1ª Prova - SMA 353 - Cálculo I

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Questão	Nota
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
05.ª	
Total	

Nome: ______________________________

Número USP: ______________________________

04.10.2023

Instruções:

- Escolha 04 questões.
- Para cada uma delas assinale todas alternativas com V ou F.
- Para cada uma delas escolha **uma alternativa** e justifique (prova ou contra-exemplo).
- Cada questão vale 2.5 pontos, desses 1.0 é o valor da justificativa do ítem escolhido.
- A prova é individual e sem consulta. Boa prova!

$\boxed{\textbf{1.ª Questão.}}$ Dizemos que $\varnothing \subsetneq \alpha \subsetneq \mathbb{Q}$ é um **corte** se 1) $p \in \alpha \Rightarrow \{q \in \mathbb{Q} : q < p\} \subset \alpha$ e 2) $p \in \alpha \Rightarrow \{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant p\} \subsetneq \alpha$. Dizemos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \subsetneq \beta$ e, para todo $q \in \mathbb{Q}$, escrevemos $q^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se α é um corte, $p, q \in \mathbb{Q}$, $p^* < \alpha$ e $\alpha < q^*$, então $p < q$.

(2) Se α é um corte, $\mathbb{Q} \ni r \notin \alpha$ então $\{s \in \mathbb{Q} : s > r\} \cap \alpha = \varnothing$.

(3) Exatamente uma das seguintes relações vale: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$.

(4) Seja $A \neq \varnothing$ um conjunto de cortes. Se existir um corte L tal que $a \leqslant L, \forall a \in A,$ então A tem um menor limitante superior.

(5) Se $\alpha > 0^*$, $\alpha^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} : p < \frac{1}{q}$ para algum $q \notin \alpha\}$ e se $\alpha < 0^*$ $\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$. Em qualquer caso $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1^*$.

2.ª Questão.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

(1) Seja $f:[a,b]\to[a,b]$ contínua então existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$.

(2) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e $k\in\mathbb{R}$ é tal que $[f(a)-k].[f(b)-k]<0$, então, existe $\bar{x}\in(a,b)$ tal que $f(\bar{x})=k$.

(3) Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ e $g:[0,2]\to\mathbb{R}$ funções contínuas. Se

$$h(x)=\frac{2f(x)+1}{(f(x)+g(x))^2-f(x)g(x)+1}$$

então h é contínua em $x=\frac{1}{2}$.

(4) Se $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 4}f(x)=4$ e $\lim_{x\to 4}g(x)=5$ então

$$\lim_{x\to 4}\frac{7f(s)g(s)-28}{9f(s)+4g(s)}=2$$

(5) Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ e suponha que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}=1$ então $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}=3$.

$\boxed{\textbf{3.ª Questão.}}$ Se f e g estão definidas em um intervalo aberto que contém o ponto $p = 0$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10$ e $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x+x^2} = 20$ então

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\mathrm{sen}(x)} = 0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1-\cos(x)} = 20$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{2\mathrm{sen}(x)} = 10$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)}{xg(x)} = 1$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{\ln(1+x)} = 20$

4.ª Questão. Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ tal que 0 e p são pontos de acumulação de D_f.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{|x|} = 0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to p}|f(x) - L| = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = L$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{|x|} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to p}|f(x)| = |L|$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to p}|f(x)| = |L| \Longrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = L$

5.ª Questão. Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ tal que 0 e p são pontos de acumulação de D_f.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = 3$

(2) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$

(3) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 5$

(4) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(6+h) - f(6)}{h} = -\dfrac{5}{2}$

(5) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 2$