Material para a prova do dia 04/10/2023

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

02 de Outubro de 2023

1 Os Números

Faremos uma apresentação sucinta do conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e reais e suas construções para servir como recordação de conceitos vistos no ensino médio e algumas formalizações que ajudam na compreensão dos conceitos que serão desenvolvidos posteriormente.

Escreveremos

$$\boxed{\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}=\text{Conjunto dos números naturais,}}$$

$$\boxed{\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}=\text{Conjunto dos números inteiros,}}$$

$$\boxed{\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,;\,a,b\in\mathbb{Z}\,,\,b>0\right\}=\text{Conjunto dos números racionais.}}$$

1.1 Os Números Naturais

Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos e são caracterizados pelos **Axiomas de Peano**:

1. Todo número natural tem um único sucessor.
2. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
3. Existe um único natural, chamado **zero** (denotado por 0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4. Seja $X\subset\mathbb{N}$ tal que $0\in X$ e, se $n\in X$, seu sucessor (denotado por $n+1$) também pertence a X. Então $X=\mathbb{N}$.

A adição é definida por: $n+0=n$, $n\in\mathbb{N}$, e $n+(p+1)=(n+p)+1$, $n,p\in\mathbb{N}$, (sabendo somar p sabemos somar $p+1$).

A multiplicação é definida por: $n\cdot 0=0$ e $n\cdot(p+1)=n\cdot p+n$, $n,p\in\mathbb{N}$.

Prova por Indução

O quarto Axioma de Peano é conhecido como axioma de indução e é frequentemente utilizado em demonstrações matemáticas.

Prova por Indução: Dado que uma proposição $P(n)$, definida para todo $n\in\mathbb{N}$, pode ser verdadeira ou falsa, para verificar que a mesma é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$ basta verificar que:

- $P(0)$ é verdadeira e
- Se $n\in\mathbb{N}$ é tal que $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é.

De fato: Se X denota o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira, então $0\in X$ e, se $n\in X$, então $n+1\in X$. Logo $X=\mathbb{N}$ pelo quarto Axioma de Peano.

Exercícios (Para entregar dia 16/08/2023):

(1) Mostre que $n + 0 = 0 + n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Mostre que $n \cdot 1 = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que a adição e multiplicação definidas acima são comutativas e associativas.

Vamos provar a comutatividade e associatividade da adição:

Lema 1 (1) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + n = n + 1$.*

Prova: Note que o resultado é válido para $n = 0$. Suponha que o resultado seja válido para $n = k$ e mostremos que vale também para $n = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h) e da definição de adição (d),

$$1 + (k+1) \overset{(d)}{=} (1+k) + 1 \overset{(h)}{=} (k+1) + 1$$

Segue que o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$.$\square$

Agora motremos a associatividade.

Lema 2 (Associatividade) *Para todo $n, p, r \in \mathbb{N}$, $(n + p) + r = n + (p + r)$.*

Prova: Note que o resultado é válido trivialmente para $r = 0$ e para $r = 1$. Suponha que o resultado seja válido para $r = k$ e mostremos que vale também para $r = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h) e da definição de adição (d),

$$\begin{aligned} n + (p + (k+1)) &\overset{(d)}{=} n + ((p+k) + 1) \overset{(d)}{=} (n + (p+k)) + 1 \\ &\overset{(h)}{=} ((n+p) + k) + 1 \overset{(d)}{=} (n+p) + (k+1). \end{aligned}$$

Segue que o resultado vale para todo $r \in \mathbb{N}$.$\square$

Por fim provamos a comutatividade

Lema 3 (Comutatividade) *Para todo $n, p \in \mathbb{N}$, $n + p = p + n$.*

Prova: Note que o resultado é válido trivialmente para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $p = 0$ ou $p = 1$. Suponha que o resultado seja válido para $p = k$ e mostremos que vale também para $p = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h), da definição de adição (d), do Lema (1) (l1) e do Lema (Associatividade) (la),

$$\begin{aligned} n + (k+1) &\overset{(d)}{=} (n+k) + 1 \overset{(h)}{=} (k+n) + 1 \\ &\overset{(l1)}{=} 1 + (k+n) \overset{(la)}{=} (1+k) + n \overset{(l1)}{=} (k+1) + n. \end{aligned}$$

Segue que o resultado vale para todo $p \in \mathbb{N}$.$\square$

Ordem

De maneira natural definimos uma ordem em $\mathbb{N}$. Diremos que $m \leqslant n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Esta relação tem as seguinte propriedades:

- O_1: *Reflexiva:* Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant n$.
- O_2: *Antisimétrica:* Se $m \leqslant n$ e $n \leqslant m$, então $m = n$.

- O_3: *Transitiva:* Se $m \leqslant n$ e $n \leqslant p$, então $m \leqslant p$.
- O_4: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que ou $m \leqslant n$ ou $n \leqslant m$.
- O_5: Se $m \leqslant n$ e $p \in \mathbb{N}$, então $m + p \leqslant n + p$ e $mp \leqslant np$.

Mostre as propriedades acima (Para entregar dia 16/08/2023).

Exercício 1 (Mostre que:)

- *Todo subjconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem um menor elemento.*

- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Todo número natural não nulo é produto de fatores primos.*

  De fato: *Sejam $S = \{n \in \mathbb{N}^* : n$ é produto de fatores primos$\}$ e $A = \{n \in \mathbb{N}^* : n \notin S\}$. Note que o produto de elementos de S está em S. Se $A \neq \varnothing$, então A tem um primeiro elemento a. Como $a \notin S$ devemos ter que $a = m \cdot n$ com $m, n \in \mathbb{N}^*$ distintos de 1 (caso contrário a seria primo). Note que $n < a$ e $m < a$ e ao menos um deles pertence a A. Isto é uma contradição pois a é o menor elemento de A. Segue que $A = \varnothing$.*

1.2 Os Números Inteiros

Os Números Inteiros

A maneira usual de fazer a construção dos inteiros a partir dos naturais consiste em tomar os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação $(a, b) \sim (c, d)$ se $a + d = b + c$.

Desta forma, podemos representar $\mathbb{N} = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), \cdots\}$ e $-\mathbb{N}^* = \{\cdots, (0,3), (0,2), (0,1)\}$.

Tomar o sucessor significa somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar $(1, n)$ com $(0, n-1)$.

1.3 Números Racionais

Os Números Racionais

Os números racionais são construídos tomando-se o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais $ad = bc$. Representamos um par (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{a}{b}$.

A **soma** e o **produto** em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações "$+$" e "$\cdot$" satisfaz as propriedades de um corpo. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes:

Propriedades da Adição em $\mathbb{Q}$

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Q}$

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) (**distributiva da multiplicação**) $x(y + z) = xy + xz$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo $\mathbb{Q}$. Vamos enunciar algumas e demonstrar outras a seguir.

Proposição 1 (Lei do Cancelamento) *Em $\mathbb{Q}$, vale*

$$\boxed{x + z = y + z \implies x = y}$$

e, se $z \neq 0$

$$\boxed{x \cdot z = y \cdot z \implies x = y\,.}$$

Prova:

$$\begin{aligned} x &= x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) \\ &= (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y. \square \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= x.1 = x.(z.\tfrac{1}{z}) = (x.z).(\tfrac{1}{z}) \\ &= (y.z).(\tfrac{1}{z}) = y.(z.(\tfrac{1}{z})) = y.1 = y. \square \end{aligned}$$

Proposição 2 *O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.*

As seguintes proposições seguem da Lei do Cancelamento.

Proposição 3 *O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.*

Proposição 4 *Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.*

Proposição 5 *Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.*

1.4 Ordem

Definição 1 (Ordem) *Diremos que*

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-negativo}, \ \textit{se } a \cdot b \in \mathbb{N} \\ \textbf{positivo}, \ \textit{se } a \cdot b \in \mathbb{N} \textit{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-positivo}, \ \textit{se } \dfrac{a}{b} \textit{ não for positivo} \\ \textbf{negativo}, \ \textit{se } \dfrac{a}{b} \textit{ não for não-negativo.} \end{cases}$$

Definição 2 *Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Diremos que x é* **menor do que** *y e escrevemos $x < y$, se existir $t \in \mathbb{Q}$ positivo tal que*

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, poderemos dizer que y é **maior do que** *x e escrevemos $y > x$. Em particular, teremos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.*

Se $x < y$ ou $x = y$, então escreveremos $x \leqslant y$ e lemos "*x é menor ou igual a y*".

Da mesma forma, se $y > x$ ou $y = x$, então escreveremos $y \geqslant x$ e, neste caso, lemos "*y é maior ou igual a x*".

Escreveremos $x \geqslant 0$ se x for não-negativo e $x \leqslant 0$ se x for não-positivo.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, isto é, também valem as propriedades seguintes:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y \ \text{ e } \ y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y\,,\ y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y \ \text{ e } \ z \geqslant 0 \implies xz \leqslant yz$.

Proposição 6 *Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado $\mathbb{Q}$, valem*

(a) $\left.\begin{array}{l} x \leqslant y \\ z \leqslant w \end{array}\right\} \implies x + z \leqslant y + w.$

(b) $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} = xz \leqslant yw.$

Prova: Vamos provar o ítem (b).

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} \overset{(OM)}{=} \left.\begin{array}{l} xz \leqslant yz \\ yz \leqslant yw \end{array}\right\} \overset{(O3)}{=} xz \leqslant yw. \square$$

Outras propriedades:

1.4.1 Outras propriedades:

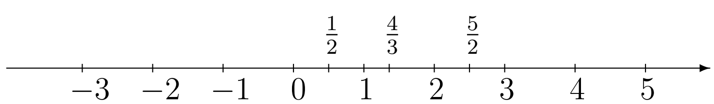
Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$. Então valem

- $x < y \iff x + z < y + z$;
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$;
- $z > 0 \iff -z < 0$;
- Se $z > 0$, então $x < y \iff xz < yz$;
- Se $z < 0$, então $x < y \iff xz > yz$;
- $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < y \\ 0 \leqslant z < w \end{array}\right\} = xz < yw$;
- $0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;
- (**tricotomia**) $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$;
- (**anulamento do produto**) $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

1.5 $\mathbb{Q}$ não é completo

$\mathbb{Q}$ não é completo

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real.

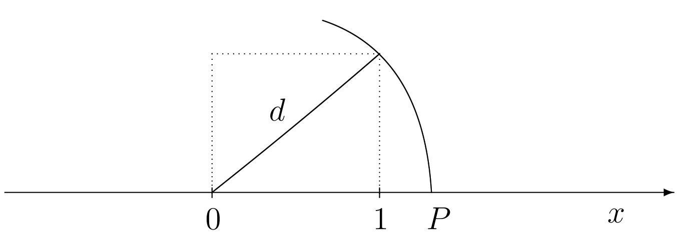


Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Nem todo ponto da reta real é racional.

Considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Seja P a intersecção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d.



Mostraremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição 7 *Seja $a \in \mathbb{Z}$. Temos*

(a) Se a for ímpar, então a^2 é ímpar;

(b) Se a^2 for par, então a é par.

Prova:

(a) Se a for ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k+1$. Daí segue que

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\ell}) + 1 = 2\ell + 1,$$

onde $\ell = 2k^2 + 2k$, e portanto a^2 também será ímpar.

(b) Suponha, por redução ao absurdo, que a não é par. Logo a é ímpar. Então, pela Proposição 7 (a), a^2 também é ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto a é par.$\square$

Proposição 8 *A equação $x^2 = 2$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.*

Prova: Suponhamos, por redução ao absurdo, que $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{Q}$. Então podemos tomar $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Logo $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$, ou seja, $a^2 = 2b^2$ e portanto a^2 é par. Segue da Proposição 7 (b) que a também é par. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.

Mas

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 2b^2 \\ a = 2k \end{array}\right\} \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2 .$$

Portanto b^2 é par e, pela Proposição 7 (b), b também é par. Mas isto implica que $\dfrac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por 2) o que é uma contradição. Logo não existe $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$.$\square$

Exercício 2 *Sejam $p_1, p_2, \cdots p_n$ números primos distintos. Mostre que a equação $x^2 = p_1 p_2 \cdots p_n$ não admite solução racional.*

1.6 Corpos

Corpos

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado.

Estaremos também interessados no corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e no corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Abstratamente, um corpo é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ onde estão definidas duas operações binárias

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

que gozam das seguintes propriedades

Propriedades de um Corpo - Adição

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{F}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{F}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{F}$, existe $y \in \mathbb{F}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades de um Corpo - Multiplicação

(M1) (**associativa**) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{F}$;

(M2) (**comutativa**) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{F}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{F}$, tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{F}$, $x \neq 0$, existe $y \in \mathbb{F}$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedades de um Corpo - Distributiva

(D) (**distributiva da multiplicação**) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{F}$.

Se no corpo $\mathbb{F}$ está definida uma relação de ordem $\leqslant$, a quádrupla $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leqslant)$ é um corpo ordenado se além das propriedades anteriores, também valem as propriedades:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y$ e $z \geqslant 0 \implies x \cdot z \leqslant y \cdot z$.

Definição 3 • *Diremos que um subconjunto A de um corpo ordenado $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leqslant)$ é limitado superiormente se existe $L \in \mathbb{F}$ (chamado limitante superior de A) tal que $a \leqslant L$ para todo $a \in A$.*

- *Se $A \subset \mathbb{F}$ for limitado superiormente, diremos que um número* $\sup(A) \in \mathbb{F}$ *é o supremo de A, se for o menor limitante superior de A; ou seja, se $a \leqslant \sup(A)$ para todo $a \in A$ e, se $\mathbb{F} \ni f < \sup(A)$, existe $a \in A$ tal que $f < a$.*

- *Um corpo ordenado para o qual todo subconjunto limitado superiormente possui supremo é chamado um corpo ordenado completo.*

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo; ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado que não é completo.

1.7 Números Reais

Construção dos Números Reais - Cortes de Dedekind

- O que são os números reais?

- Como definir adição, multiplicação de números reais?

- O conjunto dos números reais com a adição e multiplicação é um corpo?

- Como definir relação de ordem para números reais?

- O corpo ordenado dos números reais é completo?

A idéia que queremos usar para construir (a partir de $\mathbb{Q}$) o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é:

"O conjuntos dos números reais preenche toda a reta real."

Os elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ a esquerda de um ponto da reta real e serão chamados cortes.

