Material para a prova do dia 22/11/2023

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

16 de Novembro de 2023

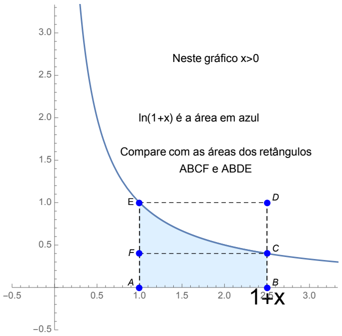
1 Logaritmo e Exponencial

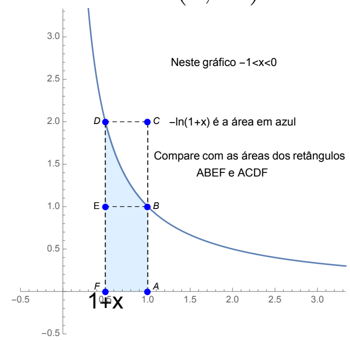
Para $x > 0$ definimos a função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- para $x \geq 1$, $\ln x$ é a a área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = 1$ até $s = x$ e,
- para $x \in (0, 1)$, $\ln x$ é o negativo da área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = x$ até $s = 1$.

Esta função é estritamente crescente, portanto injetora. Veremos mais tarde que ln é sobrejetora.

A inversa de ln é a exponencial denotada por $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$.





Exemplo 1

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Da figura anterior

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad x > 0.$$

Dividindo por x:

$$\tfrac{1}{1+x} \leq \tfrac{\ln(1+x)}{x} \leq 1, \quad \forall\, x > 0.$$

Do Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Por outro lado,

$$-x \leq -\ln(1+x) \leq \frac{-x}{1+x}, \quad -1 < x < 0$$

Dividindo por $-x > 0$,

$$1 \leq \tfrac{\ln(1+x)}{x} \leq \tfrac{1}{1+x}, \ \forall -1 < x < 0.$$

Do Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(1+x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Como ambos limites laterais existem e valem 1, segue que

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(1+x)}{x} = 1. \square$$

Exemplo 2 $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ *e* $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x.y)$.

De fato: Basta ver que, se $y < x$, a área sob o gráfico da função $\frac{1}{x}$, entre y e x, corresponde a $\ln(x) - \ln(y)$ e que esta área coincide com a área sob o gráfico da função $\frac{1}{x}$, entre 1 e $\frac{x}{y}$ (aproxime ambas por retângulos). A segunda igualdade decorre da primeira.

Exemplo 3 **(1)** $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínua e bijetora (estritamente crescente).*

De fato: Como $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$ se, e somente se, $\lim_{y\to 1} \ln(y) = 0$, segue de $\ln(x)-\ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ que ln é contínua. A injetividade também segue. Como $\ln(2^n) = n\ln(2)$ e $\ln(2^{-n}) = n\ln(1/2)$, segue do teorema do valor intermediário que ln é sobrejetora.

Exemplo 4 $e^{x+y} = e^x e^y$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$, *e*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

É claro que $ln(e^x e^y) = x + y = ln(e^{x+y})$ a primeira afirmativa segue. Escreva $g(x) = e^x - 1$. Note que, $x = \ln(z+1)$ se, e somente, $z = e^x - 1$. Logo $g(x) = f^{-1}(x)$, onde $f(x) = \ln(x+1)$.

Dos exemplos anteriores, $z \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$ e $1 = \lim_{z\to 0} \frac{\ln(z+1)}{z}$. Logo

$$1 = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(z+1)}{z}} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. Definimos o logaritmo de base a, denotado por $\log_a$, da seguinte forma:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \forall x > 0.$$

É claro que $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua e bijetora (estritamente monótona) e sua inversa é a exponencial de base a denotada por $a^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ também é uma função contínua e bijetora.

$$\log_a(a^x) = x,\ x \in \mathbb{R} \quad e \quad a^{\log_a x} = x,\ x > 0.$$

$$x = \log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} \text{ e } \ln(a^x) = x\ln(a)$$

Proposição 1 (Propriedades) *Se* $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b \in (0,\infty)\backslash\{1\}$, $x, y \in (0,\infty)$, *então*

(a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(b) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

(c) $\log_a x^y = y \log_a x$.

(d) Se $a > 1$ *a função logarítmica é estritamente crescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $\log_a x < \log_a y$.

(e) Se $0 < a < 1$ *a função logarítmica é estritamente decrescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $\log_a x > \log_a y$.

(a) Já foi provado.

(b) Já foi provado.

(c) Note que

$$y = \log_x(x^y) := \tfrac{\ln(x^y)}{\ln(x)},\ x \neq 1.$$

Note que, $\ln(a^r) = r\ln(a)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Como o logaritmo e a exponencial são contínuas e todo número real x a^x é a extensão da função a^r definida sobre os racionais.

(d) Segue diretamente de (b).

(e) Segue diretamente de (b).

Proposição 2 (Propriedades) *Se a e b são números reais positivos e $x, y \in \mathbb{R}$, então*

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y,\ 1 = a^x \cdot a^{-x}$ *(potências e raízes)*

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$*,*

(c) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$*,*

(d) Para $a > 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y \Rightarrow a^x > a^y$, ou seja, $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ é estritamente crescente.

(e) Para $0 < a < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y \Rightarrow a^x < a^y$, ou seja, $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ é estritamente decrescente.

(f) A função $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é contínua e bijetora. Veremos mais tarde que, se $a > 1$ ($a < 1$),

$$dis \lim_{x\to-\infty} a^x = 0\ (+\infty) \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ (0)$$

(a) Basta recordar que a^x é injetora e que

$$\log_a(a^{x+y}) = x + y = \log_a(a^x) + \log_a(a^y) = \log_a(a^x a^y)$$

Note que a^x coincide com as potências e raízes de um número real positivo quando x é racional. De fato: $a^1 = a$ e portanto $a^n = \underbrace{a.a\cdots a}_{n-vezes}$ $(a^{-n} = \frac{1}{a^n})$ e $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ e $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$.

(b) Basta usar novamente a injetividade e que

$$\log_a((a^x)^y) = y\log_a(a^x) = xy = \log_a(a^{xy})$$

(c) Basta usar novamente a injetividade e que

$$\ln((ab)^x) = x\ln(ab) = \ln(a^x) + \ln(b^x) = \ln(a^x b^x)$$

(d) Segue diretamente de $a^x - a^y = a^x(1 - a^{y-x})$.

(e) Segue diretamente de $a^x - a^y = a^x(1 - a^{y-x})$.

(f) Como a^x é a inversa de $\log_a(x)$ segue que a^x é contínua.

Se $a > 1$, a^x é estritamente crescente, $a^n = (1 + b)^n > 1 + nb$. Logo, dado qualquer número positivo y, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a^{-n} < y < a^n$$

O caso $a < 1$ segue usando o resultado para $\frac{1}{a} > 1$. Segue, do Teorema do Valor Intermediário, que $\mathrm{Im}(a^x) = (0, \infty)$.

Exercício: Esboce o gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2 As derivadas

2.1 Motivação e Definição

Seja $x = f(t)$ uma equação horária do movimento de uma partícula sobre a reta real x. Então $f(t)$ descreve a posição da partícula no instante t, para cada $t \in \mathbb{R}$.

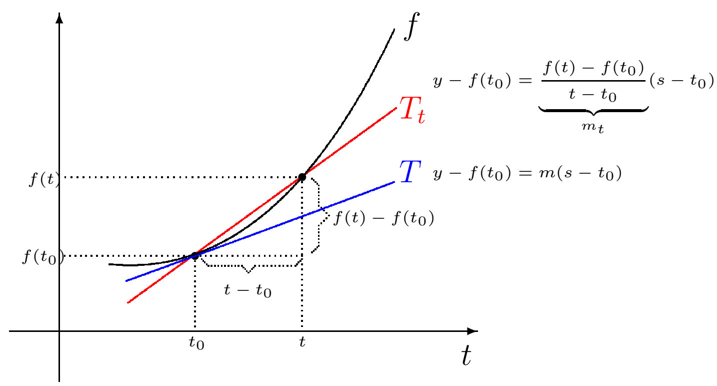
A **velocidade média** da partícula entre os instantes t_0 e t é dada por

$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

e a **velocidade instantânea** ou simplesmente **velocidade** da partícula no instante t_0 é dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \tag{1}$$

Consideremos a seguinte figura.



Notemos que, quando t se aproxima de t_0, a reta T_t "tende" a ocupar a posição da reta T, ou seja, o coeficiente angular m_t, da reta T_t, tende para o valor do coeficiente angular m, da reta T.

Logo, $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \to m$, quando $t \to t_0$, ou $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = m = v(t_0)$.

Fazendo a mudança de variável $t = t_0 + h$, temos

$$t \to t_0 \Leftrightarrow h \to 0.$$

Portanto a equação (1) pode ser re-escrita como

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Agora, podemos dar a definição seguinte.

A derivada: Definição

Definição 1 *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f.*

- *Se existir o limite $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L \in \mathbb{R}$, diremos que L é a* **derivada** *de f em p e escreveremos*

$$f'(p) = L = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

- *Se f admitir derivada $f'(p)$ em p, diremos que f é* **derivável** *ou* **diferenciável em** p.
- *Se f admitir derivada em todo ponto de $A \subset D_f$, diremos que f é* **derivável** *ou* **diferenciável em** $A \subset D_f$. *Se $A = D_f$, diremos simplesmente que f é* **derivável** *ou* **diferenciável**.

Exemplo 5 (A) *Seja $f(x) = 2x^2 - 3$. Então*

$$(a)\ f'(0) = 0; \quad (b)\ f'(2) = 8; \quad (c)\ f'(p) = 4p.$$

Solução: Por definição

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2h = 0,$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(4+4h+h^2) - 8}{h} = \lim_{h\to 0}(8+2h) = 8,$$

e em geral, para qualquer p,

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(p+h)^2 - 3 - (2p^2 - 3)}{h} = \lim_{h\to 0}(4p+2h) = 4p.$$

Exemplo 6 *Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em 0.*

De fato: Verifiquemos que $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ não existe.
Calculando os limites laterais, temos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Portanto não existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$, ou seja, não existe $f'(0)$.

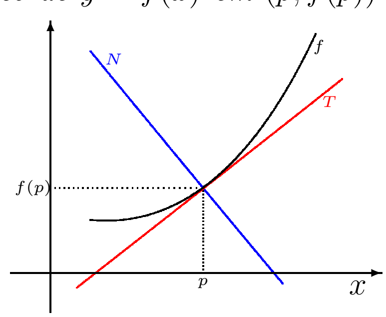
2.2 Reta Tangente e Reta Normal

Conforme vimos, podemos interpretar a derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função.

Definição 2 (Reta Tangente e Reta Normal) *Se f é diferenciável em p, a* ***reta tangente*** *ao gráfico de $y = f(x)$ em $(p, f(p))$ é dada por $\big($vetor direção $(1, f'(p))\big)$*

$$y = f(p) + f'(p)(x - p), \quad \Big((x, y) = (p, f(p)) + (1, f'(p))(x - p)\Big).$$

Definimos a ***reta normal*** *ao gráfico de $y = f(x)$ em $(p, f(p))$ como a reta por este ponto que é perpendicular à reta tangente.*



Se $f'(p) = 0$, $x = p$ é a reta normal. Se $f'(p) \neq 0$, as retas por $(p, f(p))$ são da forma $r : (x, y) = (p, f(p)) + (1, a)(x - p)$ e têm vetor direção $(1, a)$. Neste caso, a reta normal é $\big((1, a) \perp (1, f'(p))\big)$

$$y = f(p) - \frac{1}{f'(p)}(x - p), \quad \Big((x, y) = (p, f(p)) + (1, \frac{-1}{f'(p)})(x - p)\Big).$$

Exemplo 7 (A - Continuação) *Seja $f(x) = 2x^2 - 3$. Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de f nos pontos*

$$(a)\ (0, f(0)); \qquad (b)\ (2, f(2)).$$

Solução:
(a) reta tangente é $y = -3$ e a reta normal é $x = 0$.
(b) Já vimos que $f'(2) = 8$. Portanto, a equação da

reta tangente é $y - 5 = 8(x - 2)$ e a equação da

reta normal é $y - 5 = -\frac{1}{8}(x - 2)$.

