2.ª Prova - SMA 353 - Cálculo I

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Questão	Nota
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
Total	

Nome: ______________________________

Número USP: ______________________________

22.11.2023

Instruções:

- Escolha 05 itens de cada uma das 04 questões.
- Para cada item escolhido assinale com V para verdadeiro ou com F para falso.
- Justifique um dos itens escolhidos de cada questão (prova ou contra-exemplo).
- Cada questão vale 2.5 pontos, desses 1.0 é o valor da justificativa do item escolhido.
- A prova é individual e sem consulta. Boa prova!

1.ª Questão. Considere a função dada por $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, $x \in [-1, 4]$.

Item	VouF
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

(1) Os pontos críticos de f são, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ e $x = 4$.

(2) O máximo de f em $[-1, 4]$ é alcançado no maior dos seus valores nos pontos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ e $x = 4$ e o mínimo de f em $[-1, 4]$ é alcançado no menor dos seus valores nos pontos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ e $x = 4$.

(3) f tem um ponto de inflexão no intervalo $[0, 1]$ e outro no intervalo $[2, 3]$.

(4) $f'''(x) \neq 0$ nos pontos de inflexão do gráfico de f.

(5) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ e $x = 4$ são pontos extremos locais.

(6) f é decrescente em $[-1, 0] \cup [1, 3]$ e é crescente em $[0, 1] \cup [3, 4]$.

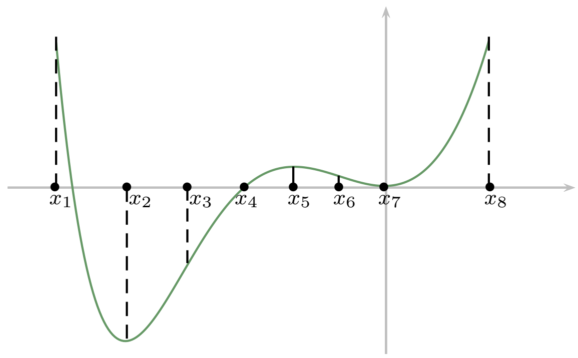

Figura: Gráfico da Função $q : [x_1, x_8] \to \mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{2.ª Questão.}}$ Sejam $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7 < x_8$ números reais. Suponha que a função $q : [x_1, x_8] \to \mathbb{R}$ tenha o gráfico desenhado na figura acima e seja três vezes differenciável. Uma inspeção visual do gráfico nos leva a concluir que:

ITEM	VOUF
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

(1) A função é crescente em $[x_2, x_5] \cup [x_7, x_8]$ e decrescente em $[x_1, x_2] \cup [x_5, x_7]$

(2) A função tem concavidade para baixo em $[x_1, x_3] \cup [x_6, x_8]$ e concavidade para cima em $[x_3, x_6]$

(3) $q'(x_2) = q'(x_5) = q'(x_7) = 0$, $q'(x) \geq 0$ para $x \in [x_2, x_5] \cup [x_7, x_8]$

(4) x_2 e x_7 são pontos de mínimo locais, x_1, x_5 e x_8 são pontos de máximo local e x_3, x_6 são pontos de inflexão.

(5) $q''(x_3) = q''(x_6) = 0$, $q''(x) \geq 0$ em $[x_1, x_3] \cup [x_6, x_8]$ e $q''(x) \leq 0$ em $[x_3, x_6]$ e nada se pode afirmar sobre o sinal de $q'''(x)$ em $x = x_3$ ou $x = x_6$.

(6) $q'''(x) \neq 0$ em $x = x_3$ ou $x = x_6$.

3.ª Questão. Se $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis, então

Item	VouF
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

(1) Se $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $h(x) = \ln(x)$ então $h \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e tem derivada $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

(2) Se $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $i(x) = f(x)^{g(x)}$ entáo i é diferenciável e tem derivada $i'(x) = f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)]$

(3) Se $j : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é dada por $j(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, então a função $k = j \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $k'(x) = \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$.

(4) Se $p, q : (a,b) \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis com derivadas contínuas, $x_0 \in (a,b)$, $p(x_0) = q(x_0) = 0$ e $q'(x_0) \neq 0$ então $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p'(x_0)}{q'(x_0)}$

(5) Uma partícula movimenta-se sobre a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ no sentido horário. Se a partícula se desprende da elipse no ponto $x = (2\sqrt{2}, \frac{2}{3})$ ela passará a movimentar-se sobre a reta $y = -\frac{4\sqrt{2}}{3}(x - 2\sqrt{2}) + \frac{2}{3}$.

(6) A partícula do item anterior irá alcançar o eixo x no ponto $x_T = \frac{9}{2\sqrt{2}}$.

4.ª Questão.

ITEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

(1) Usando L'Hospital os dois valores dos limites abaixo estão corretos

- $\lim_{x\to 0^+} x(\ln(x))^2 = 0$
- $\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{2\ln(x)}} = e^{\frac{1}{2}}$

(2) Usando L'Hospital os dois valores dos limites abaixo estão corretos

- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

(3) Usando as fórmulas de transformação de produto em soma as duas primitivas abaixo estão corretas

- $\int \operatorname{sen}(5x)\cos(x)dx = -\frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{12}\cos(6x) + k$
- $\int \cos(5x)\cos(6x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{22}\operatorname{sen}(11x) + k$

(4) Se $m, n \in \mathbb{N}$, $m-n$ e $m+n$ são diferentes de zero e usando as fórmulas de transformação de produto em soma apenas uma das duas primitivas abaixo está correta

- $\int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{2(m-n)}\operatorname{sen}((m-n)x) - \frac{1}{2(m+n)}\operatorname{sen}((m+n)x) + k$
- $\int \cos(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{2(m-n)}\cos((m-n)x) - \frac{1}{2(m+n)}\cos((m+n)x) + k.$

(5) Usando substituição apenas uma das duas primitivas abaixo está correta

- $\int \operatorname{sen}^7(x)\cos(x)dx = \frac{1}{8}\operatorname{sen}^8(x) + k$
- $\int e^x\sqrt[3]{2+e^x}dx = \frac{3}{4}(2+e^x)^{\frac{4}{3}} + k$

(6) Usando substituição ambas as primitivas abaixo estão corretas

- $\int x\operatorname{sen}(3x^2)\,dx = \frac{1}{6}\cos(3x^2) + k$
- $\int 3^{2x}\ \mathrm{d}x = -2\ln(3)\,3^{2x} + k$