Definição 4 *Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades*

- *$\alpha \neq \varnothing$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,*

- *Se $p \in \alpha$ e $\mathbb{Q} \ni q < p$, então $q \in \alpha$ (todos os racionais a esquerda de um elemento de α estão em α) e*

- *Se $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ com $p < r$ (α não tem um maior elemento).*

Observação 1 *Os cortes foram inventados em 1872 pelo matemático alemão chamado Julius Wilhelm Richard Dedekind que viveu de 06.10.1831 a 12.02.1916)*

Exemplo 1

- *Se $q \in \mathbb{Q}$ definimos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. Então q^* é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são racionais serão chamados irracionais.*

- *$\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leqslant q$ com $0 < q$ e $q^2 < 2\}$ é irracional.*

Observação 2 *Note que:*

- *Se α é um corte, $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.*

- *Se α é um corte, $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.*

Definição 5 *Diremos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \subsetneq \beta$*

Proposição 9 *Se α, β, γ são cortes*

- *$\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ implica que $\alpha < \gamma$.*
- *Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$.*
- *Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem supremo.*
- *Entre dois números reais distintos existe um racional.*

Definição 6
- *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$.*
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Proposição 10 *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. O corte β assim definido é denotado por $-\alpha$.*

Prova: É fácil ver que $-\alpha = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha$ para algum $r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$.$\square$

Definição 7
- *Se α, β são cortes,*

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \{p \in \mathbb{Q} : \exists\ 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \alpha \text{ tais que } p \leqslant rs\},\ \alpha, \beta > 0^* \\ \alpha \cdot 0^* = 0^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (-\alpha)(-\beta) \text{ se } \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] \text{ se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] \text{ se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

- $1^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.
- *Se $\alpha > 0$, $\alpha^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leqslant \frac{1}{q}$ e existe $r > 0$ tal que $q - r \notin \alpha\}$ e, se $\alpha < 0$, $\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$*

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e um número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema 1 *A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso $\mathbb{R}$ é completo.*

Exercício 3 (Entregar) *Mostre as propriedades (A1), (A2), (M1), (M2), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM)*

2 Equações e Inequações

Equações e Inequações

Para resolver uma equação ou inequação em x é necessário encontrar o conjunto dos números reais x que satisfazem a equação ou inequação.

Exercício 4 (Entregar) *Resolva a inequação $-3(4-x) \leqslant 12$.*

Resolução: Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\frac{1}{3}$, temos $-4+x \leqslant 4$. Somando 4 a ambos os lados resulta $x \leqslant 8$. As operações realizadas podem ser invertidas e $-3(4-x) \leqslant 12$ se, e somente se, $x \leqslant 8$.$\square$

Exercício 5 (Entregar) *Resolva a inequação $\pi x + 1729 < 4x + 1$.*

Resolução: Vamos começar adicionando o oposto de $1729 + 4x$ dos dois lados da inequação. Assim

$$\pi x + 1729 - 1729 - 4x < 4x + 1 - 1729 - 4x$$

ou seja $\pi x - 4x < 1 - 1729$ que também pode ser escrita como

$$(\pi - 4)x < -1728.$$

Agora multiplicaremos a última inequação pelo inverso de $\pi - 4$, que é negativo. Obtemos, então, $x > -\frac{1728}{\pi-4}$ ou seja $x > \frac{1728}{4-\pi}$.$\square$

Exercício 6 (Entregar) *Qual é o sinal de $\dfrac{x+1}{1-x}$ em função de x?*

Resolução: O numerador é positivo quando $x > -1$, negativo quando $x < -1$ e zero quando $x = -1$. O denominador é positivo quando $x < 1$, negativo quando $x > 1$ e zero quando $x = 1$. Portanto a fração será positiva quando $-1 < x < 1$, negativa quando $x < -1$ ou $x > 1$ e zero quando $x = -1$.$\square$

3 Topologia da Reta

3.1 Módulo de um Número Real

Módulo de um Número Real

Definição 8 *Seja $x \in \mathbb{R}$. O* **módulo** *ou valor absoluto de x é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Segue da definição acima que $|x| \geqslant 0$ e $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2 *Mostre que $|x|^2 = x^2$, ou seja, o quadrado de um número real não muda quando trocamos o seu sinal.*

Exemplo 3 *A equação $|x| = r$, com $r \geqslant 0$, tem como soluções os elementos do conjunto $\{r, -r\}$.*

O resultado do Exemplo 3 pode ser generalizado como no exemplo seguinte.

Exemplo 4 *A equação $|ax - b| = r$, com $r \geqslant 0$ e $a \neq 0$, tem como soluções os elementos do conjunto $\left\{\dfrac{b+r}{a}, \dfrac{b-r}{a}\right\}$.*

Exemplo 5 *Resolva a equação $|2x + 1| = 3$.*

Resolução: Temos $2x + 1 = 3$ ou $2x + 1 = -3$, o que nos leva à solução $x = 1$ ou $x = -2$.$\square$

3.2 Distância

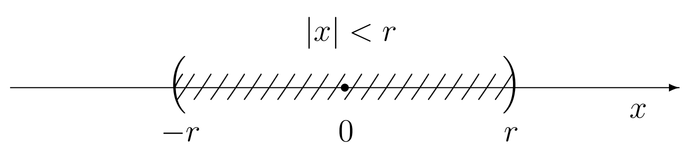
Distância

Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. Então a **distância** de P a Q (ou de x a y) é dada por $|x - y|$. Assim $|x - y|$ é a **medida** do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0.

O próximo exemplo diz que a distância de x a 0 é menor do que r, com $r > 0$, se e somente se x estiver entre $-r$ e r.

Exemplo 6 *Seja com $r > 0$. Então* $\quad |x| < r \quad \Longleftrightarrow \quad -r < x < r$.

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



O intervalo $(-r, r)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}$ que distam de 0 menos que r (bola de raio r em torno de 0).

Agora, vamos generalizar o Exemplo acima.

Exemplo 7 *Resolva a inequação $|ax - b| < r$ na variável x, com $r > 0$ e $a \neq 0$.*

Resolução: De forma similar ao exemplo anterior, $-r < ax - b < r$. Somando b aos termos da inequação obtemos

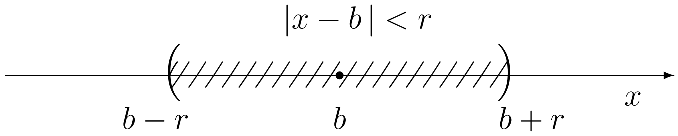
$$b - r < ax < b + r.$$

Logo,

- $a > 0 \implies \dfrac{b-r}{a} < x < \dfrac{b+r}{a}$;

- $a < 0 \implies \dfrac{b+r}{a} < x < \dfrac{b-r}{a}$.$\square$

No caso particular $a = 1$, se a distância de x a b for menor do que r, isto é, $|x-b| < r$, $r > 0$, então x estará entre $b-r$ e $b+r$. Geometricamente,



Exemplo 8 *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale*

$$\boxed{|\,xy| = |\,x|\ |\,y|\,.}$$

Exemplo 9 (Desigualdade triangular) *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale*

$$\boxed{|\,x+y| \leqslant |\,x| + |\,y|\,.}$$

Resolução: Somando $-|\,x| \leqslant x \leqslant |\,x|$ e $-|\,y| \leqslant y \leq |\,y|$ obtemos $-|\,x| - |\,y| \leqslant x+y \leqslant |\,x| + |\,y|$. $\square$

Exercício 7 *Descreva o valor de $|\,x+1| + |\,x-1|$ sem utilizar o módulo.*

- Se $x \geqslant 1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = x+1 \\ |\,x-1| = x-1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1| + |\,x-1| = x+1+x-1 = 2x$.
- Se $-1 \leqslant x < 1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = x+1 \\ |\,x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1| + |\,x-1| = x+1-x+1 = 2$.
- Se $x < -1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = -x-1 \\ |\,x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1| + |\,x-1| = -x-1-x+1 = -2x$.

Logo $|\,x+1| + |\,x-1| = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 1 \\ 2, & -1 \leqslant x < 1 \\ -2x, & x < -1. \end{cases}$

Exemplo 10 *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale*

$$\boxed{|\,xy| = |\,x|\ |\,y|\,.}$$

Exemplo 11 (Desigualdade triangular) *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale*

$$\boxed{|\,x+y| \leqslant |\,x| + |\,y|\,.}$$

Resolução: Somando $-|\,x| \leqslant x \leqslant |\,x|$ e $-|\,y| \leqslant y \leq |\,y|$ obtemos $-|\,x| - |\,y| \leqslant x+y \leqslant |\,x| + |\,y|$. $\square$

Exercício 8 *Descreva o valor de $|\,x+1| + |\,x-1|$ sem utilizar o módulo.*

- Se $x \geqslant 1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = x+1 \\ |\,x-1| = x-1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1| + |\,x-1| = x+1+x-1 = 2x$.

- Se $-1 \leqslant x < 1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = x+1 \\ |\,x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1|+|\,x-1| = x+1-x+1 = 2$.

- Se $x < -1$, então $\begin{cases} |\,x+1| = -x-1 \\ |\,x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto, $|\,x+1|+|\,x-1| = -x-1-x+1 = -2x$.

Logo $|\,x+1| + |\,x-1| = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 1 \\ 2, & -1 \leqslant x < 1 \\ -2x, & x < -1. \end{cases}$

Definição 9 *Um **intervalo** em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:*

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ ***Intervalo fechado***,
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ***Intervalo aberto***,
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$,
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$,
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
- $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$,
- $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Exemplo 12 $\{x \in \mathbb{R} : 2x-3 < x+1\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\} = (-\infty,4)$.

3.3 Limitação de Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Limitação de Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definição 10 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito* **limitado**, *se existir $L > 0$ tal que $|\,x| \leqslant L$, para todo $x \in A$.*

Proposição 11 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, existir $L > 0$ tal que $A \subset [-L,L]$.*

Exemplo 13

(a) $A = [0,1]$ *é limitado*

(b) $\mathbb{N}$ *não é limitado (será mostrado mais tarde)*

(c) $B = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *é limitado*

(d) $C = \left\{ \dfrac{2n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *é limitado.*

Definição 11 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito* **ilimitado**, *se ele não for limitado.*

Proposição 12 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será ilimitado se, e somente se, para todo $L > 0$, existir $x \in A$ tal que $|x| > L$.*

Limitante Superior e Inferior

Definição 12 *Seja $A \subset \mathbb{R}$.*

- *A será dito* **limitado superiormente**, *se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant L$, para todo $x \in A$.*

  Neste caso, L será chamado **limitante superior** *de A.*

- *A será dito* **limitado inferiormente**, *se existir ℓ tal que $x \geqslant \ell$, para todo $x \in A$.*

  Neste caso, ℓ será chamado **limitante inferior** *de A.*

Segundo a definição acima, podemos notar que $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, A for limitado superiormente e inferiormente.

Supremo

Definição 13 (Supremo) *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\bar{L} \in \mathbb{R}$ é o supremo de A (escreveremos $\bar{L} = \sup A$) se for um limitante superior de A e para qualquer limitante superior L de A, tivermos $\bar{L} \leqslant L$.*

- Quando $\bar{L} = \sup A \in A$, $\bar{L}$ será chamado **máximo** de A e escreveremos $\bar{L} = \max A$.
- Vimos que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem **supremo**.

Ínfimo

Definição 14 (Ínfimo) *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\bar{\ell} \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A (escreveremos $\bar{\ell} = \inf A$) se for um limitante inferior de A e para qualquer limitante inferior ℓ de A, tivermos $\bar{\ell} \geqslant \ell$.*

- Quando $\bar{\ell} = \inf A \in A$, $\bar{\ell}$ será chamado **mínimo** de A e escreveremos $\bar{\ell} = \min A$.
- Veremos que todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ tem **ínfimo**.

Proposição 13 (1) *Dado $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $L = \sup A$ se, e só se,*

(a) *L é limitante superior de A e,*

(b) *para todo $\varepsilon > 0$, existir $a \in A$ tal que $a > L - \varepsilon$.*

Analogamente temos

Proposição 14 *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \emptyset$. Então $L = \inf A$ se, e somente se, valem as seguintes propriedades*

(a) L é limitante inferior de A.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $a < L + \varepsilon$.

Teorema 2 (Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$) *Seja $x \neq 0$. Então o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado.*

Prova: Se $x > 0$. Suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja $L = \sup A$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L - x < mx$ e $L = \sup A < (m+1)x$, o que é uma contradição.

A prova do caso $x < 0$ é feita de modo análogo. □

Exemplo 14 *(a) Considere $A = [0, 1)$. Então -2 e 0 são limitantes inferiores de A enquanto 1, π e 101 são limitantes superiores de A.*

(b) $\mathbb{N}$ não é limitado (porque?) mas é limitado inferiormente por 0, pois $0 \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

(c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant \sqrt{2}\}$ não é limitado (porque?), mas é limitado superiormente por L, onde $L \geqslant \sqrt{2}$.

Corolário 1 (1) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \varepsilon \quad e \quad 2^{-n} < \varepsilon.$$

Já sabemos (por construção) que, entre dois números reais distintos existe um número racional. Provemos que entre dois números reais distintos existe um número irracional.

De fato: Sejam a e b reais distintos. Se $a < b$ e $\epsilon = b - a > 0$, do Corolário (1), escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \epsilon$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.
- Se $a \in \mathbb{I}$, $r = a + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.

Assim, entre dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

Corolário 2 *Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.*

Corolário 3 *Se $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$, então $\inf A = 0$.*

Exemplo 15 *(a) Seja $A = (0, 1]$. Então $0 = \inf A$ e $1 = \max A$.*

(b) $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leqslant q$ *com* $0 < q$ *e* $q^2 < 2\}$ *é um corte.*

(c) *Seja* $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. *Então* $\sqrt{2} = \sup C$ *e* $-\sqrt{2} = \inf C$. *Note que* $-\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$ *não pertencem a* C.

Vamos provar que $\sqrt{2}$ é um corte. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ e $r^2 < 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[2r+1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ e $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. Todas as demais propriedades de corte estão satisfeitas trivialmente.

Vamos provar que $\sqrt{2} = \sup C$. Como todos os elementos x de C são racionais que satisfazem $x^2 < 2$, $\sqrt{2}$ é um limitante superior para C. Agora, se $0 < L < \sqrt{2}$, existe um racional $r \in (L, \sqrt{2})$ e $L^2 < r^2 < 2$. Logo $r \in C$, e L não é limitante superior para C e prova o resultado.