Exemplo 8 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^2 - 3$ e paralela à reta $y = 2x + 3$.*

Pela condição de paralelismo, devemos ter que

$$f'(p) = 2 \quad \text{ou} \quad 4p = 2, \quad \text{logo} \quad p = \frac{1}{2}.$$

Portanto a equação da reta tangente é

$$y - f\Big(\frac{1}{2}\Big) = f'\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(x - \frac{1}{2}\Big), \qquad \text{ou seja} \qquad y + \frac{5}{2} = 2\Big(x - \frac{1}{2}\Big).$$

2.3 Taxas de Variação

Uma outra interpretação da derivada é como uma taxa de variação.

Consideremos, novamente, o problema de uma partícula que se desloca sobre o eixo x segundo a equação horária $x = f(t)$.

Definimos a velocidade instantânea como o limite das velocidades médias em intervalos cada vez menores.

Deste modo, a **velocidade instantânea** da partícula no instante t é

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

De maneira análoga, a **aceleração média** da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$ é dada por

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$

onde $v(t + \Delta t) - v(t)$ é a variação da velocidade entre os instantes t e $t + \Delta t$, e a **aceleração instantânea** ou simplesmente **aceleração** da partícula no instante t é dada por

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = f''(t).$$

Exemplo 9 *Uma partícula move-se sobre o eixo x de modo que, no instante t, a posição x é dada por $x = t^2$, $t \geq 0$, onde t é dado em segundos e x é dado em metros.*

(a) Qual a velocidade da partícula no instante t?

(b) Qual a aceleração da partícula no instante t?

Solução: A velocidade é a derivada da função posição, logo

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = 2t,$$

e a aceleração é a derivada da velocidade,

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{2(t+h) - 2t}{h} = 2.$$

Suponhamos agora que uma quantidade y depende de outra quantidade x, de modo que y é uma função de x, ou seja $y = f(x)$. A **taxa média de variação** de f entre x e $x + \Delta x$ é dada por

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

A **taxa de variação** (instantânea) de f em x é dada por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e coincide com a derivada $f'(x)$ de f em x.
Observação: A taxa de variação tem uma interpretação específica dependendo da ciência à qual se refere. A seguir alguns exemplos:

- Suponha que a massa m de uma barra não homogênea seja uma função do comprimento, $m = f(x)$. Então definimos a **densidade linear** ρ como taxa de variação da massa em relação ao comprimento, ou seja, $\rho(x) = f'(x)$.

- Se um gás é mantido a uma temperatura constante, o volume V ocupado é uma função da pressão P, isto é, $V(P)$. Consideramos a taxa de variação do volume em relação à pressão, ou seja, $V'(P)$. A **compressibilidade isotérmica** é definida por $\beta = -\frac{V'(P)}{V}$.

- Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos em uma população no instante t. Então a taxa de variação da população com relação ao tempo $f'(t)$ é chamada **taxa de crescimento**.

- Suponha que $C(x)$ seja o custo total da produção de x unidades de um produto dado. A taxa de variação do custo em relação ao número de ítens produzidos $C'(x)$ é chamado de **custo marginal**.

2.4 A função derivada

Já definimos a derivada de $f : D_f \to \mathbb{R}$ em pontos $p \in D_f$ que também são pontos de acumulação de D_f. Sendo assim, se

$$D_{f'} = \Big\{ x \in D_f : \ x \text{ é um ponto de acumulação de } D_f \\ \text{e } \lim_{h \to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe.} \Big\} \subset D_f$$

definimos a função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in D_{f'}.$$

Esta nova função f', é chamada **função derivada** ou, simplesmente, **derivada** de f.

Exemplo 10 *Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x-1}$ e determine o domínio de f'.*

Solução: Note que, $D_f = [1, \infty)$ e para todo $x > 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h}, \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

Logo $D_{f'} = (1, \infty)$

Notações alternativas. Seja $y = f(x)$, onde f é uma função derivável. Podemos escrever, alternativamente,

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

para denotar a derivada de y ou f em relação à variável x.

O símbolo $\dfrac{dy}{dx}$ não é um quociente; trata-se de uma notação.

Utilizando a notação de incremento, podemos escrever a definição de derivada como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Daí, tomando $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

O seguinte Teorema estabelece uma relação entre continuidade e diferenciabilidade.

Teorema 1 *Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p.*

Prova: Recorde que p é um ponto de acumulação de D_f. Vamos mostrar que $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ ou que $\lim_{x\to p}(f(x) - f(p)) = 0$.

Escrevemos

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p).$$

Assim

$$\lim_{x\to p}(f(x) - f(p)) = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x\to p}(x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0.$$

Portanto f é contínua em p. $\square$

Observação: Note que não vale a recíproca. A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo 11 (Critério Negativo) *Se f não é contínua em p então f não é diferenciável em p.*

Exemplo 12 *A função $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ é diferenciávelem $x = 1$?*

Solução: Como

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

$f(x)$ não é contínua em $x = 1$, logo não é diferenciável em $x = 1$.

2.5 Derivadas de Ordens Superiores

Seja f uma função derivável em $D_{f'}$. A função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de** f.

Então, podemos definir a derivada de f', que será chamada **derivada segunda de** f. Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

quando o limite existir. Escrevemos $f'' = f^{(2)} = (f')'$ para denotar a derivada segunda de f.

Para $n \in \mathbb{N}^*$, a **derivada n-ésima de** f será denotada por $f^{(n)}$, quando esta existir.

Alternativamente, podemos escrever

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

para denotar a derivada segunda, f'', de $y = f(x)$. Analogamente, usamos

$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{ou} \quad \frac{d^3f}{dx^3}$$

para denotar a derivada de terceira, f''', de $y = f(x)$, e assim por diante.

Exemplo 13 *Se a posição x de uma partícula é dada pela equação horária $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Encontre a aceleração $a(t)$ no instante t.*

Solução: Vamos calcular a derivada $v(t) = x'(t)$. Note que

$$v(t) = x'(t) = \lim_{r\to t} \tfrac{x(r)-x(t)}{r-t} = \lim_{r\to t}\left(\tfrac{r^3-t^3}{r-t} - 6\tfrac{r^2-t^2}{r-t} - \tfrac{9(r-t)}{r-t}\right)$$
$$= \lim_{r\to t}\left(r^2 + rt + t^2 - 6(r+t) - 9\right) = 3t^2 - 12t - 9.$$

Agora, $a(t)= v'(t) = \lim_{r\to t}\big(3\tfrac{r^2-t^2}{r-t} - 12\tfrac{r-t}{r-t} - \tfrac{9-9}{r-t}\big)= 6t - 12.$

Exemplo 14 *Seja $f(x) = 3x^2 - 4x$. Calcule f' , f'' e f'''.*

Solução: Note que

$$f'(x) = \lim_{r\to x}\frac{f(r)-f(x)}{r-x} = \lim_{r\to x}\big(3\frac{r^2-x^2}{r-x} - 4\frac{r-x}{r-x}\big) = \lim_{r\to x}\big(3(r+x)-4\big) = 6x-4,$$

$$f''(x) = \lim_{r\to x}\frac{f'(r)-f'(x)}{r-x} = \lim_{r\to x}\big(6\frac{r-x}{r-x} - \frac{4-4}{r-x}\big) = 6$$
$$\text{e} \quad f'''(x) = 0$$

Exemplo 15 *Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.*

Solução: Faremos a prova por indução. Note que, se $x \neq 0$,

$$f'(x) = \lim_{r\to x}\tfrac{f(r)-f(x)}{r-x} = \lim_{r\to x}\tfrac{\frac{1}{r}-\frac{1}{x}}{r-x} = \lim_{r\to x}\tfrac{\frac{x-r}{rx}}{r-x} = -\lim_{r\to x}\tfrac{1}{rx} = -\tfrac{1}{x^2}.$$

Se $f^{(k-1)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$ (hipótese de indução), então

$$f^{(k)}(x) = \lim_{r\to x}\tfrac{f^{(k-1)}(r)-f^{(k-1)}(x)}{r-x} = (-1)^{k-1}(k-1)!\lim_{r\to x}\tfrac{\frac{1}{r^k}-\frac{1}{x^k}}{r-x}$$
$$= (-1)^{k-1}(k-1)!\lim_{r\to x}\tfrac{-(r^k-x^k)}{r-x}\tfrac{1}{r^kx^k}$$
$$= (-1)^{k-1}(k-1)!\lim_{r\to x}(-1)\tfrac{r^{k-1}+r^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}}{r^kx^k}$$
$$= (-1)^k(k-1)!\tfrac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = (-1)^k k!\tfrac{1}{x^{k+1}}.$$

Exemplo 16 *Seja $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$. Calcule f' e f'' quando existirem.*

Solução: Para $x < 0$ $f(x) = -x^2$, daí $f'(x) = -2x$.
Para $x > 0$, $f(x) = x^2$, daí $f'(x) = 2x$. Em $x = 0$ aplicamos a definição. Note que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{x} & \textit{se } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{x} & \textit{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \textit{se } x < 0, \\ x & \textit{se } x > 0 \end{cases} = |x|$$

Portanto, $f'(0) = \lim_{x\to 0}\tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$
Agora, $f''(x) = -2$, se $x < 0$, $f''(x) = 2$, se $x > 0$ e $f''(0)$ não existe.

2.6 Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema 2 (Fórmulas de Derivação) *Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, são válidas as fórmulas de derivação a seguir*

(a) $f(x) = k \Rightarrow \ f'(x) = 0,$

(b) $f(x) = x^n \ \Rightarrow \ f'(x) = nx^{n-1},$

(c) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$

(d) $f(x) = \text{sen } x \ \Rightarrow \ f'(x) = \cos x,$

(e) $f(x) = \cos x \ \Rightarrow \ f'(x) = -\text{sen } x,$

(f) $f(x) = e^x \Longrightarrow \ f'(x) = e^x,$

(g) $f(x) = \ln x \ \Longrightarrow \ f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

Prova: A afirmativa (a) é trivial.

Prova do item (b). Lembremos que

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y-x} = \lim_{y\to x}(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Prova do item (c). Fazendo $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ temos, da continuidade de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $y \to x \Rightarrow u \to v$. Assim

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y-x} = \lim_{u\to v} \frac{u-v}{u^n - v^n} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Prova do item (d).

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\text{sen}y - \text{sen}x}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{2sen\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}{y-x} = \cos x.$$

Prova do item (e). Análoga ao item (d).
Prova do item (f).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

pois, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1.$
Prova do item (g).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\Big(\frac{x+h}{x}\Big).$$

Fazendo $u = \dfrac{h}{x}$ temos que para $h \to 0$, $u \to 0$, assim

$$\lim_{h\to 0} \ln\Big(1 + \frac{h}{x}\Big)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln\big(1+u\big)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

pois, $\lim\limits_{u\to 0}\big(1+u\big)^{\frac{1}{u}} = \lim\limits_{r\to\infty} \big(1 + \frac{1}{r}\big)^r = e.$

2.7 Propriedades da Derivada

O teorema a seguir vai nos auxiliar muito no cálculo de derivadas.

