contínuas satisfazendo $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$. Então,*

(i) Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ também é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ também é divergente.

Exemplo 9.5. *Mostre que $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ é convergente.*

Não podemos avaliar diretamente a integral pois a primitiva de e^{-x^2} não é uma função elementar. Observe que se $x \geq 1$, então $x^2 \geq x$, assim $-x^2 \leq -x$ e como a exponencial é crescente $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Assim,
$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}.$$

Logo pelo Teste da Comparação a integral é convergente.

Exemplo 9.6. *Analise a convergência de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}^{\,2} x}{x^2}\,dx$.*

Observe que $0 \leq \dfrac{\text{sen}^{\,2} x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$, para todo $x \in [1,\infty)$. Como a integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, pelo Teste da Comparação a integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}^{\,2} x}{x^2}\,dx$ é convergente.

Exemplo 9.7. *Analise a convergência da* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx.$

Observe que $\dfrac{1+e^{-x}}{x} \geq \dfrac{1}{x}$ e $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge, então pelo Teste da Comparação a integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente.

Teorema 9.2 (Teste da Comparação no Limite)**.** *Sejam* $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ *funções contínuas. Se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

então $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *serão ambas convergentes ou ambas divergentes.*

Exemplo 9.8. *Analise a convergência de* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

As funções $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ são positivas e contínuas em $[1, +\infty)$ e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1.$$

Portanto, como a integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ também é convergente.

Entretanto, as integrais convergem para valores diferentes.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_1^t = \lim_{t\to\infty} 1 - \frac{1}{t} = 1.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} x\bigg|_1^t = \lim_{t\to\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Exemplo 9.9. *Analise a convergência de* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{e^x - 5}\,dx.$

As funções $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ e $g(x) = \dfrac{3}{e^x - 5}$ são positivas e contínuas em $[1, \infty)$ e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x-5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 5}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{5}{3e^x} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, como a integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx$ converge, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{e^x-5}\,dx$ também converge.

9.3 Integrandos Descontínuos

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Queremos calcular a área A limitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0$, $x = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, e $x = 4$. Então

$$A = \int_{\varepsilon}^{4} f(x)\,dx = -2\sqrt{x}\bigg|_{\varepsilon}^{4} = 4 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos $A \to 4$ o que quer dizer que a área A do conjunto *ilimitado*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\, 0 \leq x \leq 4\}$$

é *finita* e igual a 4.

Definição 9.3 (Integral Imprópria do Tipo 2)**.**

- *Seja f uma função contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, definimos*

  $$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx,$$

  se esse limite existir.

- *Seja f uma função contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, definimos*

  $$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx,$$

  se esse limite existir.

  A integral imprópria $\int_a^b f(x)\ dx$ é chamada **convergente** *se o limite existir e for finito, caso contrário será dita* **divergente***.*

- *Se f tiver uma descontinuidade em c, onde $a < c < b$, e ambos $\int_a^c f(x)\ dx$ e $\int_c^b f(x)\ dx$ forem convergentes, então definimos*

  $$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Exemplo 9.10. *Calcule* $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx.$

Observemos que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ não é contínua em $x = 2$. Então,

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2^+}\int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{t\to 2^+} 2(x-2)^{1/2}\Big|_t^5 = \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{t-2}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Exemplo 9.11. *Determine se* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ *converge ou diverge.*

Como o $\displaystyle\lim_{t\to\pi/2^-} \sec x = +\infty$ a integral é imprópria. Então

$$\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx = \lim_{t\to\pi/2^-}\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx = \lim_{t\to\pi/2^-} \ln|\sec x + \mathrm{tg}\ x|\Big|_0^t = \infty,$$

pois $\displaystyle\lim_{t\to\pi/2^-} \sec x = \lim_{t\to\pi/2^-} \mathrm{tg}\ x = +\infty$. Portanto a integral é divergente.

Exemplo 9.12. *Calcule* $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$

Observemos que $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ não é contínua em $x = 1$. Então,

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

Agora,

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big|_0^t = \lim_{t\to 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) = -\infty,$$

pois $\displaystyle\lim_{t\to 1^-}(1-t) = 0$. Portanto a integral é divergente.

Observação: Se não tivéssemos notado a assíntota $x = 1$ no exemplo anterior e tivéssemos confundido a integral com uma integral definida, poderíamos ter calculado erroneamente. De agora em diante devemos prestar atenção no integrando para decidir se a integral é imprópria ou não.

Se $c \in (a,b)$ e $f : [a,b]\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$. Nestas condições, a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ deverá ser tratada como uma integral imprópria. Daí, se $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ forem convergentes, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ também será convergente e teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Se pelo menos uma das integrais $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ for divergente, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ será divergente.

Exercício: Calcule

$$(a) \quad \int_{-2}^{0} \frac{1}{(x+1)^{1/3}}\,dx, \quad [R:0]; \qquad\qquad (b) \quad \int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx, \quad [R: Diverge].$$

Exercício: Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^{2/3}}$ e calcule a área A da região sob o gráfico da função f, acima do eixo x e entre as retas $x = 1$ e $x = 5$. $[R: 2\sqrt[3]{2}]$.

Exercício: Calcule

$$(a) \quad \int_{3/2}^{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)^{-2} dx, \quad [R: Diverge]; \qquad (b) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\text{sen } x}}\,dx, \quad [R:2].$$

Exercício: Analise a convergência das integrais

$$(a) \quad \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } x}{\sqrt{\pi - x}}\,dx, \quad [R: Converge]; \qquad (b) \quad \int_0^{2} \frac{1}{1-x^2}\,dx, \quad [R: Diverge];$$

$$(c) \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{t} + \text{sen } t}\,dt, \quad [R: Converge]; \qquad (d) \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - x}}\,dx, \quad [R: Converge].$$