Proposição 15 *Se* $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ *for limitado inferiormente (superiormente), então* $-A = \{-x : x \in A\}$ *será limitado superiormente (inferiormente) e* $\inf A = -\sup(-A)$ $(\sup A = -\inf(-A))$.

De fato: Se A for limitado inferiormente,

- $\inf(A) \leqslant x$, para todo $x \in A$ e, dado $\epsilon > 0$, existirá $a \in A$ tal que $a < \inf(A) + \epsilon$, ou (trocando o sinal),
- $-\inf(A) \geqslant -x$, para todo $-x \in -A$ e, dado $\epsilon > 0$, existirá $b = -a \in -A$ tal que $b = -a > -\inf(A) - \epsilon$.

Agora, da Proposição (1), $-A$ será limitado superiormente e $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Deixaremos, como exercício, a prova a outra afirmativa.

Corolário 4 *Todo* $A \neq \varnothing$ *e limitado inferiormente de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo.*

Corolário 5 *Todo subconjunto limitado e não vazio de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo e supremo.*

3.4 Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição 15 (Vizinhança) *Uma* **vizinhança** *de* $a \in \mathbb{R}$ *é qualquer intervalo aberto da reta contendo* a *.*

Exemplo 16 (δ-vizinhança) *Se* $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta\,,\, a + \delta)$ *é uma vizinhança de* $a \in \mathbb{R}$ *e é chamada* $\delta-$*vizinhança.*

Definição 16 (Ponto de Acumulação) *Sejam* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$. *Se, para todo* $\delta > 0$, *existe* $a \in V_\delta(b) \cap A$, $a \neq b$, *então* b *será dito* **ponto de acumulação** *de* A.

Exemplo 17 (a) *O conjunto dos pontos de acumulação de* (a, b) *é* $[a, b]$.

(b) *Seja* $B = \mathbb{Z}$. *Então* B *não tem pontos de acumulação.*

(c) Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ não têm pontos de acumulação.

d) O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{R}$.

Definição 17 (Ponto isolado) *Seja $B \subset \mathbb{R}$. Um ponto $b \in B$ será dito um* **ponto isolado** *de B, se existir $\delta > 0$ tal que $V_\delta(b)$ não contém pontos de B distintos de b.*

Exemplo 18 *(a) Seja $B = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. Então o conjunto dos pontos de acumulação de B é $\{0\}$ e o conjunto dos pontos isolados de B é o próprio conjunto B.*

(b) O conjunto $\mathbb{Z}$ possui apenas pontos isolados.

Observação:

- Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo $\mathbb{Z}$).
- Todo conjunto infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação (veja proposição a seguir).

Proposição 16 (Bolzano-Weierstrass) *Se A é um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Prova: Se $A \subset [-L, L]$ e $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ escolhidos de modo que: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = -a_0 = L$, $b_n - a_n = 2L/2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $[a_n, b_n]$ contém infinitos elementos de A. Seja $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n, b_n] \subset [a_j, b_j]$, $j \leqslant n$ e $[a_j, b_j] \subset [a_n, b_n]$, $j > n$. Em qualquer dos casos $a_n \leqslant b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $a \leqslant b_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Segue que $a_n \leqslant a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in \bigcap_{n \geqslant 1} [a_n, b_n]$.

Dado $\delta > 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $2L/2^n < \delta$. Seque que $a \in [a_n, b_n] \subset (a-\delta, a+\delta) = V_\delta(a)$ e a é ponto de acumulação de A.$\square$

4 Funções - Noções Gerais

Funções - Noções Gerais

O principal objetivo do cálculo é o estudo das funções. As funções surgem para expressar uma quantidade em termos de outra.

Por exemplo, a área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona r com A é dada por $A = \pi r^2$, neste caso diremos que A é uma função de r.

Outros exemplos são, a população P de uma determinada espécie que depende do tempo t, o custo C de envio de um pacote pelo correio que depende de seu peso w.

Definição 18 *Dados dois conjuntos* $A, B \neq \emptyset$, *uma* **função** f *de* A *em* B *(escreveremos* $f : A \to B$ *) é uma lei ou regra que a cada* $x \in A$, *associa um único elemento* $f(x) \in B$. *Adotaremos a seguinte terminologia*

- A *é chamado* **domínio** *de* f *;*
- B *é chamado* **contra-domínio** *de* f *;*
- *o conjunto*
$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in B\,;\, y = f(x),\ x \in A\}\,.$$
é chamado **imagem** *de* f *.*

Notações alternativas. Seja $f : A \to B$ uma função. Podemos denotar

- $D_f = D(f) = A$ para o domínio de f;
- $f(D_f) := \operatorname{Im}(f)$ para a imagem de f.

Também podemos descrever a ação de f ponto a ponto como

$$A \ni x \ \mapsto\ f(x) \in B\,.$$

Convenção: Se o domínio da função não é dado explicitamente, então, por convenção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais x para os quais a regra $f(x)$ esteja definida.

Definição 19 *Sejam* $f : A \to B$ *uma função e* $A, B \subset \mathbb{R}$. *O conjunto*

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

é chamado **gráfico** *de* f *.*

Decorre da definição que $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelos pontos da forma $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f.

Observe que, por exemplo, uma circunferência não representa o gráfico de uma função.

Exemplo 19 *Considere as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por:*

(a) **função constante**: $f(x) = k$;

(b) **função identidade**: $f(x) = x$;

(c) **função linear**: $f(x) = ax$;

(d) **função afim**: $f(x) = ax + b$;

(e) **função polinomial**:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i; \text{ em particular,}$$

se $n = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ *é uma* **função quadrática**,

se $n = 3$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *é uma* **função cúbica**;

(f) **função racional**: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, *onde* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são funções polinomiais. Note que* $D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\, q(x) \neq 0\}$;

1 *(g)* **função potência**: $f(x) = x^a$, *onde* a *é uma constante; em particular,* *se* $a = \dfrac{1}{n}$, $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, *onde* n *é um inteiro positivo, é uma* **função raiz**; *temos que* $D_f = [0, +\infty)$ *se* n *é par e* $D_f = \mathbb{R}$ *se* n *é ímpar;*

(h) **função algébrica**: *função construída como solução de uma equação polinomial da forma*

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_n(x) = 0,$$

($p_0, p_1, \cdots, p_n$ *polinômios) como, por exemplo,*

$$f(x) = \sqrt{x^2+1},\ D_f = \mathbb{R},$$
$$g(x) = \frac{(x-4)}{x^4 + \sqrt{2x}}\sqrt[3]{x+1},\ D_g = (0, +\infty).$$

Definição 20 *Sejam* $f : A \to B$ *e* $D \subset A$. *Denotamos por* $f\big|_D$ *a* **restrição** *de* f *ao subconjunto* D *de* A. *Então*

$$f\big|_D(x) = f(x), \quad \textit{para todo } x \in D.$$

Observação: Seja $D \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por $I_D : D \to D$ a **função identidade** definida por $I_D(x) = x$ para todo $x \in D$.

Exemplo 20 ***Função definida por partes***: *definida por regras diferentes em distintas partes de seu domínio; por exemplo,*

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 1 - x & \textit{se } x \leq 1, \\ x^2 & \textit{se } x > 1; \end{cases}$$

$$(b)\ g(x) = |x| = \begin{cases} x & \textit{se } x \geqslant 0, \\ -x & \textit{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplo 21 (Modelagem) *Um fabricante de refrigerante quer produzir latas cilíndricas para seu produto. A lata dever ter um volume de 360 ml. Expresse a área superficial total da lata em função do seu raio e dê o domínio da função.*

Solução: Seja r o raio da lata e h a altura. A área superficial total (topo, fundo e área lateral) é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

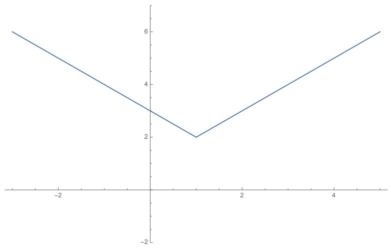
Sabemos que o volume $V = \pi r^2 h$ deve ser de 360 ml, temos

$$\pi r^2 h = 360,$$

ou seja $h = 360/\pi r^2$. Portanto,

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r 360/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 720/r.$$

Como r só pode assumir valores positivos, $D_S = (0, +\infty)$.



4.1 Translação e o Esboço de Gráficos

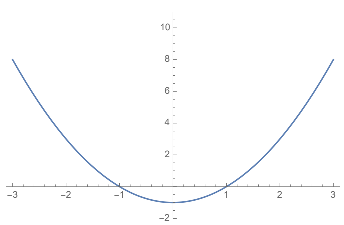
Translação e o Esboço de Gráficos

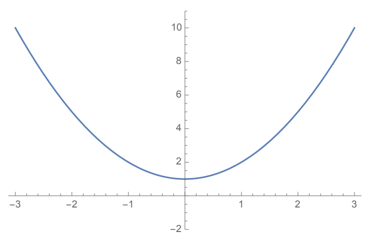
Exemplo 22 (Translação) *Esboce o gráfico de* $f(x) = |x-1| + 2$.

Eliminando o módulo, temos $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geqslant 1, \\ 3-x & \text{se } x < 1. \end{cases}$

Desenhar o gráfico.

Exemplo 23 *Esboce os gráficos de* $f(x) = x^2 - 1$ *e* $g(x) = x^2 + 1$.





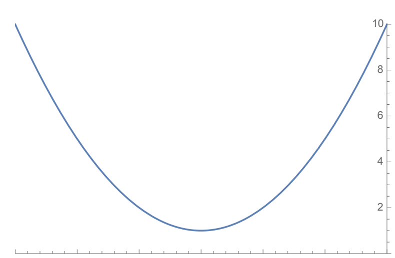
Gráficos e a translação:

- $f(x) + k$ translada o gráfico de f, k unidades *para cima* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para baixo* se $k < 0$,

- $f(x + k)$ translada o gráfico de f, k unidades *para a esquerda* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para a direita* se $k < 0$.

Exemplo 24 *Esboce o gráficos de* $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

Completando o quadrado, escrevemos $f(x) = (x+3)^2 + 1$. Logo, o gráfico é a parábola $y = x^2$ deslocada 3 unidades para esquerda e então uma unidade para cima.

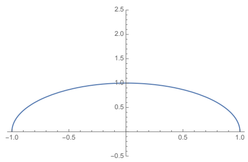
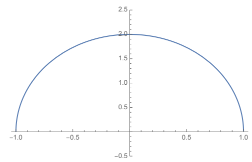
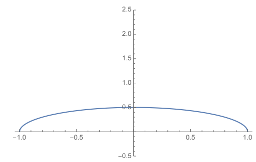


4.2 Dilatação e o Esboço de Gráficos

Dilatação e o Esboço de Gráficos

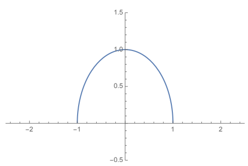
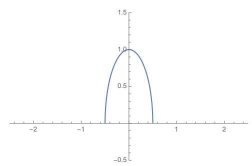
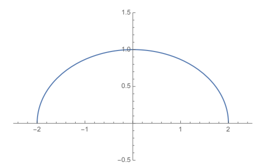
Exemplo 25 (Dilatação em y) *Considere as funções*

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = 2f(x) \qquad h(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

Exemplo 26 (Dilatação em x) *Considere as funções*

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = f(2x) \qquad h(x) = f(x/2)$$

Note que $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ e $h(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$
Resumo das propriedades
Os exemplos anteriores ilustram o seguinte:

Seja $k > 1$

- $kf(x)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo* y
- $\frac{1}{k}f(x)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo* y
- $f(kx)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo* x
- $f(x/k)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo* x

4.3 Reflexões e o Esboço de Gráficos

Reflexões e Esboço de Gráficos

Note que:

- O ponto $(a, -b)$ é a reflexão de (a, b) em relação ao eixo x.
- O ponto (a, b) é a reflexão de $(-a, b)$ em relação ao eixo y.
- Se refletimos o ponto (a, b) em relação ao eixo x, e depois em relação ao eixo y, produzimos o ponto $(-a, -b)$, que é a reflexão do ponto (a, b) em relação à origem $(0, 0)$.

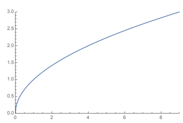
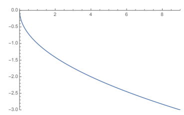
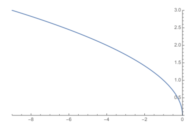
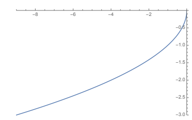
Propriedades da reflexão

- $g(x) = -f(x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo* x

- $g(x) = f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo y*
- $g(x) = -f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *à origem*

Exemplo 27 (Reflexão) *Considere as funções*

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = -\sqrt{x} \quad h(x) = \sqrt{-x} \qquad j(x) = -\sqrt{-x}$$

4.4 Funções com simetria: pares e ímpares

Funções com simetria

No que segue, consideraremos $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição 21 (Funções Pares e Ímpares) *Diremos que*

- *f é* **par** $\iff$ $f(-x) = f(x), \forall\, x \in D_f$;
- *f é* **ímpar** $\iff$ $f(-x) = -f(x), \forall\, x \in D_f$.

Observação: Geometricamente,

- o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e
- o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Exemplo 28

- *$f(x) = x^2$ é par;*
- *a função identidade $I(x) = x$ é ímpar;*
- *$f(x) = 2x - x^2 = x(2 - x)$ não é par nem ímpar.*

Exercício: Determine se f é par, ímpar ou nenhuma das duas:

(a) $f(x) = x^5 + x$,

(b) $f(x) = 1 - x^4$,

(c) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$.

4.5 Operações: Soma, Produto e Quociente

Soma, Produto e Quociente de Funções

Definição 22 (Soma, Produto e Quociente) *Dadas duas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, podemos definir as operações:*

- **soma**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$;
- **produto**: $(fg)(x) = f(x)g(x),\ x \in D_{fg} = D_f \cap D_g$;
- **quociente**: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\quad x \in D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$.

Exemplo 29 *Se $f(x) = \sqrt{7-x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, então*

- $D_f = (-\infty, 7]$,
- $D_g = [2, +\infty)$,
- $D_f \cap D_g = [2, 7]$.