Teorema 3 (Propriedades da Derivada) *Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então*

(a) kf será diferenciável em p e

$$(kf)'(p) = kf'(p), \textbf{ (Multiplicação por constante)}$$

(b) $f + g$ será derivável em p e

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p), \textbf{ (Derivada da Soma)}$$

(c) fg será derivável em p e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p), \textbf{ (Derivada do Produto)}$$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ será derivável em p, se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}, \textbf{ (Derivada do Quociente)}.$$

Prova: Como $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f'(p)$ e $\lim\limits_{x\to p}\frac{g(x)-f(p)}{x-p} = g'(p)$, temos

(a) $\lim\limits_{x\to p}\frac{kf(x)-kf(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p} k\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = k\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = kf'(p).$

$$\begin{aligned}\text{(b) } \lim_{x\to p}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(p)}{x-p} &= \lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)+(g(x)-g(p))}{x-p}\\ = \lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)}{x-p} + \lim_{x\to p}\frac{(g(x)-g(p))}{x-p} &= f'(p)+g'(p).\end{aligned}$$

(c) Note que g é contínua em p. Logo $\lim\limits_{x\to p} g(x) = g(p)$ e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{f(x)g(x)-f(p)g(p)}{x-p} &= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}g(x) + f(p)\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right)\\ &= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\lim_{x\to p} g(x) + f(p)\lim_{x\to p}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\\ &= f'(p)g(p) + f(p)g'(p)\end{aligned}$$

(d) Como g é contínua em p e $g(p) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to p}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(p)}$, e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p} &= \lim_{x\to p}\left(\tfrac{f(x)g(p)-f(p)g(x)}{x-p}\tfrac{1}{g(x)g(p)}\right)\\
&= \lim_{x\to p}\left(\tfrac{(f(x)-f(p))g(p)-f(p)(g(x)-g(p))}{x-p}\tfrac{1}{g(x)g(p)}\right)\\
&= \lim_{x\to p}\left(\left(\tfrac{f(x)-f(p)}{x-p}g(p) - f(p)\tfrac{g(x)-g(p)}{x-p}\right)\tfrac{1}{g(x)g(p)}\right)\\
&= \left(\lim_{x\to p}\tfrac{f(x)-f(p)}{x-p}g(p) - f(p)\lim_{x\to p}\tfrac{g(x)-g(p)}{x-p}\right)\lim_{x\to p}\tfrac{1}{g(x)g(p)}\\
&= \left(f'(p)g(p) - f(p)g'(p)\right)\frac{1}{g(p)^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 17 $f(x) = x^8 + 12x^5 - 6x + 2 \implies f'(x) = 8x^7 + 60x^4 - 6.$

Exemplo 18 $f(x) = x\cos x \implies f'(x) = \cos x - x\text{sen}x.$

Exemplo 19 $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3+6} \implies f'(x) = \dfrac{2x(x^3+6)-(x^2-2)3x^2}{(x^3+6)^2}.$

Exemplo 20 $f(x) = x^{-n} \implies f'(x) = -n\,x^{-n-1}\,, \quad x \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Solução: Note que, se $g(x) = x^n$, $g'(x) = nx^{n-1}$ e $f(x) = \frac{1}{g(x)}$. Logo

$$f'(x) = \frac{0.g(x) - 1.g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -n\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Exemplo 21 $f(x) = \log_a x \implies f'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}\,, \quad x > 0.$

Solução: Segue diretamente do fato que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ e da fórmula de mudança de base

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a}\ln x.$$

Exemplo 22 *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ *no ponto* $(1, \frac{e}{2})$.

Solução: Como

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2},$$

a inclinação da reta tangente em $(1, \frac{e}{2})$ é $f'(1) = 0$. Logo a equação da reta tangente é $y = \frac{e}{2}$.

2.8 A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g.

Teorema 4 (Regra da Cadeia) *Sejam f e g diferenciáveis com $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$. Se $h = f \circ g$, então h é diferenciável e*

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \textit{para todo } x \in D_g. \tag{2}$$

De fato: Note que $x \to p \Rightarrow u = g(x) \to g(p) = u_p$. Se $g(x) \neq g(p)$ para todo x próximo a p,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p} \frac{f(g(x)) - f(g(p))}{x - p} &= \lim_{x\to p} \frac{f(\overbrace{g(x)}^{u}) - f(\overbrace{g(p)}^{u_p})}{g(x) - g(p)} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \\
&= \lim_{u\to u_p} \frac{f(u) - f(u_p)}{u - u_p} \lim_{x\to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \\
&= f'(u_p)g'(p) = f'(g(p))g'(p).
\end{aligned}$$

Se $g(x) = g(p)$ para valores de x arbitrariamente próximos a p, então $g'(p) = 0$ e $(f \circ g)'(p) = 0$ e a igualdade segue.

Notação alternativa. Nas condições do Teorema 4 temos

$$\begin{cases} y = f(u) & \Longrightarrow \quad \dfrac{dy}{du} = f'(u) \\ u = g(x) & \Longrightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = g'(x). \end{cases} \tag{3}$$

Por outro lado, $h(x) = f(g(x)) = f(u) = y$ ou seja $y = h(x)$.

Portanto

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{4}$$

Daí, substituindo (3) em (4), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}, \quad \text{para todo } x \in D_g\,.$$

Exemplo 23 *Calcule a derivada de $h(x) = \cos(\sqrt{x})$.*

Solução: Fazendo $u = g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \cos u$, então

$$h(x) = f(g(x)),\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f'(x) = -\mathrm{sen} x.$$

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\mathrm{sen}(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Observação: Ao aplicar a Regra da Cadeia derivamos primeiro a função de fora f e avaliamos na função de dentro $g(x)$ e então multiplicamos pela derivada da função de dentro.

Exemplo 24 *Calcule a derivada de* $h(t) = \ln(4t-2)$.

Solução: Fazendo $g(t) = 4t-2$ e $f(x) = \ln x$, então $h(t) = f(g(t))$, $g'(t) = 4$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{1}{4t-2}4 = \frac{4}{4t-2}.$$

Exemplo 25 *Calcule a derivada de* $f(x) = e^{ax}$.

Solução: $f'(x) = e^{ax} \cdot a$.

Exemplo 26 *Calcule a derivada de* $f(x) = \text{sen}(\cos(e^x))$.

Solução: $f'(x) = \cos(\cos(e^x)) \cdot (-\text{sen}(e^x) \cdot e^x)$.

Exemplo 27 *Seja* $a > 0$ *uma constante com* $a \neq 1$. *Então* $(a^x)' = a^x \ln a$.

Solução: Escrevemos $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x \ln a}\frac{d}{dx}(x \ln a) = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

Logo

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Exemplo 28 *Se* α *uma constante e* $x > 0$, *então* $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Solução: Escrevemos $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}e^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x}\frac{d}{dx}(\alpha \ln x) = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Logo

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1} \text{ para todo } x > 0.$$

Regra da Potência combinada com a Regra da Cadeia: para qualquer número α e $g(x)$ diferenciável, temos

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^\alpha = \alpha[g(x)]^{\alpha-1}g'(x).$$

Exemplo 29

$$(a)\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}}(2x+1)$$

$$(b)\ y = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^4 \Rightarrow y' = 4\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}\right).$$

Outras aplicações da Regra da Cadeia: Suponha $g(x)$ derivável. Então

$$(a)\ [e^{g(x)}]' = e^{g(x)}g'(x), \qquad (b)\ [\ln g(x)]' = \frac{g'(x)}{g(x)},$$

$$(c)\ [\cos g(x)]' = -g'(x)\,\text{sen} g(x), \quad (d)\ [\text{sen} g(x)]' = g'(x)\cos g(x).$$

Exemplo 30

$$(a)\ [e^{x^2}]' = e^{x^2}2x, \qquad (b)\ [\ln x^3]' = \frac{3x^2}{x^3},$$
$$(c)\ [\mathrm{sen}(x^5)]' = \cos(x^5)5x^4, \quad (d)\ [\mathrm{sen}^5 x]' = 5\mathrm{sen}^4 x \cos x.$$

Exemplo 31 *Se f e g são funções deriváveis e $f(x) > 0$. Então $f(x)^{g(x)}$ é derivável e*

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)].$$

Solução: Escrevemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Então,

$$[f(x)^{g(x)}]' = e^{g(x)\ln f(x)}[g(x)\ln f(x)]',$$

e portanto,

$$\begin{aligned}[f(x)^{g(x)}]' &= f(x)^{g(x)}[g(x)\ln f(x)]' \\ &= f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)}f'(x)].\end{aligned}$$

Exemplo 32 *Calcule a derivada de $f(x) = x^x$.*

Solução: Escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$ e aplicamos a Regra da Cadeia,

$$[x^x]' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1).$$

2.9 Derivada da Função Inversa

Considere f invertível. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Já vimos que se f é contínua, então f^{-1} também é.

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Portanto, para todo $x \in D_{f^{-1}}$, tal que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, vale

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para mostrar que f^{-1} é diferenciável usamos a seguinte proposição:

Proposição 3 (Derivada de funções inversas) *Seja f invertível e definida em um intervalo. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$, com $f'(q) \neq 0$, então f^{-1} será diferenciável em p e*

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}.$$

De fato: Como f^{-1} é contínua em p, $\lim\limits_{h\to 0} f^{-1}(p+h) = f^{-1}(p)$. Usando que $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{h}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h))-f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\end{aligned}$$

Exemplo 33 *Se $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, então $g'(x) = \dfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$, $2 \le n \in \mathbb{N}$.*
Recorde que, $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar.

Solução: Note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$ onde $f(u) = u^n$. Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemplo 34

Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ definida por $f(x) = \mathrm{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é bijetora.

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\mathrm{Im}(f) \subset [-1,1]$.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, do teorema do valor intermediário que $\mathrm{Im}(f) \supset [-1,1]$ e que f é sobrejetora.

Para verificar que f é injetora observamos que se $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x > y$, então $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ e $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo

$$\mathrm{sen} x - \mathrm{sen} y = 2\mathrm{sen}\left(\tfrac{x-y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right) > 0.$$

Exemplo 35 *A inversa da função $f(x) =$ sen x, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a função $g(x) = \mathrm{arcsen}\ x$, para $x \in [-1,1]$. Qual é a derivada de $g(x)$?*

Solução:

Aplicando a Proposição 4.

$$\mathrm{arcsen}'x = \frac{1}{\cos(\mathrm{arcsen}\ x)}.$$

Agora, $1 = \cos^2(\mathrm{arcsen} x) + \mathrm{sen}^2(\mathrm{arcsen} x) = \cos^2(\mathrm{arcsen}\ x) + x^2$, logo $\cos(\mathrm{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$ pois $\cos y \ge 0$ para $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$\mathrm{arcsen}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\sec x$ e cotg x, denominadas arccos x, arctg x, arcsec x e arccotg x.

Exercício: Mostre que (Entregar dia 25/10/2023)

$$\begin{aligned}&(a)\ \arccos'x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (b)\ \mathrm{arctg}'x = \frac{1}{1+x^2};\\ &(c)\ \mathrm{arcsec}'x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad (d)\ \mathrm{arccotg}'x = -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

2.10 Derivação Implícita

Em geral, as funções são dadas na forma $y = f(x)$. Entretanto, algumas funções são definidas implicitamente por uma relação entre x e y.

No exemplo $x^2 + y^2 = 25$ é possível resolver uma equação e obter $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Contudo, no exemplo $x^3 + y^3 = 6xy$ não é fácil obter y como função de x.

Neste caso, para calcular a derivada de y, recorremos à **derivação implícita**, que consiste em derivar a ambos os lados da equação em relação a x e então resolver a equação resultante para encontrar y'.

A existência de uma função diferenciável $y(x)$ dada pela equação será mostrada no Cálculo III. Este resultado mostrará que sempre que podemos encontrar y' o resultado é válido.

Exemplo 36 *Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\frac{dy}{dx}$.*

Solução: Derivando a ambos os lados da equação e usando a Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25 \Rightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Exemplo 37 *Se $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre $\frac{dy}{dx}$.*

Solução: Derivando ambos os lados da equação em relação a x, obtemos $3x^2+3y^2y' = 6y+6xy'$. Resolvendo em y'

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Exemplo 38 *Se $y = f(x)$ é diferenciável e $xf(x) + \operatorname{sen} f(x) = 4$, determine $f'(x)$.*

Solução: Note que,

$$0 = \frac{d}{dx}(xf(x) + \operatorname{sen}(f(x))) = f(x) + xf'(x) + \cos(f(x))f'(x).$$

Assim,

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x + \cos(f(x))}$$

2.11 Derivada da Função Inversa

Considere f invertível. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Já vimos que se f é contínua, então f^{-1} também é.

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Portanto, para todo $x \in D_{f^{-1}}$, tal que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, vale

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para mostrar que f^{-1} é diferenciável usamos a seguinte proposição:

Proposição 4 (Derivada de funções inversas) *Seja f invertível. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$, com $f'(q) \neq 0$, então f^{-1} será diferenciável em p e*

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}.$$

De fato: Como f^{-1} é contínua em p, $\lim_{h\to 0} \overbrace{f^{-1}(p+h)}^{u} = \overbrace{f^{-1}(p)}^{u_p}$. Usando que $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(p) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{(p+h)-p}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h))-f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} = \lim_{u\to u_p} \frac{1}{\frac{f(u)-f(u_p)}{u-u_p}} = \frac{1}{f'(u_p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\end{aligned}$$

Exemplo 39

Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \mathrm{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é bijetora.

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\mathrm{Im}(f) \subset [-1, 1]$.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, do teorema do valor intermediário que $\mathrm{Im}(f) \supset [-1, 1]$ e que f é sobrejetora.

Para verificar que f é injetora observamos que se $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x > y$, então $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo

$$\mathrm{sen} x - \mathrm{sen} y = 2\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0.$$

Exemplo 40 *A inversa da função $f(x) = sen\ x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a função. $f^{-1}(x) = \mathrm{arcsen}\ x$, $x \in [-1, 1]$. Qual é a derivada de $f^{-1}(x)$?*

Solução:

Aplicando a Proposição 4.

$$\mathrm{arcsen}' x = \frac{1}{\cos(\mathrm{arcsen}\ x)}.$$

Agora, $1 = \cos^2(\mathrm{arcsen} x) + \mathrm{sen}^2(\mathrm{arcsen} x) = \cos^2(\mathrm{arcsen}\ x) + x^2$, logo $\cos(\mathrm{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$ pois $\cos y \geq 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$\mathrm{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\sec x$ e $\mathrm{cotg}\ x$, denominadas $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\ x$, $\mathrm{arcsec}\ x$ e $\mathrm{arccotg}\ x$.

Exercício: Mostre que

$$\begin{aligned}&(a)\ \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (b)\ \mathrm{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}; \\ &(c)\ \mathrm{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad (d)\ \mathrm{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

3 O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

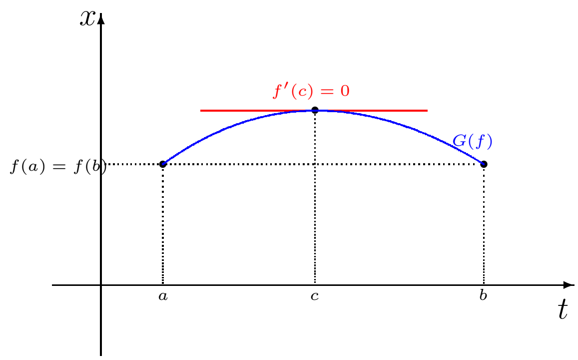
O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas mais importantes do Cálculo. A sua demonstração depende do seguinte resultado:

Teorema 5 (de Rolle) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e $f(a) = f(b)$, então existirá $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Interpretação: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), $x = f(t)$ a equação horária do movimento de uma partícula sobre a reta.

Se e a partícula estiver no mesmo lugar em 2 instantes distintos de tempo, pelo Teorema de Rolle, existirá um tempo para o qual a velocidade se anula.



Prova: Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existem x_1 e x_2 tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a,b]$.

Se f não é uma função constante em $[a,b]$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, ao menos um dos pontos em $\{x_1, x_2\}$ pertence a (a,b).

Seja $c \in (a,b) \cap \{x_1, x_2\}$. Então c é um ponto de máximo ou de mínimo de f e $c \in (a,b)$.

Vimos que se c é um máximo ou um mínimo de f em $[a,b]$ e $c \in (a,b)$, então $f'(c) = 0$ e o resultado segue.

Se f for constante em $[a,b]$, então $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$. Logo, podemos escolher c qualquer em (a,b). $\square$

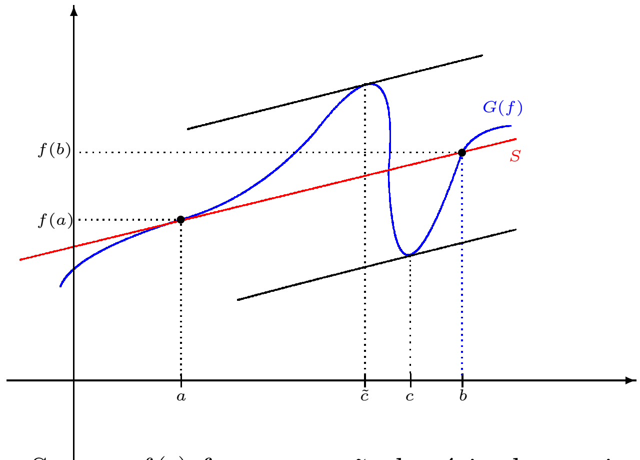
Teorema 6 (do Valor Médio) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),$$

ou seja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observação: O Teorema do Valor Médio diz que, se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), existirá $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta S que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Observação. Se $x = f(t)$ for a equação horária do movimento de uma partícula, $v_m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ será a velocidade média entre $t = a$ e $t = b$. O Teorema do Valor Médio assegura que existe um instante $c \in (a, b)$ tal que $v_m = f'(c) =$velocidade instantânea em $t = c$.

Prova: A reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Definamos

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Note que, h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, isto é,

(a) $h(x)$ é contínua em $[a, b]$.

(b) $h(x)$ é diferenciável em (a, b).

(c) $h(a) = h(b) = 0$.

Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e o Teorema do Valor Médio está demonstrado. $\square$

Agora vamos obter informação do comportamento de uma função a partir de suas derivadas. Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário 1 (1) *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).*

Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, f será estritamente crescente em $[a, b]$.

Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, f será estritamente decrescente em $[a, b]$.

Prova: Queremos provar que, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Pelo Teorema do Valor Médio, aplicado a f em $[x_1, x_2]$, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ devemos ter que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Segue que f é estritamente crescente. A prova do outro item é análoga.$\square$

É fácil ver que, se f for diferenciável e crescente (decrescente) em (a, b), então $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$, para todo $x \in (a, b)$. O resultado a seguir mostra que a recíproca também é verdadeira.

Agora vamos obter informação do comportamento de uma função a partir de suas derivadas. Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

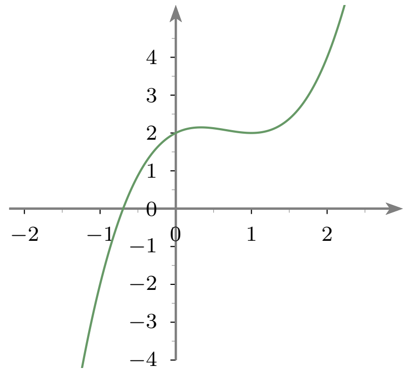


Figura: Esboço do gráfico

Corolário 2 (1) *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b).*

Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$, f será estritamente crescente em $[a,b]$.

Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$, f será estritamente decrescente em $[a,b]$.

Corolário 3 (2) *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b).*

- *Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, f será crescente em $[a,b]$.*
- *Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, f será decrescente em $[a,b]$.*

Exemplo 41 *Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é bijetora.*

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\operatorname{Im}(f) \subset [-1,1]$.
Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, segue do Teorema do Valor Intermediário que $\operatorname{Im}(f) \supset [-1,1]$ e que f é sobrejetora.
Para verificar que f é injetora observamos que $f'(x) = \cos(x) > 0$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Segue do Corolário (1) que f é estritamente crescente e portanto injetora.

Exemplo 42 *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f e esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.*

Solução: Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)(x-\frac{1}{3})$ e analisamos o sinal.

- $f'(x) > 0$ em $(-\infty, \frac{1}{3})$ e $(1, +\infty) \Rightarrow f$ é estritamente crescente em $(-\infty, \frac{1}{3}]$ e $[1, +\infty)$,
- $f'(x) < 0$ em $(\frac{1}{3}, 1) \Rightarrow f$ é estritamente decrescente $[\frac{1}{3}, 1]$.
- $f(0) = 2$, $f(\frac{1}{3}) = 2 + \frac{4}{27}$, $f(1) = 2$, $f(x) \geq 2$, para $x \geq 0$, $f(-1) = -2$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Do Teorema do Valor Intermediário e do fato que f é injetora em $(-\infty, \frac{1}{3}]$, existe um único $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = 0$ e $z \in (-1, 0)$.

3.1 Máximos e Mínimos

Definição 3 (Máximos e Mínimos Locais) *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.*

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de máximo local** *de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um* **máximo local**.
- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de mínimo local** *de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é* **mínimo local**.
- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um* **ponto extremo local**, *se x_0 for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local.*

Definição 4 (Máximos e Mínimos Globais)

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de máximo global** *de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$. Neste caso, $f(x_0)$ é um* **máximo global**.
- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de mínimo global** *de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I$. Neste caso, $f(x_0)$ é* **mínimo global**.
- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um* **ponto extremo global**, *se x_0 for um ponto de máximo ou de mínimo global.*

Exemplo 43 *O valor máximo de $f(x) = \cos x$ é 1 e é assumido infinitas vezes.*

Definição 5 *Um* ***ponto crítico*** *de uma função f é um ponto c onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Exemplo 44 *Os pontos críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$ são $\dfrac{3}{2}$ e 0.*

Temos, para $x \neq 0$, que $f'(x) = \dfrac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$. Então, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, ou seja $x = \dfrac{3}{2}$ e $f'(0)$ não existe.

Proposição 5 *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $c \in (a, b)$ for um ponto extremo (máximo ou mínimo) de f, então $f'(c) = 0$.*

Observações:

- Todo ponto extremo de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto é um ponto crítico. Se f estiver definida em um intervalo aberto, deveremos procurar os pontos extremos entre os pontos críticos.
- A função $f(x) = |x|$ tem valor mínimo em $x = 0$, mas $f'(0)$ não existe. Não podemos tirar a hipótese de diferenciabilidade.
- A recíproca não vale. De fato, $f(x) = x^3$ é estritamente crescente e $f'(0) = 0$.
- Se I não for um intervalo aberto, o resultado poderá não ser verdadeiro. Por exemplo, $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, os pontos extremos serão $x = 0$ e $x = 1$. Em ambos os casos, $f'(x) = 1$.

- O Teorema de Weierstrass afirma que uma função contínua em um intervalo fechado assume seus valores máximo e mínimo globais, mas não diz como encontrá-los.

- Notemos que o valor extremo de uma função contínua definida num intervalo fechado ou ocorre num ponto crítico ou ocorre em um extremo do intervalo.

3.2 Método do Intervalo Fechado.

Para encontrar os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$:

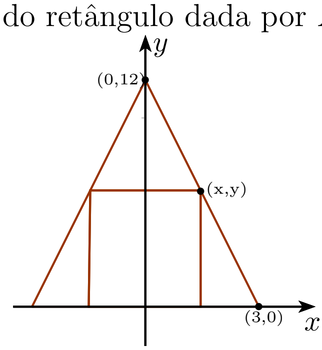
1. Encontre os valores de f nos pontos críticos de f em (a, b).

2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo.

3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo global e o menor desses valores é o mínimo global.

Exemplo 45 *Um triângulo isósceles tem uma base de 6 unidades e uma altura de 12 unidades. Encontre a área máxima possível de um retângulo que pode ser colocado dentro do triângulo com um dos lados sobre a base do triângulo.*

Solução: Introduzimos um sistema de coordenadas de modo a que a base do triângulo esteja sobre o eixo x e o eixo y o corta ao meio. Logo, nosso problema será achar o valor máximo da área A do retângulo dada por $A = 2xy$.



Como (x, y) está sobre o lado do triângulo temos que $y = 12 - 4x$. Assim, a área pode ser expressa apenas em função de x:

$$A(x) = 2x(12 - 4x) = 24x - 8x^2.$$

Como x e y representam comprimentos e A é uma área, estas variáveis não podem ser negativas. Segue-se que $0 \leq x \leq 3$.

Assim, nosso PROBLEMAmáximo da função

$$A(x) = 24x - 8x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3.$$

Temos que $A'(x) = 24 - 16x$, então $x = \dfrac{3}{2}$ é o único ponto crítico. Avaliamos A nos extremos e no ponto crítico: $A(0) = 0$, $A(\frac{3}{2}) = 18$ e $A(3) = 0$. Portanto, a área máxima possível é 18 unidades.