Logo,

(a) $(f+g)(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2},\quad 2 \leqslant x \leqslant 7$,

(b) $(fg)(x) = \sqrt{7-x}\sqrt{x-2} = \sqrt{(7-x)(x-2)},\quad 2 \leqslant x \leq 7$,

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\dfrac{7-x}{x-2}},\quad 2 < x \leqslant 7$.

4.6 Composição

Composição

Definição 23 (Composição) *Dadas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, definimos a* **função composta**

$$h : D_{g \circ f} \to \mathbb{R}$$

por

$$h(x) = g(f(x)), \quad \forall\, x \in D_{g \circ f},$$

onde $D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. Neste caso, escrevemos $h = g \circ f$.

Exemplo 30 *Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$, então*

(a) $g \circ f(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 3(2x+1) = 4x^2 + 10x + 4$,

(b) $f \circ g(x) = f(x^2 + 3x) = 2(x^2 + 3x) + 1 = 2x^2 + 6x + 1$.

Observação: Em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemplo 31 *Encontre* $f \circ g \circ h$ *se* $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ *e* $h(x) = x + 3$.

Solução:

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+3)) = f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}.$$

Exercício: Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, encontre e determine o domínio das funções:

$$\begin{aligned}
&(a)\ f \circ g(x) = \sqrt[4]{2-x},\ D_{f \circ g} = (-\infty, 2]\\
&(b)\ g \circ f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}},\ D_{g \circ f} = [0, 4]\\
&(c)\ f \circ f(x) = \sqrt[4]{x},\ D_{f \circ f} = [0, +\infty)\\
&(d)\ g \circ g(x) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}},\ D_{g \circ g} = [-2, 2].
\end{aligned}$$

4.7 Funções Inversas

Funções Inversas

Definição 24 *Uma função* $f : A \to B$ *será dita* **invertível**, *se existir* $g : B \to A$ *(denotada por* f^{-1}*) tal que* $g \circ f = I_A$ *e* $f \circ g = I_B$.

Proposição 17 *Uma função* $f : A \to B$ *é invertível se, e somente se, é bijetora.*

De fato: Mostremos que se f é invertível então f é bijetora.

(1) $f(x) = f(y) \Rightarrow x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = y$ (f é injetora)

(2) Se $b \in B$ e $a = f^{-1}(b) \Rightarrow f(a) = f \circ f^{-1}(b) = b$ (f é sobre).

Agora mostremos que se $f : A \to B$ é bijetora então f é invertível.
Dado $b \in B$, como f é bijetora, existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Defina $f^{-1}(b) := a$. Assim, $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$, para todo $b \in B$, e $f^{-1}(f(a)) = a$, para todo $a \in A$.$\square$

Neste caso, a **função inversa** está definida por

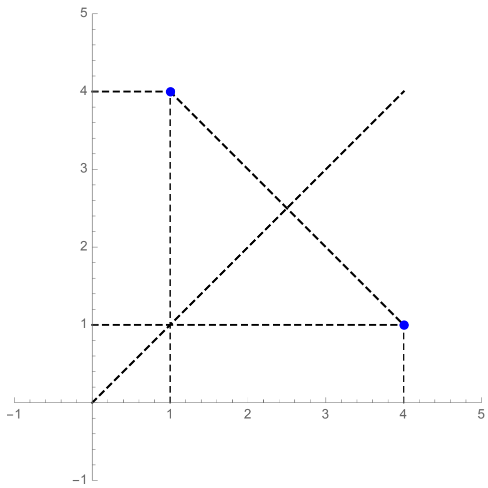
$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y, \quad \forall\, y \in B.}$$

$$D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \ \text{ e } \ \mathrm{Im}(f^{-1}) = D(f)$$

Exemplo 32 *A função* $f(x) = x^3$ *é injetora e a inversa de* f *sobre sua imagem é a função que denotamos por* $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.

De fato: Mostremos a injetividade de $f(x) = x^3$. Note que:

$$\begin{aligned}
&x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \quad \text{e}\\
&x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0
\end{aligned}$$



Logo $f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0$ implica que $x = y$ e f é injetora. Segue que f é bijetora sobre sua imagem.

Mostre que, se $f(x) = x^3$, $\mathrm{Im}(f)$ não é limitada superiormente nem inferiormente. Mostraremos mais tarde que isto implica que $f(x) = x^3$ é sobrejetora.

Alerta: Não confunda $f^{-1}(x)$ com $\dfrac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$.

Para achar a função inversa:

(1) Escreva $y = f(x)$.

(2) Resolva essa equação para x em termos de y.

(3) Troque x por y para expressar f^{-1} como função de x.

Exemplo 33 *Calcule f^{-1} para a função $f(x) = 1 + 3x$ $(A = B = \mathbb{R})$.*

Solução: Escrevemos $y = 1 + 3x$. Resolvemos para encontrar x como função de y, ou seja, $x = \dfrac{y-1}{3}$. E substituindo y por x, obtemos

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}.$$

Exercício: Determine, quando possível, a função inversa de:

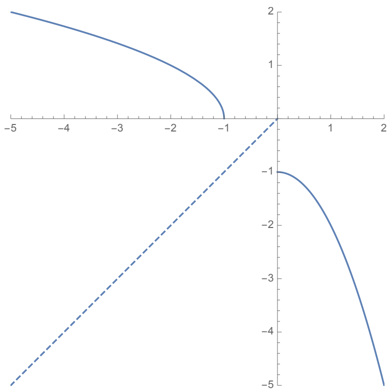
$$(a)\ f(x) = x^2; \qquad\qquad (b)\ f(x) = x^3 + 2.$$

Observação: Note que o ponto (b, a) é a reflexão do ponto (a, b) em torno da reta $y = x$.
Observação: Note que

$$G(f^{-1}) = \big\{(y, f^{-1}(y)) : y \in B\big\} = \{(f(x), x) : x \in A\}\ .$$

Segue da observação anterior que $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.

Exemplo: Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-x-1}$ e de sua inversa.

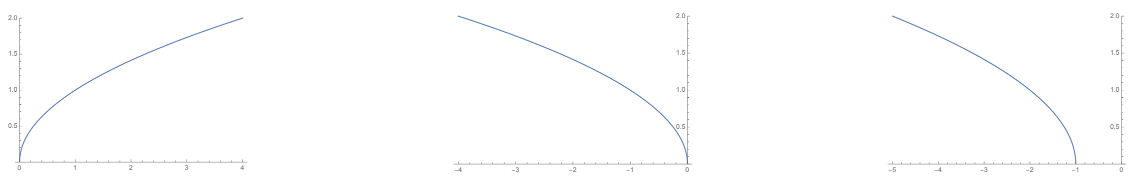


Solução 1: Se $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \sqrt{-x}$, então $f(x) = h(x+1)$.

Logo, G_h é a reflexão de G_g em torno do eixo y.

Por sua vez, G_f é G_h transladado de uma unidade para a esquerda.

$g(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $h(x) = \sqrt{-x}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{-x-1}$



A ilustração a seguir mostra o gráfico de f e de sua inversa f^{-1}. Note que $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.

Critério de Invertibilidade: A reflexão do gráfico em torno da diagonal é um gráfico.

Exemplo: Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-x-1}$ e de sua inversa.

Solução 2: Vamos primeiro encontrar a fórmula explícita para f^{-1}. Veremos que esta é uma função que conhecemos muito bem o seu gráfico e, portanto, poderemos construir também o gráfico de f.

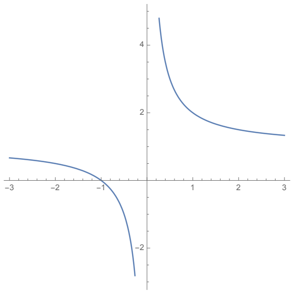
Primeiramente, observe que

$$D(f) = \mathrm{Im}(f^{-1}) = (-\infty, -1] \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(f) = D(f^{-1}) = [0, \infty).$$

Para calcular f^{-1}: Escrevemos $y = \sqrt{-x-1}$. Resolvemos para encontrar x como função de y: elevando ao quadrado $x = -y^2 - 1$. Substituindo y por x, obtemos

$$f^{-1}(x) = -x^2 - 1, \quad x \in [0, \infty).$$

Desta forma, fica fácil obter os gráficos da página anterior.



Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

4.8 Funções: Monótonas, Limitadas e Periódicas

4.8.1 Funções Monótonas

Funções Monótonas

Definição 25
- *Se valer a implicação* $x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$, *então* f *será* **estritamente crescente**.
- *Se valer a implicação* $x \geqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$, *então* f *será* **crescente**.
- *Se valer a implicação* $x > y \Longrightarrow f(x) < f(y)$, *então* f *será* **estritamente decrescente**.
- *Se valer a implicação* $x \geqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, *então* f *será* **decrescente**.

Definição 26 *Se* $f : A \to B$ *satisfizer uma das condições da Definição anterior, diremos que* f *é uma função* **monótona** *ou* **monotônica**.

Exemplo 34 $f(x) = x^2$ *é estritamente crescente para* $x > 0$ *e estritamente decrescente para* $x < 0$.

De fato: *Note que* $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. *Assim,*

- *Se* x, y *são ambos positivos temos que* $x > y$ *implica* $x^2 > y^2$ *(estritamente crescente) e*
- *Se* x, y *são ambos negativos* $x > y$ *implica* $x^2 < y^2$ *(estritamente decrescente).*

Exemplo 35 $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ *é decrescente em* $(-\infty, 0)$ *ou em* $(0, \infty)$ *mas não é monótona em* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Observe que se x e y tiverem o mesmo sinal e $x > y$, então

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{y} = f(y).$$

4.8.2 Funções Limitadas

Funções Limitadas

Definição 27 *Diremos que f é* **limitada** *se, e somente se,* $\text{Im}(f) = f(D_f) \subset \mathbb{R}$ *for limitado. Caso contrário, a função f será dita* **ilimitada**. *Se $A_1 \subset D_f$, então f será* **limitada em A_1** *se, e somente se, a restrição $f|_{A_1}$ for limitada, isto é, $f(A_1) \subset \mathbb{R}$ for limitado.*

Observação: Da definição acima, f será limitada, se e somente se, existir $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant L, \quad \forall\, x \in D_f,$$

ou, equivalentemente, se $\exists\ L,\, l \in \mathbb{R}$ tais que

$$l \leqslant f(x) \leqslant L, \quad \forall\, x \in D_f.$$

Exemplo 36 *(a)* $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ *é limitada; (só assume os valores 1 e -1)*

(b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+1}$ *é limitada;* $(0 \leqslant f(x) \leqslant 1)$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *é ilimitada; (Dado $L>0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = \frac{1}{n} < \frac{1}{L}$).*

(d) $f(x) = x^3$ *é ilimitada (Dado $L>0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n} < \frac{1}{L}$).*

Definição 28 *Diremos que:*

- $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in D_f\} = \sup(\text{Im}(f))$.
- $\inf(f) = \inf\{f(x) : x \in D_f\} = \inf(\text{Im}(f))$.
- *Se $\sup(f) = f(x_0)$ para algum $x_0 \in D_f$, então diremos que $f(x_0)$ é o* **máximo** *de f ou o* **valor máximo** *de f. O ponto x_0 será chamado* **ponto de máximo** *de f.*
- *Se $\inf(f) = f(x_0)$ para algum $x_0 \in D_f$, então diremos que $f(x_0)$ é o* **mínimo** *de f ou o* **valor mínimo** *de f. O ponto x_0 será chamado* **ponto de mínimo** *de f.*

4.8.3 Funções Periódicas

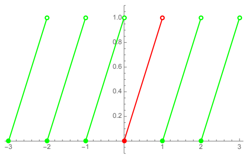
Funções Periódicas

Definição 29 *Seja $\omega \neq 0$. Então f será dita* **periódica** *com* **período** *ω ou ω-***periódica** *se, e somente se, tivermos*

$$f(x) = f(x+\omega), \ \forall\, x \in D_f.$$

Em particular, se existir um menor ω_0 número positivo tal que f seja ω_0-periódica, diremos que ω_0 será o **período mínimo** *de f.*

Proposição 18 *Sejam $c \neq 0 \neq \omega$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for ω-periódica, então serão válidas as afirmações:*



(a) *f é $n\omega$-periódica, $\forall n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$.*

(b) *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$ é ω/c-periódica.*

Prova: a) Observe que, se f é $\bar{\omega}$ periódica,

$$f(x - \bar{\omega}) = f(x) = f(x + \bar{\omega}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, basta provar o caso $n \in \mathbb{N}^*$. Faremos a prova por indução.

Sabemos que $f(x+\omega) \overset{(p)}{=} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $f(x+(n-1)\omega) \overset{(i)}{=} f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e para algum $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$.
Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + n\omega) = f(x + \omega + (n-1)\omega) \overset{(i)}{=} f(x + \omega) \overset{(p)}{=} f(x).$$

b) Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g\left(x + \frac{\omega}{c}\right) = f\left(c\left(x + \frac{\omega}{c}\right)\right) = f(cx + \omega) \underbrace{=}_{f \text{ é } \omega-\text{periódica}} f(cx) = g(x).$$

Exemplo 37 *Considere $f(x) = x - [x]$, em que $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ é a função maior inteiro menor ou igual a x. Então f é 1-periódica e o período mínimo de f é 1. Faça o gráfico de f*

Solução: Primeiramente provemos que $[x+1] = [x]+1$. De fato,

$$[x] \leqslant x \ \text{ e } \ [x]+1 > x \Longrightarrow [x]+1 \leqslant x+1 \ \text{ e } \ ([x]+1)+1 > x+1.$$

Agora observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] = (x+1) - ([x]+1) = x - [x] = f(x).$$

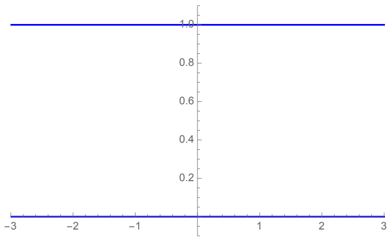
É fácil ver que 1 é o menor período. Basta fazer o gráfico de f em $[0,1)$ e repetir em cada intervalo da forma $[n-1, n)$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$.

Exemplo 38 $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ *é r-periódica $\forall\ r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.*

Solução: *Seja $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Uma vez que*

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + r \in \mathbb{Q},$$

inferimos que $f(x+r) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como, dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbb{Q} \ni r_n = \frac{1}{n} < \epsilon$, f não tem período mínimo.

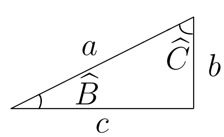


O gráfico de $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ é o seguinte:

- a linha azul superior representa a imagem dos racionais (ela é cheia de buracos, relativos aos números irracionais);
- a linha azul inferior representa a imagem dos irracionais (ela é cheia de buracos, relativos aos números racionais).

Funções Trigonométricas

Sabemos que em um triângulo *retângulo* de hipotenusa a e ângulos agudos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ opostos, respectivamente, aos catetos b e c, temos



$$\cos\widehat{B} = \frac{c}{a}, \quad \cos\widehat{C} = \frac{b}{a},$$

$$\text{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}, \quad \text{sen}\,\widehat{C} = \frac{c}{a}.$$

Estas relações definem o **seno** e **cosseno** de um ângulo agudo. Note que $\text{sen}\widehat{B}$ e $\cos\widehat{B}$ dependem apenas do ângulo $\widehat{B}$ e não do tamanho do triângulo.

Do Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 = a^2\text{sen}^2\widehat{B} + a^2\cos^2\widehat{B} = a^2(\text{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}) \quad \text{e}$$

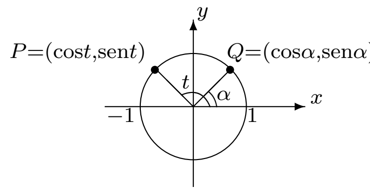
$$\boxed{1 = \text{sen}^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B}.} \tag{1}$$

É claro que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números compreendidos entre 0 e 1. A relação (1) sugere que, para todo ângulo α, os números $\cos\alpha$ e $\text{sen}\alpha$ sejam as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

Usaremos isto para estender as funções cosseno e seno para ângulos fora do intervalo $(0, \pi/2)$.

Observação: Sempre que falarmos das funções seno e cosseno os ângulos serão medidos em radianos ($\pi radianos = 180^o$).

Considerando a circunferência unitária de centro na origem do $\mathbb{R}^2$ e marcando, a partir do eixo x, um ângulo t, podemos definir $\text{sen}t$ e $\cos t$ de forma que as coordenadas de P sejam $(\cos t, \text{sen}t)$.



Assim, sen$t$ e cos$t$ coincidem com a definição original se $0 < t < \pi/2$ e podem ser estendidas para qualquer $t \in \mathbb{R}$, se marcarmos ângulos positivos no sentido antihorário e ângulos negativos no sentido horário.

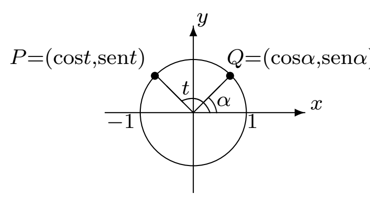
Proposição 19 (Propriedades) (a) *O seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes.*

(b) *O cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.*

(c) *O seno e cosseno são funções 2π-periódicas com imagem no intervalo $[-1, 1]$.*

(d) *O cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar.*

(e) $\operatorname{sen}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *e* $\cos(0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

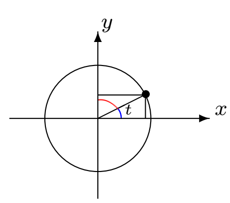


Proposição 20 (Propriedades - via congruência de triângulos) (f) $\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ *e* $\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

(g) $-\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ *e* $\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$.

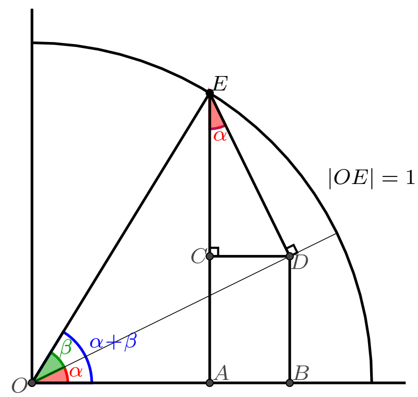
(h) $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$ *e* $-\cos t = \cos(\pi - t)$.

(i) $-\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi + t)$ *e* $-\cos t = \cos(\pi + t)$.



Proposição 21 (Fórmulas de Adição) (a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$.

(b) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.
Trocando β por $-\beta$ e utilizando que o cosseno é par e o seno é ímpar, obtemos



(c) $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$.

(d) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

Faremos apenas a prova da fórmula do cosseno da soma. O seno da soma segue desta. Basta considerar o caso $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$. Note que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= |OA| = |OB| - |CD| = |OD|\cos\alpha - |ED|\text{sen}\alpha \\ &= \cos\beta\cos\alpha - \text{sen}\beta\,\text{sen}\alpha\end{aligned}$$

Recorde que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\alpha+\beta) &= \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Disto obtemos o seguinte resultado:

Proposição 22 (Arco Duplo) (a) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$.

(b) $\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$.

Recorde que:

$$\begin{aligned}&(a)\ \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \ \text{ e} \\ &(b)\ \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \cos(2\alpha).\end{aligned}$$

Disto obtemos as fórmulas de arco metade.

Proposição 23 (Arco Metade) (a) $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$, $\left[\frac{(a)+(b)}{2}\right]$.

(b) $\text{sen}^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$, $\left[\frac{(a)-(b)}{2}\right]$.

Recorde que:

$$\begin{aligned}
&(a)\ \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\\
&(b)\ \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)\\
&(c)\ \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\\
&(d)\ \text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Disto obtemos as fórmulas seguintes:

Proposição 24 (Transformação de Produto em Soma) (a) $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$, $[\frac{(a)+(c)}{2}]$.

(b) $\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) = -\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$, $[\frac{(c)-(a)}{2}]$.

(c) $\text{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\text{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\text{sen}(\alpha-\beta)$ $[\frac{(b)+(d)}{2}]$.

Recorde que

$$\begin{aligned}
&(a)\ \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\\
&(b)\ \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)\\
&(c)\ \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\\
&(d)\ \text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\alpha = \tfrac{\alpha'+\beta'}{2},\ \beta = \tfrac{\alpha'-\beta'}{2}$$

obtemos as fórmulas seguintes:

Proposição 25 (Transformação de Soma em Produto) (a') $\text{sen}(\alpha')+\text{sen}(\beta') = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right.$ $(a') = \frac{(b)+(d)}{2}$

(b') $\cos(\alpha') + \cos(\beta') = 2\cos\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right)$. $(b') = \frac{(a)+(c)}{2}$

De maneira análoga obtemos as fórmulas seguintes.

Proposição 26 (Transformação de Subtração em Produto) (a) $\text{sen}(\alpha')-\text{sen}(\beta') = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right)$

(b) $\cos(\alpha') - \cos(\beta') = -2\text{sen}\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right)$.

Definição 30 *Definimos*

- $\text{tg}(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\quad D(\text{tg}) = \{\alpha :\ \cos\alpha \neq 0\}$*;*

- $\text{cotg}(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}, \quad D(\text{cotg}) = \{\alpha : \text{sen}\alpha \neq 0\}$;

- $\text{cossec}(\alpha) = \dfrac{1}{\text{sen}(\alpha)}, \quad D(\text{cossec}) = \{\alpha : \text{sen}\alpha \neq 0\}$;

- $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}, \quad D(\sec) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\}$

Exercício 9 (Entregar em 20/09) (1) *Dê um significado geométrico para* $\text{tg}(\alpha)$, $\text{cotg}(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ *e* $\text{cossec}(\alpha)$.

(2) *Esboce os gráficos das funções* tg, cotg, sec *e* cossec.

(3) *Classifique as funções trigonométricas em par, ímpar, periódica, limitada.*

5 Limites: Noção Intuitiva e Definição

5.1 Noção Intuitiva

Noção Intuitiva

Vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ para valores de x próximos de um ponto p.

Consideremos, inicialmente, a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ para } x \neq 1 \\ f(1) = 3. \end{cases}$$

Vamos analisar o que acontece com os valores $f(x)$ da função quando x está próximo de 1 mas é distinto de 1.

Noção Intuitiva

Para valores de x próximos de 1 (distintos de 1), alguns valores de $f(x)$ são dados na tabela abaixo:

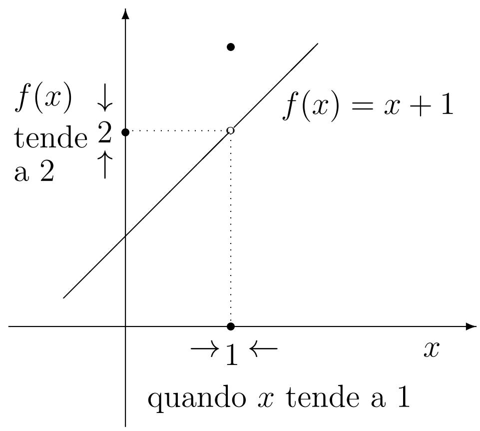
$x > 1$	$f(x)$	$x < 1$	$f(x)$
$1,5$	$2,5$	$0,5$	$1,5$
$1,1$	$2,1$	$0,9$	$1,9$
$1,01$	$2,01$	$0,99$	$1,99$
$1,001$	$2,001$	$0,999$	$1,999$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2

Noção Intuitiva

Da tabela vemos que quando x estiver próximo de 1 (por valores menores ou maiores que 1) $f(x)$ estará próximo de 2.

De fato, podemos tomar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos, tomando valores x suficientemente próximos de 1 (distintos de 1).

Expressamos isso dizendo que o *limite da função $f(x)$, quando x tende a 1, é igual a 2.*
Noção Intuitiva



Noção Intuitiva

Definição 31 (Intuitiva) *Escreveremos*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

e diremos que ***o limite de*** *$f(x)$**, quando*** *x* ***tende a*** *p**, é igual a L**, se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L para valores de x suficientemente próximos de p, mas distintos de p.*

Observação:
É importante notar que, ao analisar o limite de $f(x)$ quando x tende a p, não consideramos $x = p$. Estamos interessados em estudar o que ocorre com $f(x)$ para x próximo a p. A função f nem precisa estar definida para $x = p$.
Noção Intuitiva

Exemplo 39 *Encontrar o limite de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ quando x se aproxima de 1, isto é, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.*

Observe que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ não está definida em $x = 1$. Observe ainda que, para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1.$$

Como os valores das duas funções coincidem para $x \neq 1$, seus limites, quando x tende a 1, também coincidem. Assim, como no exemplo anterior, deduzimos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Noção Intuitiva

Exemplo 40 *Determine* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *onde*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \textit{para } x \neq 1 \\ 0, & \textit{para } x = 1. \end{cases}$$

Observe que para $x \neq 1$ a função $f(x)$ é igual à função do exemplo anterior, desta forma sabemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

O valor do $\lim_{x \to 1} f(x)$ não coincide com o valor da função em $x = 1$.

Isto significa que o gráfico de f apresenta um salto em $x = 1$.

Expressamos este fato dizendo que *a função não é contínua.*

Noção Intuitiva

Exemplo 41 *Determine o valor de c para que o gráfico da função f não apresente salto em $x = 1$, onde*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, & \textit{para } x \neq 1 \\ c, & \textit{para } x = 1. \end{cases}$$

Observe que para $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x} + 1$$

Desta forma, quando x se aproxima de 1, $f(x)$ se aproxima de 2. Sendo assim, escolha apropriada de c é $c = 2$.

5.2 Definição

Definição

Nesta seção vamos a dar a definição matemática precisa de limite. Começamos, em um exemplo, com uma análise mais formal da idéia de limite. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \neq 3, \\ 6, & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos do que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x - 3|$ e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo nosso problema é achar um número δ tal que,

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < 0,1.$$

Veja que $|x - 3| > 0$ equivale a dizer que $x \neq 3$.

Note que se $0 < |x - 3| < \dfrac{0,1}{2}$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 0,1.$$

$$\text{Assim a resposta será } \delta = \frac{0,1}{2} = 0,05.$$

Se mudarmos o número 0,1 no problema para um número menor (para 0,01), então o valor de δ mudará (para $\delta = \dfrac{0,01}{2}$).

Em geral, se usarmos um valor positivo arbitrário ε, então o problema será achar um δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x-3| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

E podemos ver que, neste caso, δ pode ser escolhido igual a $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

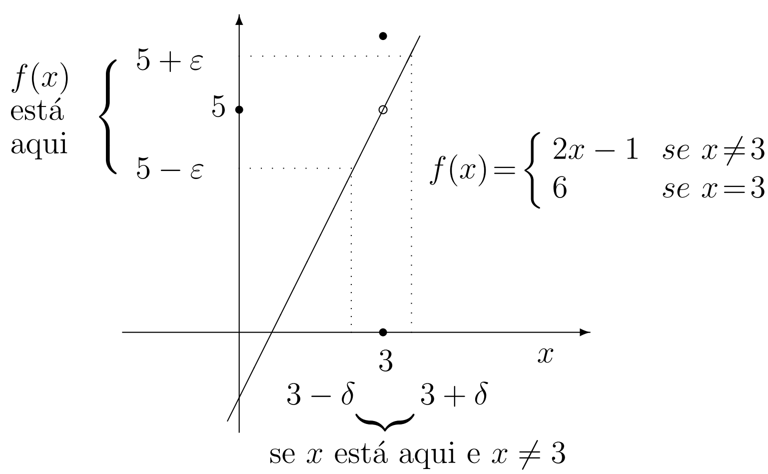
Esta é uma maneira de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3.

Também podemos escrever

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta, \quad x \neq 3,$$

ou seja, tomando os valores de $x \neq 3$ no intervalo $(3-\delta, 3+\delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$.

Gráficamente, temos o seguinte:



Definição 32 (Limite) *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f. Diremos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende** p **é** L se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \ \ e \ \ 0 < |x - p| < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema 3 *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f. O limite de $f(x)$ quando x tende a p, caso exista, é único. Este limite será denotado por*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

De fato: Se L e L' são limites de $f(x)$ quando x tende a p, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

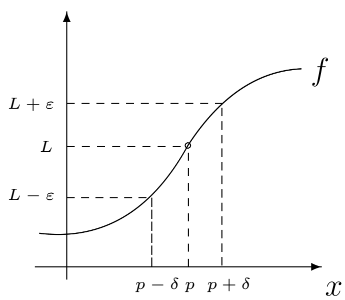
$$x \in D_f \text{ e } \; 0 < |x-p| < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f(x) - L'| < \varepsilon.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, com a escolha de δ acima e $x \in D_f$ satisfazendo $0 < |x-p| < \delta$, temos

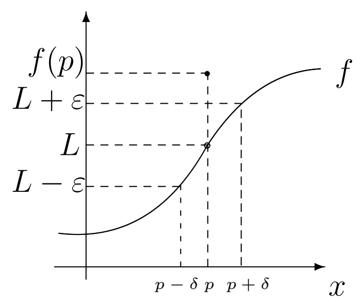
$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |f(x) - L| + |L' - f(x)| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que $L = L'$.□

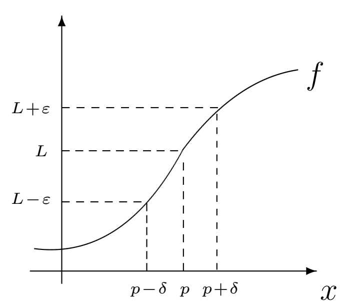
Interpretação geométrica do limite.