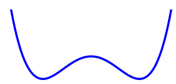
3.3 Critério da derivada primeira

O resultado abaixo segue dos Corolários do Terorema do Valor Médio.

Proposição 6 (Critério da derivada primeira) *Seja c um ponto crítico de f. Se f é contínua em $(c-\delta, c+\delta)$ e diferenciável em e $(c-\delta, c+\delta)\backslash\{c\}$*

(i) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(ii) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.



Exemplo 46 *Determine os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$ e esboce o gráfico.*

Solução: Como $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{(1+3x^2)^2}$, o sinal de f' é dado pelo sinal do numerador $3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$. Então,

- $f'(x) = 0$ se $x = -1$ e $x = \frac{1}{3}$. Logo -1 e $\frac{1}{3}$ são pontos críticos,
- f é estritamente crescente em $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ $(f'(x) > 0)$.
- f é estritamente decrescente $[-1, \frac{1}{3}]$ $(f'(x) < 0$ em $(-1, \frac{1}{3}))$.

Assim, $x = -1$ é ponto de máximo local com valor máximo $f(-1) = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{3}$ é ponto de mínimo local com valor mínimo $f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$.

A reta $y = 1/3$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

Exemplo 47 *Mostre que $e^x \geq x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Solução:

Se $f(x) = e^x - (x+1)$, $f(0) = 0$ e $f'(x) = e^x - 1$. Logo $f'(x) > 0$, se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$.

Portanto 0 é um ponto de mínimo global de f e $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostrando o resultado.

Exemplo 48
Determine os extremos locais de $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$ e esboce o gráfico.

Solução: Temos que $f'(x) = \dfrac{8x}{(4-x^2)^2}$. Então,

- $f'(x) = 0$ se $x = 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto crítico,
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente, para $x \geq 0$, $x \neq 2$
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente, para $x \leq 0$, $x \neq -2$.

Logo, $x = 0$ é um ponto de mínimo local com mínimo $f(0) = 0$.

Como $\displaystyle\lim_{x \to \pm 2^-} f(x) = \pm\infty$ e $\displaystyle\lim_{x \to \pm 2^+} f(x) = \mp\infty$, temos assíntotas verticais em $x = 2$ e em $x = -2$.

Como, $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$, temos uma assíntota horizontal $y = -1$.

3.4 Concavidade e Inflexão

3.4.1 Concavidade

Agora vamos obter mais informações sobre o comportamento de uma função f.

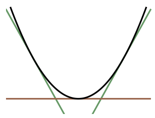
Isto será feito com o auxílio do Teorema do Valor Médio para compreender o significado das derivadas de ordem superior.

Sejam f derivável em (a, b) e $p \in (a, b)$. Consideremos a reta tangente T_p ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ dada por

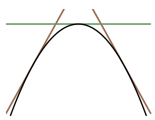
$$T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Definição 6 (Concavidade) *Seja f derivável em (a,b). Diremos que*

- *f é* **convexa** *ou tem* **concavidade para cima** *em (a,b) se, para quaisquer $x,p \in (a,b)$, com $x \neq p$, tivermos*
$$f(x) > T_p(x).$$



- *f é* **côncava** *ou tem* **concavidade para baixo** *em (a,b) se, para quaisquer $x,p \in (a,b)$, com $x \neq p$, tivermos*
$$f(x) < T_p(x).$$



O nosso próximo resultado estabelece condições suficientes para que uma função f tenha concavidade para cima ou para baixo.

Teorema 7 *Seja f uma função derivável em (a,b).*

(i) Se f' for estritamente crescente em (a,b), então f terá concavidade para cima em (a,b).

(ii) Se f' for estritamente decrescente em (a,b), então f terá concavidade para baixo em (a,b).

De fato: Do Teorema do Valor Médio, para algum c entre x e p,

$$f(x) - T_p(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) = (f'(c) - f'(p))(x-p).$$

Como, $x > p \Rightarrow p < c < x$ e $x < p \Rightarrow x < c < p$, se f' é estritamente crescente (decrescente) $f(x) - T_p(x) > 0$ $(f(x) - T_p(x) < 0)$.

Corolário 4 (Critério de concavidade) *Seja f uma função derivável até segunda ordem em (a,b).*

(i) Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$, então f terá concavidade para cima em (a,b).

(ii) Se $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$, então f terá concavidade para baixo em (a,b).

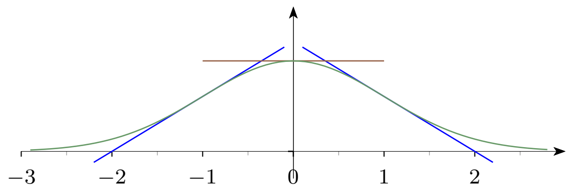
De fato: Note que $f''(x) = (f')'(x) > 0$ (< 0), para todo $x \in (a,b)$, implica que f' é estritamente crescente (decrescente) em (a,b). O resultado agora segue do teorema anterior.

Exemplo 49 *Estude a concavidade de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e esboce o gráfico.*

Solução: Note que $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Como $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ para todo x, o sinal de f'' é dado pelo sinal de $x^2 - 1$. Portanto,

- $f''(x) > 0$ em $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty) \Rightarrow f$ é côncava para cima em $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$,

- $f''(x) < 0$ em $(-1, 1) \Rightarrow f$ é côncava para baixo em $(-1, 1)$.



3.4.2 Pontos de Inflexão

Definição 7 *Seja f uma função contínua em $p \in D_f$. Diremos que p é* **ponto de inflexão de** *f se*

(i) Existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p \in (a, b) \subset D_f$.

(ii) f for differenciável em x para $x \in (a, b)$, $x \neq p$.

(iii) f tiver concavidade para baixo (para cima) em (a, p) e para cima (para baixo) em (p, b).

Ou seja, um ponto de inflexão é um ponto onde a concavidade da função muda.

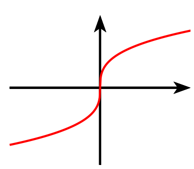
Exemplo 50 *Os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

Recorde que que $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exemplo 51 *$x = 0$ é um ponto de inflexão de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.*

De fato: Vimos que $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ é contínua em toda a reta.

- Para $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$.
- Logo $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $f''(x) < 0$ se $x > 0$.



Exercício: Mostre que $x = 0$ é um ponto de inflexão de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Definição 8 *Se f for derivável em $p \in (a, b)$ e p for um ponto de inflexão de f, diremos que p é um ponto de inflexão horizontal, se $f'(p) = 0$. Caso contrário diremos que p é um* ***ponto de inflexão oblíquo****.*

Observação: Os pontos de inflexão horizontais são pontos críticos, enquanto que os pontos de inflexão oblíquos não os são.

Exemplo 52 *$x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão oblíquos de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

Recorde que que $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exemplo 53 *O ponto $x = 0$ é um ponto de inflexão horizontal de $f(x) = x^3$.*

Recorde que que $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$.

Corolário 5

Se f for duas vezes diferenciável em (a, b) e $p \in (a, b)$ for um ponto de inflexão de f, então $f''(p) = 0$.

De fato: Defina, para $x, s \in (a, b)$, $r(x, s) = f(x) - T_s(x)$. Suponha que, $r(x, s) < 0$ se $x, s \in (a, p)$ e $r(x, s) > 0$ se $x, s \in (p, b)$. Como f' é contínua em (a, b), passando o limite quando $s \to p^{\pm}$ em

$$f(x) - T_s(x) = f(x) - f(s) - f'(s)(x - s),$$

do Teorema da Comparação, segue que $r(x, p) = f(x) - T_p(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, p)$ e $r(x, p) \geq 0$ para todo $x \in (p, b)$. Recorde que

$$0 \leq \frac{f(x) - T_p(x)}{x - p} = \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)}{x - p} = f'(c) - f'(p).$$

para algum c entre x e p. Dividindo por $c - p$ e fazendo o limite quando $x \to p^{\pm}$ obtemos que $f''(p) = 0$.

Em geral não vale a volta. Basta considerar a função $f(x) = x^4$. No entanto, se a derivada segunda for estritamente monótona então vale a volta e, em particular,

Teorema 8

Seja f três vezes diferenciável em (a, b) com derivada terceira contínua. Se $p \in (a, b)$ for tal que $f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$, então p será um ponto de inflexão de f.

De fato: Como $f'''(p) = (f'')'(p) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que f'' é estritamente monótona, para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$. Do fato que $f''(p) = 0$, segue que o sinal de f'' em $(p - \delta, p)$ é o oposto do sinal de f'' em $(p, p + \delta)$. Assim, p é um ponto de inflexão pois há uma mudança de concavidade em p pelo critério de concavidade.

3.5 Pontos Extremos: Critérios envolvendo derivadas

Teorema 9 *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a, b) e $p \in [a, b]$.*

(i) Se $f'(p) = 0$ e f' for crescente em (a, b), então p será um ponto de mínimo local de f.

(ii) Se $f'(p) = 0$ f' for decrescente em (a, b), então p será um ponto de máximo local de f.

De fato: *(i) $f'(x) \leq 0$, para $x \in [a,p]$, e $f'(x) \geq 0$, para $x \in [p,b]$. Logo, do f é decrescente em $[a,p]$ e crescente em $[p,b]$. Segue que $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. A verificação de (ii) é análoga.*

Proposição 7 (Critério da derivada segunda) *Suponha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tenha derivadas até ordem dois contínuas em (a,b) e que $p \in (a,b)$.*

(i) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p será um ponto de mínimo local de f.

(ii) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então p será um ponto de máximo local de f.

De fato: Em ambos os casos, do Teorema da Conservação do Sinal, existe $\delta > 0$ tal que $(f')'(x)$ tem o mesmo sinal de $f''(p)$, para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$.

Assim, no caso (i) f' é estritamente crestence em $(p-\delta, p+\delta)$ e no caso (ii) f' é estritamente decrestence em $(p-\delta, p+\delta)$.

O resultado agora segue do Teorema anterior.

3.6 Análise do gráfico de uma função f: Estratégia

- Determinamos, se possível, os pontos onde f se anula e os intervalos onde f é positiva e onde f é negativa.
- Determinamos, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais de f.
- Calculamos f' e determinamos, se possível, os pontos críticos de f (zeros de f' e pontos onde f' não existe).
- Estudamos o sinal de f' e determinamos os intervalos onde f é crescente ou decrescente.
- Calculamos, se possível, f'' e f''' e classificamos os pontos críticos e encontramos os pontos de inflexão.
- Analisamos o sinal de f'' para determinar a concavidade em cada intervalo.

Exemplo 54 *Nos casos abaixo, encontre e classifique os pontos críticos de f*

$$(a)\ f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3; \qquad\qquad (b)\ f(x) = x^2 e^{-5x}.$$

Solução:(a) Note que,

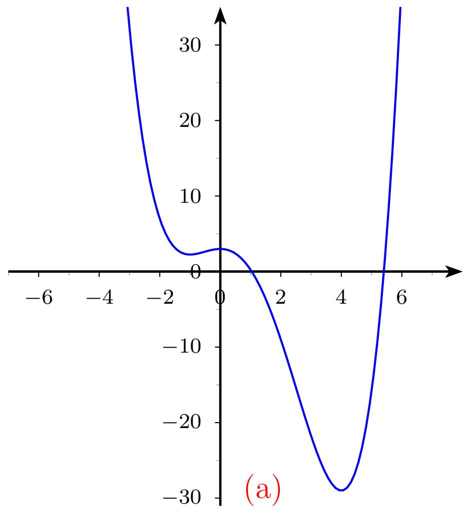
$$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) \quad \text{e} \quad f''(x) = 3x^2 - 6x - 4.$$

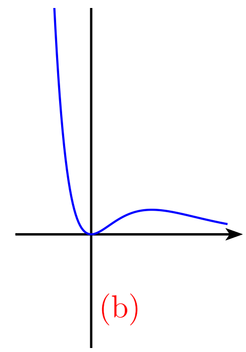
Portanto, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 4$ são os pontos críticos de f. Como $f''(-1) = 5$, $f''(0) = -4$ e $f''(4) = 20$ concluímos que 0 é ponto de máximo e -1 e 4 são pontos de mínimo.

(b) Note que,

$$f'(x) = (2x - 5x^2)e^{-5x} \quad \text{e} \quad f''(x) = (2 - 20x + 25x^2)e^{-5x}.$$

Portanto, $f'(0) = 0 = f'(\frac{2}{5})$, $f''(0) = 2$ e $f''(\frac{2}{5}) = -2e^{-2} < 0$. Assim, $x = 0$ é ponto de mínimo $x = \frac{2}{5}$ é ponto de máximo.





Exemplo 55 *Esboce o gráfico de* $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

Solução: Note que $f(0) = f(6) = 0$ e que $f(x) > 0$ se $x < 6$ e $f(x) < 0$ se $x > 6$. Calculando as derivadas

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}.$$

Os pontos críticos são $x = 4$, $x = 0$ e $x = 6$.

Analisando o sinal da derivada primeira

- Se $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.
- Se $0 < x < 4 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente.
- Se $4 < x < 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.
- Se $x > 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.

Pelo teste da Derivada Primeira

- $x = 0$ é um ponto de mínimo local.
- $x = 4$ é um ponto de máximo local.

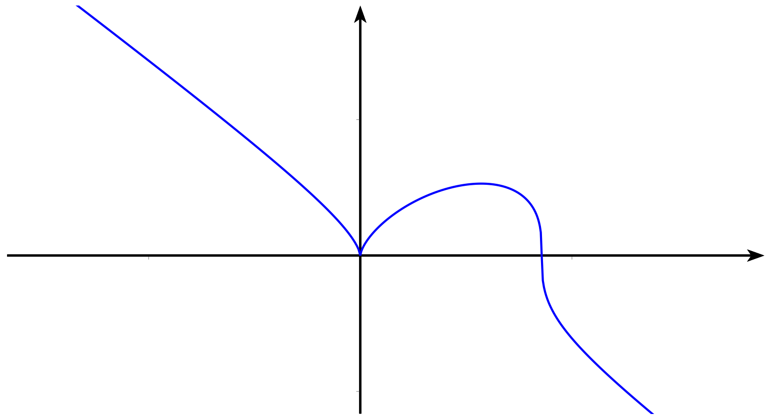
Observe que o teste da Derivada Segunda poderia ser usado em 4, mas não em 0.

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Analisando o sinal da derivada segunda

- Se $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo.
- Se $0 < x < 6 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo.
- Se $x > 6 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para cima.

O único ponto de inflexão é $x = 6$. Observe que as retas tangentes em $x = 0$ e $x = 6$ são verticais.



Exemplo 56 *Esboce o gráfico de* $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Note que, $f(-1) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Derivando

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}, \quad f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

Os pontos críticos são $x = 0$ e $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Analisando o sinal da derivada primeira

- $f'(x) > 0$ se $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f$ é crescente em $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ se $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

Pelo teste da Derivada Primeira ou Segunda $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é um ponto de mínimo local.

Analisando o sinal da derivada segunda

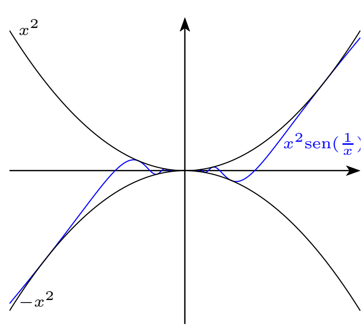
$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

- Se $-1 < x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ é côncava para baixo.
- Se $x > 0$ ou $x < -1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ é côncava para cima.

O único ponto de inflexão é $x = -1$.

Observações: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a, b). Recorde que

- Se $f'(p) = 0$, p pode ser um ponto extremo local, um ponto de inflexão horizontal ou nenhum desses.



- Se $f'(p) \neq 0$, $p \in (a,b)$, p não será ponto extremo local de f.

Entretanto,

- Pode ocorrer que p seja um ponto extremo local de f sem que exista $f'(p)$ ou $f'(p) \neq 0$ (se $p = a$ ou $p = b$).

3.7 Regras de L'Hospital

As regras de L'Hospital se aplicam a cálculos de limites que apresentam as seguintes indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Teorema 10 (De Cauchy) *Se f e g são contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Prova: Considere $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$ e note que h é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. Do Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$ e o resultado segue.

Teorema 11 (Regra de L'Hospital) *Sejam f e g funções differenciáveis em x com $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (p-r, p+r) \backslash \{p\}$ e para algum $r > 0$. Se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 = \lim_{x \to p} g(x)$$

e $\lim\limits_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ (ou $\ell = \pm\infty$), então $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Prova: Como os valores de $f(p)$ e $g(p)$ não influem no cálculo do limite, defina $f(p) = g(p) = 0$. Assim, do Teorema de Cauchy, para cada $x \in (p-r, p+r) \backslash \{p\}$ existe c entre x e p (distinto de ambos) tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Como $\lim\limits_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ e c está entre x e p, segue que $\lim\limits_{x \to p} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell$. Logo existe o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando x tende a p e $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Observação: A regra de L'Hospital ainda será válida se, em lugar de $x \to p$, tivermos $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo 57 *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{2x}}{x}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0} 1-e^{2x}=0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{2x})'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{2x}}{1}=-2.$$

Exemplo 58 *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\, x=0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\, x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}\, x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

2ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g funções deriváveis em x com $g'(x)\neq 0$, para todo $x\in(p-r,p+r)\backslash\{p\}$ e algum $r>0$. Se

$$\lim_{x\to p} f(x)=+\infty=\lim_{x\to p} g(x)$$

e $\lim\limits_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (ou divergir para $\pm\infty$), então $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$ também existirá (ou divergirá para $\pm$ infinito) e

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A prova da 2ª Regra de L'Hospital é bastante elaborada. Faremos a sua prova na Seção 3.8, por completude, para o leitor interessado.

Observação: A 2ª regra de L'Hospital ainda vale se, em lugar de $x\to p$, tivermos $x\to p^+$, $x\to p^-$, $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$. A regra continua válida se um ou ambos os limites for $-\infty$ em lugar de $+\infty$.

Exemplo 59 *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty.$$

Exemplo 60 *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x-x=0$ e $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$ da Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\sec^2 x-1=0$ e $\lim\limits_{x\to 0}3x^2=0$ usamos mais uma vez a Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\sec^2 x\operatorname{tg} x}{6x}.$$

Como ainda o numerador e o denominador tendem a zero, usamos pela terceira vez a Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\ \sec^2 x\, \mathrm{tg} x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\ \sec^2 x\, \mathrm{tg}^2 x + 2\ \sec^4 x}{6} = \frac{1}{3}.$$

Observação: As Regras de L'Hospital se aplicam a indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. As outras formas de indeterminação, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, podem ser reduzidas a estas.

Exemplo 61 *Calcule* $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sen\,x}}\right)$.

Solução: Observe que é uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Escrevendo

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sen}\ x}\right) = \frac{\mathrm{sen}\ x - x}{x\,\mathrm{sen}\ x}$$

temos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sen\,x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\mathrm{sen}\, x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\mathrm{sen}\, x}{\cos x + \cos x - x\mathrm{sen}\, x} = 0$$

Exemplo 62 *Calcule* $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

Solução: Observe que é uma indeterminação da forma $0 \cdot (-\infty)$. Escrevendo $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$ temos uma indeterminação da forma $\frac{-\infty}{\infty}$. Da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Exemplo 63 *Calcule* $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Solução: Observe que a indeterminação é da forma 0^0. Escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x)} = e^0 = 1.$$

Exemplo 64 *Calcule* $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Solução: Note que a indeterminação é da forma ∞^0. Escrevemos $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}\right).$$

Como a indeterminação é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, da Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

Exemplo 65 *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x$.

Solução: Note que a indeterminação é da forma 1^∞. Escrevemos $\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Agora temos uma indeterminação da forma $0\cdot\infty$ que pode ser reduzida a $\dfrac{0}{0}$. Então, pela regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\Big(1+\tfrac{1}{x}\Big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=1$$

e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\tfrac{1}{x}\Big)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^1=e.$$

3.8 Prova da 2ª Regra de L'Hospital:

Sejam f e g funções deriváveis em $(p-r,p+r)\backslash\{p\}$, $r>0$, com $g'(x)\neq0$ para $0<|x-p|<r$. Se

$$\lim_{x\to p}f(x)=+\infty=\lim_{x\to p}g(x)\ \text{ e }\ \lim_{x\to p}\tfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\ \text{ entao, }\ \lim_{x\to p}\tfrac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

De fato:, dado $1\geq\epsilon>0$ existe $0<\delta<r$ tal que

$$p\neq x\in(p-\delta,p+\delta)\Rightarrow\left|\tfrac{f'(x)}{g'(x)}-\ell\right|<\tfrac{\epsilon}{2}.$$

Agora, do Teorema de Cauchy, para $x,y\in(p-\delta,p)$ (ou $x,y\in(p,p+\delta)$), existe c entre x e y tal que

$$\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\tfrac{f'(c)}{g'(c)}\ \text{ e }\ \left|\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-\ell\right|<\tfrac{\epsilon}{2}$$

Assim, para $x,y\in(p-\delta,p)$ (ou $x,y\in(p,p+\delta)$)

$$\left|\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|<|\ell|+\tfrac{\epsilon}{2}\leq|\ell|+\tfrac{1}{2}$$

Note que

$$\left|\tfrac{f(x)}{g(x)}-\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|=\left|\tfrac{f(y)}{g(x)}-\tfrac{g(y)}{g(x)}\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|\leq\left|\tfrac{f(y)}{g(x)}\right|+\left|\tfrac{g(y)}{g(x)}\right|(|\ell|+\tfrac{1}{2})$$

Fixe $y\in(p-\delta,p)$ (ou $y\in(p,p+\delta)$) e escolha $\delta'<\delta$ tal que $x\in(p-\delta',p)$ (ou $x\in(p,p+\delta')$) temos (recorde que f,g tendem para infinito quando x tende para p)

$$\left|\tfrac{f(x)}{g(x)}-\tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|<\tfrac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $x \in (p-\delta', p)$ (ou $x \in (p, p+\delta')$), então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \ell\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que

$$\lim_{x\to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \text{e} \quad \lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \;\Rightarrow\; \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

3.9 Polinômios de Taylor

Os polinômios são as funções mais simples de manipular, já que os seus valores podem ser obtidos através de operações simples (adição e multiplicação). Parece natural, portanto, buscar aproximar funções mais complicadas por funções polinomiais.

Nesta aula, vamos discutir a **Fórmula de Taylor** que fornece uma regra para determinar o polinômio de grau n que 'melhor aproxima' uma função dada ao redor de um ponto p.

Antes de tratarmos o caso geral, discutimos alguns casos particulares para melhor entender o procedimento.

Suponha que a função f seja diferenciável em um intervalo aberto (a, b) e seja $p \in (a, b)$.

Neste caso, vamos procurar função linear (polinômio de grau 1) que 'melhor aproxima' a função f ao redor do ponto p. Isto é, vamos encontrar a função linear

$$L(x) = m + n(x-p)$$

que 'melhor aproxima' a função f para x próximo a p.

A estratégia é encontrar m e n de modo que, em intervalos da forma $(p-\delta, p+\delta)$, com δ arbitrariamente pequeno, a função L escolhida seja aquela que 'melhor aproxima' f.