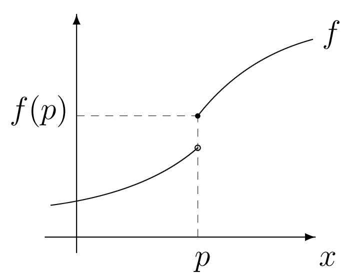
$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, $p \notin D_f$



$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L \neq f(p)$



$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L = f(p)$



Não existe o limite de f em p

Exemplo 42 *Prove que* $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Fazemos uma análise preliminar para determinar como δ pode ser obtido a partir de ϵ. Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |(3x-2) - 4| < \varepsilon.$$

Mas $|(3x-2) - 4| = |3x - 6| = 3|x-2|$. Assim, teremos

$$3|x - 2| < \varepsilon \quad \text{ sempre que } \quad 0 < |x-2| < \delta.$$

Isto sugere que escolhamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Provemos que esta escolha de δ é adequada. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, então

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ tal que

$$|(3x-2)-4| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x-2| < \delta$$

logo, pela definição, $\lim_{x\to 2}(3x-2) = 4$.

6 Limite e Continuidade

6.1 Limites Laterais

Limites Laterais

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D^+ = D \cap (p, \infty)$ $(D^- = D \cap (-\infty, p))$.

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D_f. O **limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x\to p^+} f(x) := \lim_{x\to p} f|_{D^+}(x) \qquad \left(\lim_{x\to p^-} f(x) := \lim_{x\to p} f|_{D^-}(x)\right)$$

6.2 Critério negativo para existência de limites

Critério negativo para existência de limites

Teorema 4 *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D_f. Então*

$$\lim_{x\to p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x).$$

Prova: Existe $\lim_{x\to p} f(x) = L$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f,\ 0 < |x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon,$$

se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f \cap (-\infty, p),\ 0 < |x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in D_f \cap (p, \infty),\ 0 < |x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

se, e somente se,

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x). \square$$

Exemplo 43 *Seja* $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to R$ *a função definida por*

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \; x \neq 1.$$

Mostre que não existe o limite $\lim_{x\to 1} f(x)$.

De fato: *Para todo* $x < 1$ *temos que* $f(x) = -1$ *e portanto* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$. *Por outro lado, Para todo* $x > 1$ *temos que* $f(x) = 1$ *e portanto* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$. *Do teorema anterior, não pode existir o limite* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

6.3 Continuidade

Continuidade

Exemplo 44 *Prove que* $\lim\limits_{x\to p} k = k$ *e* $\lim\limits_{x\to p} x = p$.

- Dado $k\in\mathbb{R}$, seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p\in\mathbb{R}$ e note que, dado $\epsilon>0$, escolhendo $\delta>0$ qualquer, temos $0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| = |k-k| = 0 < \epsilon$.
- Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p \in \mathbb{R}$ e note que, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \epsilon$, temos $0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(p)| = |x-p| < \delta = \epsilon$.

Exemplo 45 *Prove que* $\lim\limits_{x\to p} x^2 = p^2$.

- Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p \in \mathbb{R}$ e, dado $\epsilon>0$, escolhendo $\delta \leq \min\{1, \epsilon/(2|p|+1)\}$, temos

$$\begin{array}{l} i)\ 0<|x-p|<\delta\leq 1 \;\Rightarrow\; |x+p|\leq|x-p|+|2p|\leq 2|p|+1 \;\text{ e} \\ ii)\ 0<|x-p|<\delta\leq\epsilon/(2|p|+1) \;\Rightarrow |x+p||x-p|\leq(2|p|+1)\delta \leq \epsilon \end{array}$$

segue que, se $0 < |x-p| < \delta = \min\{1, \epsilon/(2|p|+1)$,

$$\begin{aligned} |h(x) - h(p)| = |x^2 - p^2| &= |x+p||x-p| \leq (2|p|+1)|x-p| \\ &< (2|p|+1)\delta \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Observação:

Esperamos que os exemplos anteriores (que estão entre os limites mais elementares) tenham convencido o leitor que, definitivamente, não queremos calcular limites por definição.

Isto impõe a necessidade de buscar métodos que nos permitam mostrar a existência de limites sem que tenhamos, todas as vezes, que recorrer à definição.

As propriedades dos limites serão provadas a seguir e passarão a ser a nossa principal ferramenta para o cálculo de limites.

Definição 33 (Continuidade) *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$* ***é contínua em*** *p se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon \ .$$

Observação 3 *Note que,*

- *se $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f, então f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ e*
- *se p é um ponto isolado de D_f então f é contínua em p.*

Exemplo 46 *(a) A função $f(x) = k$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(b) A função $f(x) = x$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.

(c) A função $f(x) = x + 1$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.

(d) A função $f(x) = x^2$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.

(e) A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$ pois $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$.

Exercício: Verifique cada uma das afirmativas do exemplo anterior utilizando os resultados dos exemplos anteriores para as mesmas funções.

6.4 Propriedades do Limite

Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i=1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x\to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x\to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) + \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x\to p} \ k \ f_1(x) = k \, L_1$ onde $k =$ constante (entregar 27/09).

3) $\lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$ (entregar 27/09).

4) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Antes de provar estas propriedades vamos, rapidamente, nos convencer da enorme quantidade de trabalho que evitamos ao fazer o pequeno esforço de demonstrá-las.

Primeiramente note que, como $\lim\limits_{x\to p} x = p$ então, de 3) segue que $\lim\limits_{x\to p} x^2 = p^2$ e, por indução, obtemos que $\lim\limits_{x\to p} x^n = p^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Agora, de 1), 2) e 3), podemos facilmente concluir que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinômio, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Além disso, usando 4), concluímos que, se $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são polinômios e p é tal que $f_2(p) \neq 0$,
$$\lim_{x\to p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(p)}{f_2(p)}$$
Mais geralmente, utilizando a propriedade do produto e um argumento de indução obtemos que, se $\lim_{x\to p} f(x) = L$,

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to p} f(x)\right]^n = L^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercício 10 *Calcule* $\lim_{x\to 2}(5x^3 - 8)$, $[R : 32]$ *e* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}$, $[R : 1/4]$.

Exemplo 47 *Calcule* $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$, $[R : 6]$.

De fato: Simplesmente note que, para $h \neq 0$, $\dfrac{(3+h)^2-9}{h} = h+6$ e que $\lim_{h\to 0} h + 6 = 6$. Sabendo de que estas propriedades facilitam, enormemente, o nosso trabalho, vamos fazer a demonstração das mesmas para poder utilizá-las, livremente.

Prova de 1): $\lim_{x\to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim_{x\to p} f_1(x) + \lim_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$x \in D_{f_i},\ 0 < |x - p| < \delta_i \ \Rightarrow\ |f_i(x) - L_i| < \frac{\epsilon}{2},\ i = 1, 2.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1+f_2},\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$$
$$|(f_1+f_2)(x)-(L_1+L_2)| \leq |f_1(x)-L_1| + |f_2(x)-L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x\to p}(f_1 + f_2)(x) = L_1 + L_2$.

Prova de 2): $\lim_{x\to p}\ k\ f_1(x) = k\, L_1$ onde $k =$ constante

Se $k = 0$ o resultado é trivial. Se $k \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Então

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |kf_1(x) - kL_1| = |k|\, |f_1(x) - L_1| < |k| \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x\to p}(kf_1)(x) = kL_1$.

Prova de 3): $\lim_{x\to p}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to p} f_1(x)\cdot \lim_{x\to p} f_2(x) = L_1\cdot L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x-p| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}, 1\right\}.$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}, 1\right\}.$$

Logo $|f_2(x)| \leq |f_2(x) - L_2| + |L_2| < |L_2| + 1$ sempre que $x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2$.

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1\cdot f_2},\ 0 < |x-p| < \delta$,

$$\begin{aligned}
|(f_1\cdot f_2)(x) - (L_1\cdot L_2)| &\leq |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\
&\leq |f_1(x) - L_1||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&\leq |f_1(x) - L_1|(|L_2|+1) + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}(|L_2|+1) + |L_1|\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x\to p}(f_1\cdot f_2)(x) = L_1\cdot L_2$.

Prova de 4): $\lim_{x\to p}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim_{x\to p} f_1(x)}{\lim_{x\to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x-p| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon|L_2|}{4}$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1|+1)}, \frac{|L_2|}{2}\right\}.$$

Logo, se $x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2$

$$|L_2| \leq |f_2(x) - L_2| + |f_2(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |f_2(x)| \quad \text{e} \quad \frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)|.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1\cdot f_2},\ 0 < |x-p| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \frac{|(f_1(x) - L_1)L_2 + (L_2 - f_2(x))L_1|}{|f_2(x)|\,|L_2|} \\
&\leq \frac{|f_1(x) - L_1||L_2| + |L_2 - f_2(x)||L_1|}{|L_2|\,|L_2|/2} \\
&\leq 2\frac{|f_1(x) - L_1|}{|L_2|} + 2|L_2 - f_2(x)|\frac{|L_1|}{|L_2|^2} \\
&\leq 2\frac{\epsilon|L_2|}{4}\frac{1}{|L_2|} + 2\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1|+1)}\frac{|L_1|}{|L_2|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \to p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

6.5 Propriedades Adicionais: Comparação e Confronto

Propriedades Adicionais: Comparação e Confronto
Além das propriedades mostradas anteriormente, a comparação o confronto são propriedades extremamente úteis para que possamos concluir a existência de limites. Começamos com a comparação.

Teorema 5 (Comparação) *Se p é um ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$ e $f(x) \leq g(x)$ sempre que $x \in (D_f \cap D_g) \backslash \{p\}$ e x está próximo de p e os limites de f e g quando x tende a p existem, então*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L_f \leq L_g = \lim_{x \to p} g(x).$$

Observação: O texto em azul do enunciado significa que,

- existe $r > 0$ tal que $x \in D_f \cap D_g$, $0 < |x-p| < r$ implica $f(x) \leq g(x)$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_f > 0$ e $\delta_g > 0$ tais que,

$$x \in D_f,\ 0 < |x-p| < \delta_f \Rightarrow L_f - \epsilon < f(x) < L_f + \epsilon$$

$$x \in D_g,\ 0 < |x-p| < \delta_g \Rightarrow L_g - \epsilon < g(x) < L_g + \epsilon$$

Ainda, existe $r > 0$ tal que

$$x \in D_f \cap D_g,\ 0 < |x-p| < r \Rightarrow f(x) \leq g(x).$$

Assim, para $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, r\}$, $x \in D_f \cap D_g$ e $0 < |x-p| < \delta$, temos

$$L_f - \epsilon < f(x) \leq g(x) < L_g + \epsilon$$

e consequentemente $L_f \leq L_g$.

Teorema 6 (do Confronto) *Dadas f, g, h funções e p ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g \cap D_h$, se existe $r > 0$ tal que $\{x \in D_g : 0 < |x-p| < r\} \subset D_f \cap D_h$*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \textit{para} \quad x \in D, \quad 0 < |x-p| < r,$$

e se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L\ .$$

De fato: Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_f > 0$ e $\delta_h > 0$ tais que,

$$x \in D_f,\ 0 < |x-p| < \delta_f \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$
$$x \in D_h,\ 0 < |x-p| < \delta_h \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

Ainda, existe $r > 0$ tal que

$$x \in \overbrace{D_f \cap D_g \cap D_h}^{=D_g},\ 0 < |x-p| < r \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Se $\delta = \min\{\delta_f, \delta_h, r\}$, $x \in D_g$ e $0 < |x-p| < \delta$, temos

$x \in D_f \cap D_g \cap D_h,$ e

$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$

Logo, dado $\epsilon > 0$, para $\delta = \min\{\delta_f, \delta_h, r\}$, $x \in D_g$ e $0 < |x-p| < \delta$, temos $|g(x) - L| < \epsilon$ e portanto $\lim\limits_{x\to p} g(x) = L$.

Exemplo 48 *As funções trigonométricas são contínuas.*

Prova: Das fórmulas de transformação de soma em produto, para qualquer p, temos

$$\begin{aligned}|\text{sen}x - \text{sen}p| &= \left|2\text{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\cos\left(\frac{x+p}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\text{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-p}{2}\right| = |x-p|.\end{aligned}$$

Onde usamos que $|\text{sen}\theta| \leq |\theta|$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Como $\lim\limits_{x\to p}(x-p) = 0$, do Teorema do Confronto, segue que $\lim\limits_{x\to p}(\text{sen}x - \text{sen}p) = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to p}\text{sen}x = \text{sen}p$. Logo a função seno é contínua para todo p.

A prova da continuidade do cosseno é feita de maneira similar utilizando a igualdade

$$\cos x - \cos p = -2\text{sen}\left(\frac{x+p}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right).$$

A continuidade das outras funções trigonométricas seguem das propriedades do limite. □

Exemplo 49 *Mostre que* $\lim\limits_{x\to 0} x^2\text{sen}\frac{1}{x} = 0.$

De fato: Note que,

$$-1 \leq \text{sen}\frac{1}{x} \leq 1.$$

Multiplicando por x^2 temos

$$-x^2 \leq x^2\text{sen}\frac{1}{x} \leq x^2.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\text{sen}\frac{1}{x} = 0$.

Exemplo 50 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*

(a) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(b) Verifique se f é contínua em 0.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, segue do Teorema do Confronto que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ e, do fato que $|f(x)| \leq x^2$ segue que $f(0) = 0$. Logo existe o limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ e f é contínua em $x = 0$.

Observação: Diremos que f é infinitésima em p se $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$.