Definimos o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $L(x)$ por

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - m - n(x-p).$$

Chamamos de 'melhor aproximação' aquela para a qual $E(p) = 0$ e $E(x)$ é pequeno quando comparado com $|x-p|$, isto é,

$$\lim_{x\to p} \frac{E(x)}{x-p} = 0.$$

Note que, $E(p) = 0$ implica que $m = f(p)$ e para $x \neq p$, temos

$$\frac{E(x)}{x-p} = \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - n.$$

Daí,

$$0 = \lim_{x\to p} \frac{E(x)}{x-p} = f'(p) - n \quad \text{e} \quad n = f'(p)$$

e, nossa definição de melhor aproximação, determina a escolha de

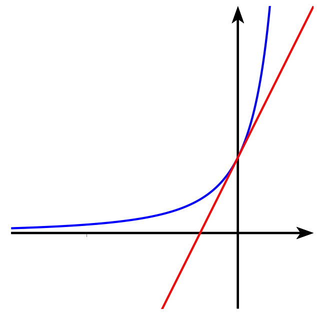
$$m = f(p) \quad \text{e} \quad n = f'(p).$$

Definimos o **Polinômio de Taylor de Ordem 1 de** $f(x)$ **ao redor de** p por

$$\boxed{P_1(x) = f(p) + f'(p)(x-p)}.$$

P_1 é a função linear que melhor aproxima f ao redor de p. Note ainda que o gráfico de P_1 é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$.

Exemplo 66 *O Polinômio de Taylor de Ordem 1 da função $f(x) = (1-x)^{-2}$ ao redor do ponto zero é $P_1(x) = 1 + 2x$.*



Suponhamos que a função $f(x)$ seja duas vezes diferenciável e procuremos um polinômio $P(x)$, de grau no máximo 2, que 'melhor aproxime' f, ou seja, se $E(x) = f(x) - P(x)$, então

$$E(p) = 0, \quad \lim_{x\to p} \frac{E(x)}{x-p} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to p} \frac{E(x)}{(x-p)^2} = 0.$$

É claro que a última condição expressa que o erro cometido é pequeno quando comparado com $(x-p)^2$ e implica a penúltima.

Assim, devemos procurar $P(x) = c_0 + c_1(x-p) + c_2(x-p)^2$, com os coeficientes a serem determinados pelas condições acima.

Agora, $E(p) = 0$ implica que $c_0 = f(p)$ e $\lim\limits_{x\to p} \frac{E(x)}{x-p} = 0$ implica que

$$0 = \lim_{x\to p} \tfrac{f(x)-f(p)-c_1(x-p)-c_2(x-p)^2}{x-p} = \lim_{x\to p} \tfrac{f(x)-f(p)}{x-p} - c_1 = f'(p) - c_1.$$

Por fim, $\lim\limits_{x\to p} \frac{E(x)}{(x-p)^2} = 0$ implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to p} \tfrac{f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)-c_2(x-p)^2}{(x-p)^2} = \lim_{x\to p} \tfrac{f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)}{(x-p)^2} - c_2 \\ &= \lim_{x\to p} \tfrac{f'(x)-f'(p)}{2(x-p)} - c_2 = \tfrac{1}{2} f''(p) - c_2, \ \text{ e } \ c_2 = \tfrac{1}{2} f''(p) \end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$P(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2.$$

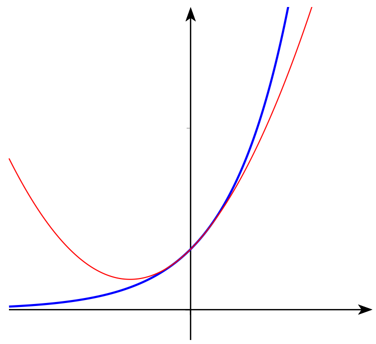
O **Polinômio de Taylor de Ordem 2 de** $f(x)$ **ao redor de** p é

$$P_2(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2.$$

P_2 é o polinômio de grau 2 que 'melhor aproxima' f ao redor de p.

Exemplo 67

O Polinômio de Taylor de Ordem 2 da função $f(x) = e^x$ ao redor do ponto zero é $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.



De forma geral, se a função dada $f(x)$ for derivável até ordem n e procuramos um polinômio $P_n(x)$ de grau n que 'melhor aproxima' f ao redor de p, isto é, tal que

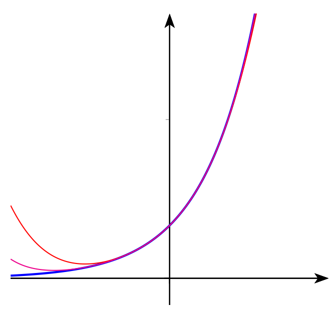
$$\lim_{x\to p}\frac{E_n(x)}{(x-p)^n}=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-p)^n}=0.$$

Procedendo como antes, concluímos que $P_n(x)$ terá a forma

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(p)+f'(p)(x-p)+\tfrac{f''(p)}{2}(x-p)^2+\ldots+\tfrac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n, \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{n}\tfrac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j \end{aligned}$$

o qual é chamado de **Polinômio de Taylor de Ordem n de $f(x)$ ao redor de p.**

Exemplo 68 *O Polinômio de Taylor de Ordem 4 ao redor do zero da função* $f(x)=e^x$ *é* $P_4(x)=1+x+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$.



O Polinômio de Taylor de Ordem 6 ao redor do zero da função $f(x)=e^x$ é $P_6(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}$

Para avaliarmos a precisão com que uma função é aproximada por polinômios de Taylor, vamos definir o erro por

$$E_n(x)=f(x)-P_n(x),$$

onde $f(x)$ é a função dada e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f ao redor de p.

O teorema a seguir nos fornece uma fórmula para o erro.

Teorema 12 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) *Suponhamos que a função f seja $(n+1)$ vezes diferenciável em um intervalo aberto I e sejam $a,b\in I$. Então*

$$f(b)=\sum_{j=0}^{n}\tfrac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j+E_n$$

onde

$$E_n=\tfrac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algum c entre a e b.

De fato: Para $a > b$ defina

$$E_n = f(b) - P_n(b) = f(b) - \sum_{j=0}^{n} \tfrac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j$$

e, para $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= f(b) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} \tfrac{f^{(j)}(x)}{j!}(b-x)^j - E_n \tfrac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}. \text{ Logo,} \\
\phi'(x) &= -\sum_{j=1}^{n} \tfrac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j + \sum_{j=2}^{n} \tfrac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(b-x)^{j-1} + (n+1)E_n \tfrac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Como ϕ é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e $\phi(a) = \phi(b) = 0$, do teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Agora,

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= -\sum_{j=1}^{n} \tfrac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j + \sum_{j=2}^{n} \tfrac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(b-x)^{j-1} + (n+1)E_n \tfrac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \tfrac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j + \sum_{j=1}^{n-1} \tfrac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^{j} + (n+1)E_n \tfrac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= -\tfrac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + (n+1)E_n \tfrac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= \left[-\tfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + E_n \right] \tfrac{(n+1)(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

e, como $\phi'(c) = 0$, E_n tem a expressão desejada. O caso $b < a$ é idêntico.$\square$

Exemplo 69

> *Utilizando Polinômio de Taylor de Ordem 2, calcule um valor aproximado para* $\ln(1,03)$ *e avalie o erro.*

Solução: O Polinômio de Taylor de Ordem 2 de $f(x) = \ln x$ em torno de $p = 1$ é

$$P_2(x) = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2.$$

Logo, $P_2(1,03) = 0,02955$ é uma aproximação para $\ln(1,03)$.

Avaliemos o erro. Como $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, temos $|f'''(x)| \leq 2$, para $x \geq 1$. Da fórmula do erro,

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \tfrac{2}{3!}|x-1|^3, \qquad x \geq 1.$$

Segue que, para $x = 1,03$ o erro cometido na aproximação é

$$|f(1,03) - P_2(1,03)| \leq \tfrac{1}{3}(0,03)^3 = 9(10)^{-6} < 10^{-5}.$$

Exemplo 70

> *O Polinômio de Taylor de Ordem* n *ao redor do zero de* $f(x) = e^x$ *é*
> $P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}.$

Solução: Recorde que

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Como $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e para todo $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo a expressão de $P_n(x)$ é a expressão dada acima.

Exemplo 71 *Calcule um valor aproximado para o número e e avalie o erro.*

Solução: Observe que para $x \in [0,1]$, $0 \leq e^x = f^{(n+1)}(x) \leq e < 3$. Pelo Teorema anterior, o erro é dado por

$$\begin{aligned} |e^1 - P_n(1)| &= \left|e - \left(1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + ... + \tfrac{1}{n!}\right)\right| \\ &= |E_n(1)| = \left|\tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \end{aligned}$$

para algum $c \in [0,1]$. Logo,

$$\left|e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Exemplo 72 *Avalie e com um erro inferior a* 10^{-5}.

Solução: Queremos que $E_n(1) < 10^{-5}$' Logo basta tomar n tal que $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$, ou seja, tal que $(n+1)! > 3(10^5)$. Por tentativas, chega-se a $n = 8$.
Exercício: Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{7,9}$ e avalie o erro. (Entregar dia 13/11)

4 Assíntotas Verticais, Horizontais e Oblíquas

Assíntotas Verticais, Horizontais e Oblíquas

Recordemos a definição de assíntotas verticais

Definição 9 (Assíntota Vertical) *A reta $x = p$ é uma **assíntota vertical** ao gráfico de f se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$$

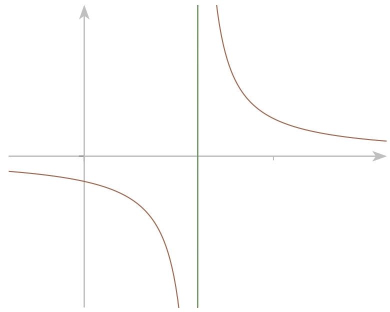
ou

$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty.$$

Exemplo 73 *A reta $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$.*

De fato:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty.$$



Agora, recordemos a definição de assíntotas horizontais

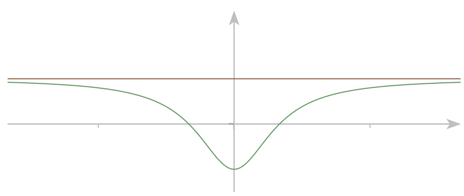
Definição 10 (Assíntota Horizontal) *A reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** ao gráfico de f se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Exemplo 74 *A reta $y = 1$ é assíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.*

De fato: Isto segue do fato que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$



Definição 11 (Assíntota Oblíqua) *Seja f uma função. Se existir uma reta de equação $y = mx + n$ tal que*

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0,$$

então tal reta será dita uma **assíntota** *para f.*

Se $m = 0$, teremos uma **assíntota horizontal** *e, se $m \neq 0$, teremos uma* **assíntota oblíqua**.

Observação: A distância, na vertical, entre os gáficos de $y = f(x)$ e de $y = mx + n$, tende a 0 quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemplo 75 *Determine as assíntotas de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ e esboce o gráfico.*

Solução: Como x^2+1 nunca é 0, não há assíntota vertical. Uma vez que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, não há assíntotas horizontais. Escrevemos

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

então

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x = -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

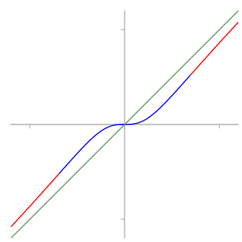
Portanto, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua.

Para esboçar o gráfico calculamos as derivadas

$$f'(x) = \tfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \tfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, \qquad f''(x) = \tfrac{-2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

Logo, $x = 0$ é o único ponto crítico, f é estritamente crescente, e não tem máximos ou mínimos. Para a derivada segunda, temos

- se $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ ou $x \in (0, \sqrt{3}) \Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para cima,
- se $x \in (-\sqrt{3}, 0)$ ou $x \in (\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo.



Procedimento para determinar assíntotas: Primeiro determine m, caso exista, através do limite

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Em seguida, calcule

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx].$$

Se n for finito então $y = mx + n$ será assíntota para $x \to \pm\infty$.

Exemplo 76 *Determine as assíntotas de* $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1}$ *e esboce o gráfico.*

Temos

$$\tfrac{f(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \begin{cases} \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Segue que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$.

Assim $m = 2$ para $x \to +\infty$ e $m = -2$ para $x \to -\infty$.

Determinemos agora o valor de n.

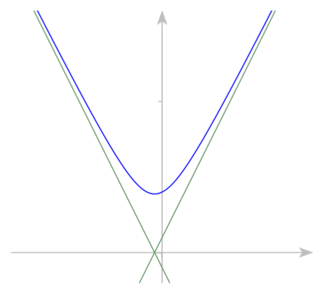
$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x+1}-2x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x} = \frac{1}{4}.$$

Logo, $y = 2x + \frac{1}{4}$ é assíntota para $x \to +\infty$.

Analogamente vemos que $y = -2x - \frac{1}{4}$ é assíntota para $x \to -\infty$.
Para esboçar o gráfico calculamos as derivadas

$$f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}} \qquad f''(x) = \frac{15}{4\sqrt{4x^2+x+1}(4x^2+x+1)}.$$

O único ponto crítico é $x = -\dfrac{1}{8}$ que é um ponto de mínimo local. Como $f'' > 0$, f tem concavidade para cima para todo x.



5 Aplicações

5.1 Esboço de Gráficos de Funções

A lista de passos úteis para esboçar o gráfico de uma função.

1. **Explicite o domínio da função.**
2. Calcule os limites laterais de f nos pontos onde f não é contínua ou não estiver definida.
3. **Calcule os limites de f para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.**
4. Determine as assíntotas oblíquas.
5. **Localize as raízes de f.**
6. Encontre os pontos críticos e determine os intervalos de crescimento e de decrescimento.
7. **Determine os pontos de máximo e mínimo e calcule os valores da função nestes pontos.**
8. Estude a concavidade e destaque os pontos de inflexão.
9. **Esboce a curva utilizando todas as informações anteriores.**

Exercício (Entregar dia 15/11):

(a) Mostre que

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{3x^3 - x^2} - \sqrt[3]{3}\, x + \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \right) = 0.$$

(b) Conclua que a reta de equação $y = \sqrt[3]{3}\, x - \dfrac{\sqrt[3]{3}}{9}$ é uma assíntota de f.

Exercício (Entregar dia 15/11): Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$\begin{array}{ll} (a)\ f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}; & (b)\ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}; \\ (c)\ f(x) = xe^x; & (d)\ f(x) = \ln(4 - x^2); \\ (e)\ f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}; & (f)\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}. \end{array}$$

5.2 Funções como modelos matemáticos: Máximos e Mínimos

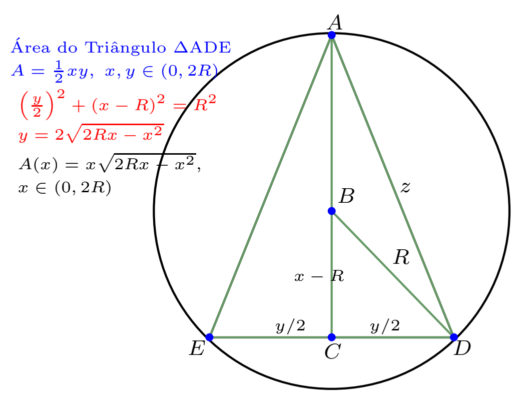
Os métodos estudados para encontrar máximos e mínimos de funções podem ser aplicados para resolver problemas práticos.

O primeiro passo consiste em compreender bem o problema e encontrar um modelo matemático para o mesmo, ou seja, convertê-lo em um problema matemático encontrando a função que dever ser maximizada ou minimizada.

Exemplo 77

Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que esteja inscrito na circunferência de raio R.

Solução: Sejam $x = |AC|$ a altura do triângulo, $y = 2|CD|$ a base e $z = |AD|$ a medida de um dos lados congruentes.



Logo, nosso problema é maximizar a função

$$A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2} \qquad x \in (0, 2R).$$

Calculando a derivada

$$A'(x) = \frac{x(3R-2x)}{\sqrt{2Rx-x^2}},$$

temos que ou $x = \frac{3}{2}R$ é o único candidato a ponto de máximo no intervalo $(0, 2R)$.

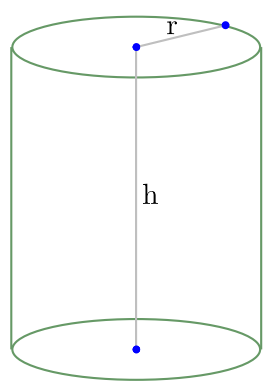
Analisando o sinal da derivada primeira vemos que de fato $x = \frac{3}{2}R$ é um ponto de máximo. Portanto as dimensões são

$$\text{altura } x = \tfrac{3}{2}R, \quad \text{base } y = \sqrt{3}R \;\text{ e }\; z^2 = \tfrac{9}{4}R^2 + \tfrac{3}{4}R^2 = 3R^2.$$

Logo o triângulo é equilátero.

Exemplo 78

Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizam o custo do metal para produzir a lata.



Solução: Seja r o raio da lata e h a altura em cm. Para minimizar o custo do material minimizamos a área da superfície total (topo, base e área lateral) dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Agora, como o volume $V = \pi r^2 h = 1000cm^3$, $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. Substituindo na expressão da área total obtemos

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Logo, nosso problema é minimizar a função

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \; r > 0.$$

Calculamos a derivada

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}.$$

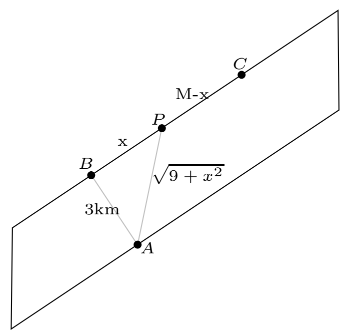
O ponto crítico é $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Como $S'(r) < 0$ se $r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ e $S'(r) > 0$ se $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ concluímos que $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ é um ponto de mínimo de S.

Logo, as dimensões que minimizam a quantidade de material são:

$$\text{raio } r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \quad \text{e altura } h = \frac{1000}{\pi}\left(\frac{\pi}{500}\right)^{2/3} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

Assim, a altura deve ser igual ao diâmetro da lata.

Exemplo 79 *Os pontos A e B estão em lados opostos de um rio reto com 3km de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas Mkm rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por km de cabo é 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja menor para a companhia?*



Seja P um ponto na mesma margem que B e C e entre B e C, de tal forma que o cabo será estendido de A para P e deste para C.
Se x é a distância de B a P, $M-x$ é a distância de P até C, $x \in [0, M]$, k é o custo por km em terra e $\frac{5}{4}k$ é o custo por km sob a água. Então, o custo total é

$$C(x) = \tfrac{5}{4}k\sqrt{9+x^2} + k(M-x), \ 0 \leq x \leq M.$$

Para encontrar o valor mínimo de C, determinamos seus pontos críticos.

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k.$$

Logo $x = 4$ é o único ponto crítico em $[0, \infty)$. $C'(x) < 0$ se $x \in [0, 4]$ e $C'(x) > 0$ se $x > 4$.

Se $M \leq 4$ o mínimo ocorre em $x = M$, já que $C(x)$ será estritamente decrescente em $[0, M]$, e todo o trajeto deve ser feito sob a água.

Por outro lado, se $M > 4$, o mínimo ocorre quando $x = 4$ pois $C'(x) < 0$ se $x < 4$ e $C'(x) > 0$ se $x > 4$.

6 Anti-derivadas ou Primitivas

Anti-derivadas ou Primitivas

Sabemos que a derivada de uma função constante é zero.

Entretanto, uma função pode ter derivada zero em todos os pontos de seu domínio e não ser constante; por exemplo $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é tal que $f'(x) = 0$ em todo ponto de seu domínio, mas não é constante.

No entanto vale o seguinte resultado

Corolário 6

Se f for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será constante.

Prova: Seja $x_0 \in [a, b]$ fixo. Para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, pelo Teorema do Valor Médio existe um $\bar{x}$ pertence ao intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0).$$

Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, temos que $f'(\bar{x}) = 0$, logo

$$f(x) - f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, f é constante. □

Corolário 7

Duas funções $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ diferem por uma constante.

Definição 12

Uma **primitiva** *ou* **anti-derivada** *de f definida em um intervalo I é uma função derivável F definida em I tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.*

Observação: Se F for uma primitiva de f, então F será contínua, pois F é derivável. Duas primitivas de uma função definida em um intervalo diferem por uma constante.

Segue que as primitivas de f são da forma $F(x) + k$, com k constante. Denotamos por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \quad k \text{ constante}$$

à *família* de primitivas ou **integral indefinida de** f.

Exemplo 80 $\displaystyle\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + k, \qquad \int\ dx = \int 1\ dx = x + k.$

Das fórmulas de derivação já vistas seguem as seguintes primitivas

(a) $\displaystyle\int c\,dx = cx + k;$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + k;$

(c) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ \alpha \neq -1;$ $\qquad$ (d) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \text{sen } x + k;$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + k,\ x > 0;$ $\qquad$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + k,\ x < 0;$

(g) $\displaystyle\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + k;$ $\qquad$ (h) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}\, x + k;$

(i) $\displaystyle\int \sec x\,\text{tg}\, x\,dx = \sec x + k;$ $\qquad$ (j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctg}\, x + k;$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arcsen}\, x + k.$

6.1 Mudança de Variável ou Substituição

Sejam f e g tais que $Im(g) \subset D_f$. Suponhamos que F seja uma primitiva de f.

Então $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$, de fato, pela Regra da Cadeia,

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Portanto,

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + k,$$

onde k é uma constante arbitrária.

Se fizermos a *mudança de variável* ou *substituição* $u = g(x)$ temos

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int F'(g(x))g'(x)\ dx = \int [F(g(x))]'\ dx$$
$$= F(g(x)) + k = F(u) + k = \int f(u)\,du,$$

recordando que $F' = f$. Assim, temos a **Regra da Substituição**:

$$\boxed{\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)\ dx}_{du} = \int f(u)\ du = F(u) + k = F(g(x)) + k.}$$

Exemplo 81 *Encontre* $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Solução: Fazemos a substituição $u = 1 + x^2$, então sua diferencial é $du = 2xdx$. Pela Regra da Substituição, se $f(x) = \sqrt{x}$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int f(\underbrace{1+x^2}_{u})\ \underbrace{2x\,dx}_{du} = \int f(u)\,du$$
$$= \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + k.$$

Exemplo 82 $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$ *e* $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + k;$

Solução: Note que, se $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \sec x + \operatorname{tg} x$, então e $g'(x) = \sec x(\sec x + \operatorname{tg} x)$ e $F(x) = \ln|x|$ é uma primitiva de f e

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x}\sec x(\sec x + \operatorname{tg} x)dx\\ &= \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + k = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k\end{aligned}$$

Analogamente, se $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$, $g(x) = \cos x$ e $g'(x) = -\operatorname{sen} x$,

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen x}}{\cos x}\,dx = -\int f(g(x))g'(x)dx = -F(g(x)) + k = -\ln|\cos x| + k$$

Exemplo 83 *Encontre* $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$.

Solução: Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$, então $du = 4x^3\,dx$ e

$$\int \frac{1}{4}\cos(\underbrace{x^4+2}_{u})\ \underbrace{4x^3\,dx}_{du} = \int \frac{1}{4}\cos(u)\,du = \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + k\ = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4+2) + k.$$

Exemplo 84 *Calcule* $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

Solução: Se fizermos $u = x^2$, teremos $du = 2x\,dx$, assim,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(u) + k = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + k.$$

6.2 Integração por Partes

Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Então, se $x \in (a, b)$,

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou seja,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Como $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$,

- encontrar uma primitiva para $f'(x)g(x)$, é equivalente a
- encontrar uma primitiva para $f(x)g'(x)$

e vale a **fórmula de integração por partes**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx\,.}$$

Notação alternativa. Tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx$$

e podemos re-escrever a fórmula de integração por partes como

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.}$$

Exemplo 85 *Calcule* $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Solução: Suponha $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então, $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. Assim

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + k.$$

Exemplo 86 *Calcule* $\int \ln x\,dx$.

Solução:

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{x}\,dx}_{du} = x\ln x - x + k.$$

Exemplo 87 *Calcule* $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{1\,dx}_{dv} &= (\operatorname{arctg} x)\,x - \int x \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= (\operatorname{arctg} x)\,x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{u}} \underbrace{2x\,dx}_{du} \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k.
\end{aligned}$$

Exemplo 88 *Calcule* $\int x^2 e^x\,dx$.

Solução:

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g}\,dx.$$

Integrando por partes mais uma vez, obtemos

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + k.$$

Portanto,

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k.$$