6.6 Infinitésima vezes limitada é infinitésima

Infinitésima vezes limitada é infinitésima

Corolário 6 *Dadas $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$, p ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$ e, para algum $M > 0$ e $r > 0$, $|g(x)| \leq M$, $x \in D_g$, $0 < |x - p| < r$. Então $\lim\limits_{x\to p} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.*

De fato: Note que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| = ||f(x)| - 0| < \epsilon$$

se, e somente se $\lim\limits_{x\to p} |f(x)| = 0.$ Como

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M\, |f(x)|,\ x \in D_{fg} = D_f \cap D_g,\ 0 < |x - p| < r.$$

o resultado segue do Teorema da Confronto.

Exercício: Vimos que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to p} |f(x)| = 0$. Prove que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to p} (f(x) - L) = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to p} |f(x) - L| = 0$. Prove que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L \Longrightarrow \lim\limits_{x\to p} |f(x)| = |L|$ e que não vale a volta.

Sugestão:

- Para ver que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to p}(f(x)-L)=0$ use a propriedade que o limite da soma é a soma dos limites.
- Para ver que $\lim_{x\to p} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = |L|$, note que $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$, para todo $x \in D_f$.
- Para ver que não vale a volta, considere a funão $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -1$ se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exemplo 51 *Calcule* $\lim_{x\to 0} x^2 g(x)$, *onde* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é dada por* $g(x)=\begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.

Solução: Note que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ e que $|g(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício: Calcule

$$(a)\ \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2}.$$

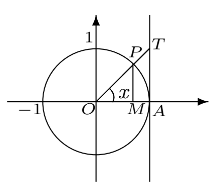
6.7 O Primeiro Limite Fundamental

O Primeiro Limite Fundamental

Exemplo 52 (O Primeiro Limite Fundamental)

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$$

De fato: Note que que para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ vale a desigualdade $0 < \operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$.



$\operatorname{sen} x = |PM| < |PA| < x$ e $A(\text{setor}OPA) < A(\triangle OTA)$

$\operatorname{sen}\ x < x$ e $\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg}\ x}{2}$

Tomando o recíproco e multiplicando por sen$x$, obtemos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x, \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Se $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $1 > \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} > \cos(-x)$. Logo

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Como $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\ x}{x} = 1$. $\square$

Exemplo 53 *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$.

De fato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{\text{sen} x}{x}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen} x}{x}\right) \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

6.8 Limite da Composta

Limite da Composta

Teorema 7 (Limite da Composta) *Sejam* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *funções tais que* $\text{Im}(g) \subset D_f$ *e* $L \in D_f$*. Se* p *é um ponto de acumulação de* D_g*,* $\lim_{x\to p} g(x) = L$ *e* f *é contínua em* L *, então*

$$\lim_{x\to p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to p} g(x)\right) = f(L).$$

De fato: Como f é contínua em L, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$y \in D_f, \quad |y - L| < \delta_f \ \Rightarrow \ |f(y) - f(L)| < \epsilon.$$

Como $\lim_{x\to p} g(x) = L$, dado $\delta_f > 0$ existe $\delta_g > 0$ tal que

$$x \in D_g, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \ \Rightarrow \ |g(x) - L| < \delta_f.$$

Desta forma, como $\text{Im}(g) \subset D_f$, $D_{f\circ g} = D_g$ e

$$x \in D_g = D_{f\circ g}, 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon.$$

Logo $\lim_{x\to p} f(g(x)) = f(L)$.□

Exemplo 54 *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen} 5x}{x}$.

De fato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen} 5x}{x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen} 5x}{5x} \overset{u=5x}{=} 5 \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen} u}{u} = 5.$$

Exemplo 55 *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(2x)}{x}$.

De fato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo 56 *Calcule* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

De fato:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\frac{(1+\cos x)}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercício: Calcule

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}.$$

7 Funções contínuas: Resuldados fundamentais

Recorde que:

Definição 34 (Continuidade) *Seja* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$. *Diremos que* $f(x)$ ***é contínua em*** p *se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \ \text{ e } \ |x-p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(p)| < \varepsilon.$$

- Se p é um ponto de acumulação de D_f, f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.
- Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.
- Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.
- Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

7.1 O Teorema da Conservação do Sinal

O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema 8 (Teorema da Conservação do Sinal) *Seja* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $\bar{x} \in D_f$ *tal que* $f(\bar{x}) > 0$ $(f(\bar{x}) < 0)$. *Então, existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ *sempre que* $x \in D_f$ *e* $x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$.

De fato: Como f é contínua em $\bar{x}$, dado $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f,\ x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x})-\epsilon, f(\bar{x})+\epsilon) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado.□

7.2 O Teorema do Valor Intermediário e Aplicações

O Teorema do Valor Intermediário e Aplicações

Teorema 9 (Teorema do Anulamento) *Se*

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

$(f(a) > 0 > f(b))$, *então, existe* $\bar{x} \in (a,b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = 0$.

De fato: Faremos apenas o caso $f(a) < 0 < f(b)$. Seja

$$A = \{x \in [a,b] : f(s) > 0, \text{ para todo } s \in [x,b]\}.$$

Note que $\varnothing \neq A \subset [a,b]$ (pois $f(b) > 0$). Seja $z = \inf A$. Do Teorema da Conservação do Sinal, $z \in (a,b)$ e $z \notin A$. Portanto $f(z) \leq 0$.

Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z) = \lim\limits_{x \to z^+} f(x) \geq 0$ (pois $x > z \Rightarrow x \in A \Rightarrow f(x) > 0$). Logo, $f(z) = 0$.□

Teorema 10 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e tal que* $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$. *Se* $f(a) < k < f(b)$ $(f(a) > k > f(b))$, *então existe* $\bar{x} \in (a,b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = k$.

De fato: Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então

$$g : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua, } g(a) < 0 \text{ e } g(b) > 0$$

e do Teorema do Anulamento, existe $\bar{x} \in [a,b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$. Portanto $f(\bar{x}) = k$.□

7.2.1 Aplicações a localização de zeros e sobrejetividade

Aplicações a localização de zeros

Exemplo 57 *Mostre que*

$$f(x) = x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 2x + 1$$

tem uma raiz real no intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$.

De fato: Note que

$$f(-1) = -\frac{1}{3} \text{ e que } f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{24}.$$

Como f é contínua (em particular, em $[-1,-\frac{1}{2}]$) segue do Teorema do Anulamento que existe $\bar{x} \in [-1, -\frac{1}{2}]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Aplicações à sobrejetividade

Exemplo 58 *Mostre que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, é bijetora. Recorde que a inversa de f é a função, que chamamos "raiz cúbica", $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$.*

De fato: Vimos que f é injetora. Provemos que f é sobre. Note quedado $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $y \in (-n, n)$ e $f(n) \geqslant n$.

Como f é ímpar, temos $f(-n) \leqslant -n < y < n \leqslant f(n)$.

Visto que f é contínua, do Teorema do Valor Intermediário, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = y$. Isto mostra que f é sobrejetora.

Exemplo 59 *Seja $f_n(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$. Então, as funções*

$$f_{2k}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ \text{ e } f_{2k+1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}, \text{ são bijetoras.}$$

As suas inversas são as raízes $n-$ésimas, $f_n^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$. Estas funções são contínuas em seus domínios.

De fato: Como $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$, segue que $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é injetora.

Mostremos que $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é sobrejetora. Note que $f(0) = 0$ Logo, dado $y \in \mathbb{R}^+$, seja $\ell \in \mathbb{N}^*$ tal que $y \in [0, \ell)$ e $f_n(\ell) \geqslant \ell$.

Como $0 \leq y < \ell \leqslant f_n(\ell)$ e f é contínua,

do Teorema do Valor Intermediário, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = y$.

Mostrando que $f_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ e $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é sobrejetora.

Como $f_{2k+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ínpar o resultado segue.

Veremos que a inversa de uma função contínua é uma função contínua e disto seguirá que as raízes são funções contínuas.

7.3 O Teorema de Weierstrass e Aplicações

O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema 11 (de Weierstrass ou do Valor Extremo) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, existirão $p, q \in [a, b]$ tais que*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Prova: Primeiramente mostremos que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então $Im(f) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ é limitado. Considere o conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ é limitada em } [x, b]\} \subset [a, b].$$

Note que $A \neq \varnothing$ ($b \in A$) e limitado. Seja $c = \inf(A)$. Se $a < c$, da continuidade da f em c, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < 1$, $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$. Se $x_1, x_2 \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$, $x_1 < c$ e $x_2 \in A$, $\sup\{|f(x)| : x \in [x_2, b]\} = L_2$ e $\sup\{|f(x)| : x \in [x_1, x_2]\} = L_1$ ($L_1 \leqslant |f(c)| + 1$). Logo $\sup\{|f(x)| : x \in [x_1, b]\} = \max\{L_1, L_2\}$ e isto é uma contradição pois $c = \inf(A)$.

Vamos mostrar que existe $p \in [a, b]$ tal que $f(p) \leqslant f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Seja $m = \inf(Im(A))$. Se $m = f(b)$ acabamos. Se $m < f(b)$, seja $B = \{z \in [a, b] : m < f(x), x \in [z, b]\}$. Se $p = \inf(B)$, $f(p) = m$ pois se $f(p) > m$ chegamos (como antes) a uma contradição com $p = \inf(B)$. A existência de q segue da mesma forma.□

Se o intervalo não for limitado o teorema de Weierstrass não vale, em geral, por exemplo, $f(x) = x^3$ não é limitada e $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ não tem máximo, em $[0, +\infty)$.

Se o intervalo não for fechado, o resultado também não vale, em geral. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, 1]$ não é limitada e a função $f(x) = x$ não tem mínimo em $(0, 1]$.

Se a função não for contínua, o resultado também não precisa valer. Por exemplo, $f(x) = x$ para $x \in [0, 2)$ e com $f(2) = 1$ não tem máximo.

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário 7 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se*

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ e } M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

então

$$Im(f) = f([a, b]) = [m, M].$$

Exemplo 60 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $\bar{x}$ um ponto de máximo (mínimo) de f.*

$$\text{Se } \bar{x} \in (a, b), \text{ e } \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \text{ existe, então } L = 0.$$

Diremos que L, quando existir, será a derivada f em $\bar{x}$ e escreveremos $L =: f'(\bar{x})$.

De fato: Como $f(x) \leqslant f(\bar{x})$ para todo $x \in [a, b]$ e como $\bar{x} \in (a, b)$ temos do Teorema da Comparação que

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \leqslant 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \geq 0.$$

Logo $L = 0$.□

Exemplo 61 *Seja* $f(x) = x^3 - 3x + 4$*, encontre os candidados a pontos de máximo e mínimo locais de* f*.*

Solução: Vamos procurar por pontos $\bar{x}$ tais que

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} (x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2 - 3) = 3(\bar{x}^2 - 1) = 0.$$

Ou seja $\bar{x} = 1$ ou $\bar{x} = -1$. Veremos mais tarde que $\bar{x} = 1$ é um mínimo local enquanto que $\bar{x} = -1$ é um máximo local.

Exercício 11 (Entregar dia 03/10) *Explore essa idéia para uma função quadrática* $f(x) = ax^2+bx+c$*, com* $a, b, c \in \mathbb{R}$*. Conclua que, se* $a > 0$ $(a < 0)$*,* f *assume o seu mínimo (máximo) em* $-b/2a$

7.4 A inversa de uma função contínua é contínua

A inversa de uma função contínua é contínua

Proposição 27 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e injetora. Então* f *é estritamente monótona. Se* $f([a, b]) = [m, M]$ *e* $p \in [a, b]$*,* $\lim\limits_{y\to f(p)} f^{-1}(y) = p$*.*

De fato: É fácil ver que f é estritamente monótona. Se $p \in (a, b)$ e f é estritamente crescente, dado $\epsilon > 0$ escolha $\epsilon > \delta > 0$ tal que

$$x \in [a, b],\ p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$$

Se $x_1, x_2 \in [a, b], p-\delta < x_1 < p < x_2 < p+\delta$ temos $f(x_1) < f(p) < f(x_2)$ e, se $\delta' = \min\{f(p) - f(x_1), f(x_2) - f(p)\}$ temos (usamos TVI)

$$y \in D_{f^{-1}},\ \overbrace{f(p) - \delta'}^{f(x_1)\leqslant} < y < \underbrace{f(p) + \delta'}_{\leqslant f(x_2)} \Rightarrow |f^{-1}(y) - p| < \delta < \epsilon.$$

Faça o caso f estritamente decrescente.$\square$

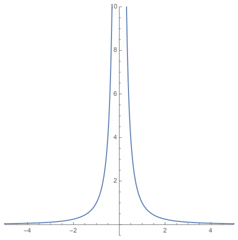
8 Limites Infinitos e no Infinito

8.1 Limites Infinitos e assíntotas verticais

Limites Infinitos e assíntotas verticais

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Quando x se aproxima de $p = 0$, x^2 também se aproxima de 0 e, consequentemente, $\dfrac{1}{x^2}$ fica arbitrariamente grande para valores de x próximos de $p = 0$.



Para indicar este fato escrevemos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$

Observação: Neste caso, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$. Por isso, muitas vezes nos referimos a este fato como $f(x)$ **diverge para** $+\infty$ **quando** x **tende a zero**. A reta vertical $x = 0$ é chamada uma **assíntota vertical** do gráfico de f.

Definição 35 (Limite Infinito) *Seja f uma função e p um ponto de acumulação de D_f. Então diremos que*

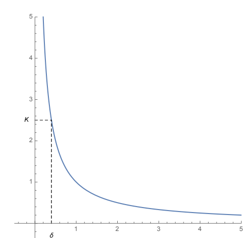
- *$f(x)$ **diverge para** $+\infty$ **quando** x **tende a** p se, dado $K > 0$, existir $\delta > 0$ tal que* $x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > K$. *Notação* $\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$.

- *$f(x)$ **diverge para** $-\infty$ **quando** x **tende a** p se, dado $K > 0$, existir $\delta > 0$ tal que* $x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) < -K$. *Notação* $\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$.

- *Analogamente definimos* $\lim_{x \to p^+} f(x) = \pm\infty$ $\left(\lim_{x \to p^-} f(x) = \pm\infty\right)$ *quando p é ponto de acumulação à direita (esquerda) de D_f.*

Exemplo 62 *Verifique que* $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

Se $K > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que $1/x > K$ sempre que $0 < x < \delta$.
Isto sugere que devemos tomar $\delta = 1/K$.



De fato: Seja $K > 0$ escolha $\delta = \frac{1}{K}$. Então

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = K.$$

Isto mostra que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. A reta vertical $x = 0$ é uma **assíntota vertical** do gráfico da função.

Exercício: Prove que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Definição 36 *A reta $x = p$ é chamada de **assíntota vertical** do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty.$$

A seguinte proposição será muito útil para calcular limites.

Proposição 28 *Seja* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *um ponto de acumulação de* D_f. *Se* $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ *e existir* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$
para $x \in D_f$ *tal que* $0<|x-p|<r$ *então,* $\lim_{x\to p} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ $(-\infty)$.

Observação: O resultado também vale para os casos $x\to p^+$ e $x\to p^-$. Basta que a função restrita a $D^+ = D_f \cap (p,\infty)$ e/ou a $D^- = D_f \cap (-\infty, p)$ esteja nas condições da proposição.

Prova da Proposição:

Dado $K > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > K.$$

De fato: Como

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0,$$

dado $\epsilon = \frac{1}{K} > 0$, existe $0 < \delta < r$, tal que

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow 0 < f(x) < \epsilon = \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > K.$$

Isto mostra que $\lim_{x\to p} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Exemplo 63 *Analise os limites seguintes e interprete-os graficamente*:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}.$$

De fato:

- $\lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0 = \lim_{x\to 1^-} (x-1)$;
- se $x > 1$, então $x - 1 > 0$; e, se $x < 1$, então $x - 1 < 0$.

Segue da Proposição anterior que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

O $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ não existe nem diverge para $+\infty$ ou $-\infty$.
A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico da função.

8.2 Propriedades dos limites infinitos

Propriedades dos limites infinitos
Seja L um número real. Temos:

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = L \\ \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty,\ L>0 \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty,\ L<0 \\ \lim_{x\to p} (f+g)(x) = -\infty. \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = L \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty,\ L>0 \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty,\ L<0 \\ \lim_{x\to p} (f+g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f+g)(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f+g)(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty$$

Observação: As propriedades acima são válidas se, em lugar de $x \to p$, usarmos $x \to p^+$ ou $x \to p^-$.

Exemplo 64 *Determine* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\cos x}_{\to 1} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} = +\infty.$$

Exemplo 65 *Determine* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^4}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} = +\infty.$$

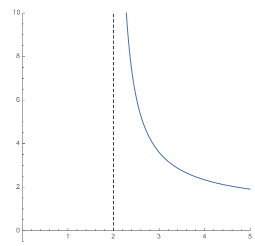
Observação: As propriedades acima sugerem como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, por exemplo, se $L \in \mathbb{R}$,

$$L \pm \infty = \pm\infty,\ \infty\cdot(-\infty) = -\infty \text{ e } L\cdot(\pm\infty) = \pm\infty(\mp\infty) \text{ se } L > 0 (L < 0).$$

Também temos **indeterminações**, por exemplo,

$$\boxed{\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad 0\cdot\infty.}$$

Exemplo 66 *Determine* $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x}{x^2-4}$.



De fato:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+}\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\to +\infty}\underbrace{\frac{x^2+3x}{x+2}}_{\to 5/2} = +\infty$$

Exemplo 67 *Determine* $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

De fato:

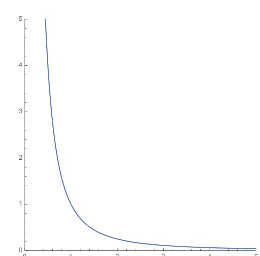
Observe que $\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}$. Assim,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1^-}\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to -\infty}\underbrace{(x^2+x+1)}_{3} = -\infty.$$

8.3 Limites no Infinito e assíntotas horizontais

Limites no Infinito e assíntotas horizontais

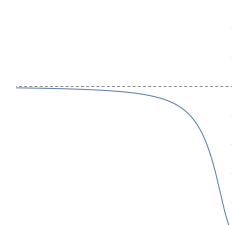
Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$. Para x arbitrariamente grande $f(x)$ se torna arbitrariamente pequena.



Expressamos este fato escrevendo

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Da mesma forma, para $x < 0$ com valor absoluto arbritrariamente grande temos que $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ fica arbitrariamente próxima de 1.



O gráfico para $x > 0$ é a reflexão do gráfico acima em torno do eixo y.

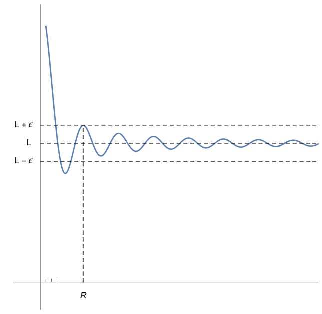
Expressamos este fato escrevendo

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1.$$

Note que, neste exemplo, f é par e quando $x > 0$ arbitrariamente grande f fica arbitrariamente próxima de 1. Escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Definição 37 (Limite no Infinito) *Seja* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função. Se* D_f *não é limitado superiormente,*

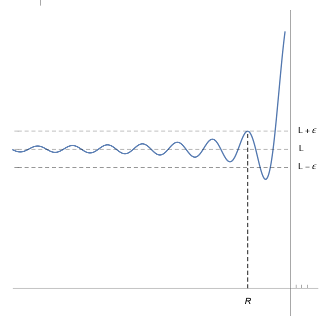


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se, e só se, dado $\varepsilon > 0$, *existir* $R > 0$ *tal que*

$$x \in D_f,\ x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 38 (Limite no Infinito) *Seja* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função. Se* D_f *não é limitado inferiormente,*



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se, e só se, dado $\varepsilon > 0$, *existir* $R < 0$ *tal que*

$$x \in D_f,\ x < R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 39 *A reta* $y = L$ *é uma* ***assíntota horizontal*** *ao gráfico de* f *se ou*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad ou \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Exemplo 68 *Temos* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$

De fato:

Dado $\varepsilon > 0$, queremos achar $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$x > R > 0 \implies |f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Tomando $R = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ temos

$$x > R > 0 \implies 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{R} = \varepsilon.$$

Logo $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$ A prova para $x \to -\infty$ é análoga.

Observação: As propriedades do limite são também válidas se $x \to p$ for substituído por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo 69 *Calcule* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$ *onde* n *é um inteiro positivo.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0.$$

Em geral, temos que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$ onde $0 < r \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 70 *Calcule* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}{2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \frac{1+0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que o limite quando $x \to -\infty$ é $\frac{1}{2}$.

Observação: A estratégia para calcular limites no infinito de funções racionais consiste em colocar em evidência a mais alta potência de x no numerador e no denominador.

Exemplo 71 *Ache as assíntotas horizontais de* $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5}$.

Consideremos $x \to +\infty$, então $x > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(2+\frac{1}{x^2})}}{x(3+\frac{5}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Agora, consideramos $x \to -\infty$, então $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3+\frac{5}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

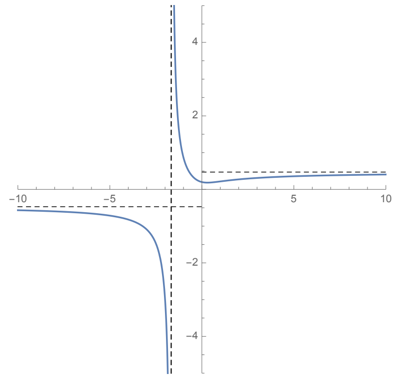
Logo, a reta

$y = \frac{\sqrt{2}}{3}$ é assíntota para $x \to +\infty$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ é assíntota para $x \to -\infty$.

Note que

$$\lim_{x\to-5/3^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-5/3^-} f(x) = -\infty$$

Juntando as informações, este é o gráfico de $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5}$



Exemplo 72 *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{\text{sen}x}{x}\right)$.

Note que $\left|\dfrac{\text{sen } x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$, $x>0$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, do Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{sen } x}{x}=0$.

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{\text{sen } x}{x}\right)=2$.

Exemplo 73 *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\dfrac{1}{x}$.

Fazendo $u=\dfrac{1}{x}$ temos que quando $x\to+\infty$, $u\to 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} x\,\text{sen}\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{\text{sen}u}{u} = 1.$$

Exemplo 74 *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{\text{sen}x}{x}\right)$.

Note que $\left|\dfrac{\text{sen } x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$, $x>0$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, do Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{sen } x}{x}=0$.

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{\text{sen } x}{x}\right)=2$.

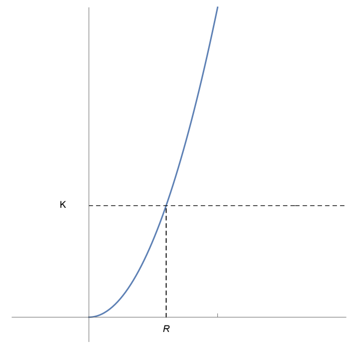
Exemplo 75 *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\text{sen}\dfrac{1}{x}$.

Fazendo $u=\dfrac{1}{x}$ temos que quando $x\to+\infty$, $u\to 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} x\,\text{sen}\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{\text{sen}u}{u} = 1.$$

8.4 Limites Infinitos no Infinito

Limites Infinitos no Infinito



Note que, se $f(x) = x^2$ então, $f(x)$ fica arbitrariamente grande quando x fica arbitrariamente grande. Isto é expresso da seguinte maneira

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$$

De fato: Dado $K > 0$, se tomarmos $R = \sqrt{K}$ segue que, se

$$x > R \Rightarrow f(x) = x^2 > R^2 = (\sqrt{K})^2 = K.$$

Utilizamos a notação

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

para indicar que $f(x)$ diverge para $+\infty$ quando x diverge para $+\infty$.

De forma análoga utilizamos as notações

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Definição 40 (Limite Infinito no Infinito) • $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

se, e somente se, dado $K > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$x \in D_f, \ x > R \Rightarrow f(x) > K.$$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

se, e somente se, dado $K < 0$, existe $R > 0$ tal que

$$x \in D_f, \ x > R \Rightarrow f(x) < K.$$

De maneira análoga definimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ \text{ e } \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Observação: Todas as propriedades de limites infinitos valem se substituirmos $x \to p$ por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo 76 • *Prove, usando a definição, que* $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

De fato, se $f(x) = x$, dado $K > 0$ tomando $R = K$ temos

$$x > R \Rightarrow f(x) = x > R = K$$

- *Segue das propriedades do limite que* $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, *onde* n *é um inteiro positivo. De fato,*

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \left(\lim_{x\to+\infty} x\right)^n = +\infty$$

Exemplo 77 *Determine* $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)$.

Temos uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Logo, não podemos aplicar a propriedade da soma. Contudo, podemos escrever

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty \cdot (+\infty - 1) = +\infty.$$

Exemplo 78 *Determine* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty$$

Exemplo 79 *Determine* $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x^2+1}{1-2x^2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{1-2x^2} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-2\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} x\frac{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}-2\right)}\\
&= (-\infty)\left(-\frac{1}{2}\right) = +\infty.
\end{aligned}$$

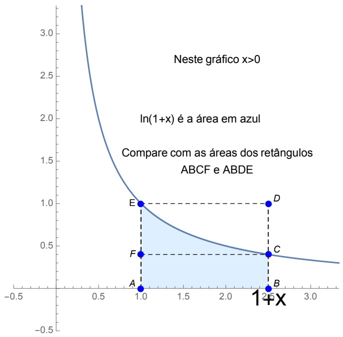
9 Logaritmo e Exponencial

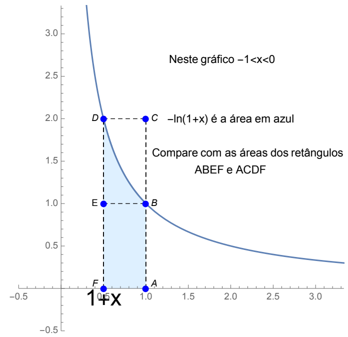
Logaritmo e Exponencial Para $x > 0$ definimos a função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- para $x \geq 1$, $\ln x$ é a a área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = 1$ até $s = x$ e,
- para $x \in (0, 1)$, $\ln x$ é o negativo da área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = x$ até $s = 1$.

Esta função é estritamente crescente, portanto injetora. Veremos mais tarde que ln é sobrejetora.

A inversa de ln é a exponencial denotada por $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$.





Exemplo 80

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

Da figura anterior

$$\tfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad x > 0.$$

Dividindo por x:

$$\tfrac{1}{1+x} \leq \tfrac{\ln(1+x)}{x} \leq 1, \quad \forall\, x > 0.$$

Do Teorema do Confronto, $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Por outro lado,

$$-x \leq -\ln(1+x) \leq \tfrac{-x}{1+x}, \quad -1 < x < 0$$

Dividindo por $-x > 0$,

$$1 \leq \tfrac{\ln(1+x)}{x} \leq \tfrac{1}{1+x}, \ \forall -1 < x < 0.$$

Do Teorema do Confronto, $\lim_{x\to 0^-} \ln(1+x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Como ambos limites laterais existem e valem 1, segue que

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(1+x)}{x} = 1. \square$$

Exemplo 81 $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ *e* $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x.y)$.

De fato: Basta ver que, se $y < x$, a área sob o gráfico da função $\frac{1}{x}$, entre y e x, corresponde a $\ln(x) - \ln(y)$ e que esta área coincide com a área sob o gráfico da função $\frac{1}{x}$, entre 1 e $\frac{x}{y}$ (aproxime ambas por retângulos). A segunda igualdade decorre da primeira.

Exemplo 82 (1) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é contínua e bijetora (estritamente crescente).*

De fato: Como $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=0$ se, e somente se, $\lim_{y\to 1}\ln(y)=0$, segue de $\ln(x)-\ln(y)=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ que ln é contínua. A injetividade também segue. Como $\ln(2^n)=n\ln(2)$ e $\ln(2^{-n})=n\ln(1/2)$, segue do teorema do valor intermediário que ln é sobrejetora.

Exemplo 83 *$e^{x+y}=e^x e^y$, para todo $x,y\in\mathbb{R}$, e*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

É claro que $ln(e^x e^y)=x+y=ln(e^{x+y})$ a primeira afirmativa segue. Escreva $g(x)=e^x-1$. Note que, $x=\ln(z+1)$ se, e somente, $z=e^x-1$. Logo $g(x)=f^{-1}(x)$, onde $f(x)=\ln(x+1)$.

Dos exemplos anteriores, $z\to 0\Leftrightarrow x\to 0$ e $1=\lim_{z\to 0}\frac{\ln(z+1)}{z}$. Logo

$$1=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(z+1)}{z}}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(z+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$