Aula de Revisão para a Segunda Prova

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

16 de Novembro de 2023
Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Logaritmo e Exponencial

Para $x > 0$ definimos a função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- para $x \geq 1$, $\ln x$ é a a área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = 1$ até $s = x$ e,
- para $x \in (0, 1)$, $\ln x$ é o negativo da área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = x$ até $s = 1$.

Esta função é estritamente crescente, portanto injetora. Veremos mais tarde que $\ln$ é sobrejetora.

A inversa de $\ln$ é a exponencial denotada por $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$.

Exemplo

- $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \;\; e \;\; \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \; e \; \ln(x) + \ln(y) = \ln(x.y).$
- $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínua e bijetora (estritamente crescente).*
- $e^{x+y} = e^x e^y$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$, *e*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Logaritmo e Exponencial - Outras bases

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. Definimos o logaritmo de base a, denotado por $\log_a$, da seguinte forma:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \forall\, x > 0.$$

É claro que $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua e bijetora (estritamente monótona) e sua inversa é a exponencial de base a denotada por $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ também é uma função contínua e bijetora.

$$\boxed{\log_a(a^x) = x,\ x \in \mathbb{R} \quad e \quad a^{\log_a x} = x,\ x > 0.}$$

$$\boxed{x = \log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln(a)}} \text{ e } \boxed{\ln(a^x) = x \ln(a)}$$

Proposição (Propriedades)

Se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b \in (0, \infty) \backslash \{1\}$, $x, y \in (0, \infty)$, *então*

(a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(b) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

(c) $\log_a x^y = y \log_a x$.

(d) *Se* $a > 1$ *a função logarítmica é estritamente crescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $\log_a x < \log_a y$.

(e) *Se* $0 < a < 1$ *a função logarítmica é estritamente decrescente, ou seja, se* $x < y$, *então* $\log_a x > \log_a y$.

Proposição (Propriedades)

Se a e b são números reais positivos e $x, y \in \mathbb{R}$, *então*

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $1 = a^x \cdot a^{-x}$ *(potências e raízes)*

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(c) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$,

(d) *Para* $a>1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x>y \Rightarrow a^x > a^y$, *ou seja,* $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ *é estritamente crescente.*

(e) *Para* $0<a<1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x>y \Rightarrow a^x < a^y$, *ou seja,* $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ *é estritamente decrescente.*

(f) *A função* $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *é contínua e bijetora. Se* $a>1$ $(a<1)$,

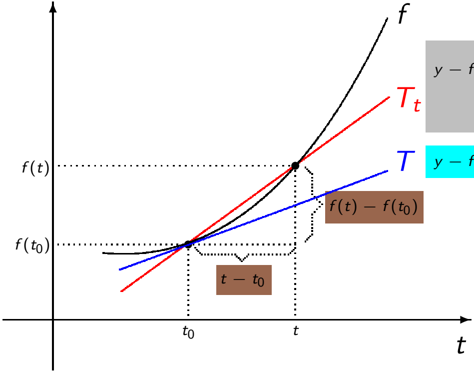
$$\lim_{x\to -\infty} a^x = 0 \quad (+\infty) \qquad \lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty \quad (0)$$

A derivada: Definição

Definição

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f.

- *Se existir o limite* $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L \in \mathbb{R}$, *diremos que L é a* **derivada** *de f em p e escreveremos* $f'(p) = L$.
- *Se f admitir derivada $f'(p)$ em p, diremos que f é* **derivável** *em p. Se f admitir derivada em todo ponto de $A \subset D_f$, diremos que f é* **derivável** *em $A \subset D_f$. Se $A = D_f$, diremos simplesmente que f é* **derivável**.



$$y - f(t_0) = \underbrace{\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}_{m_t}(s - t_0)$$

$$y - f(t_0) = m(s - t_0)$$

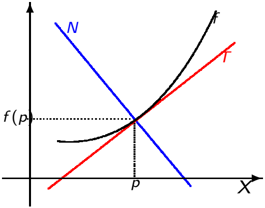
Reta Tangente e Reta Normal

Definição (Reta Tangente e Reta Normal)

Se f é diferenciável em p, a **reta tangente** *ao gráfico de $y = f(x)$ em $(p, f(p))$ é dada por $\big($vetor direção $(1, f'(p))\big)$*

$$y = f(p) + f'(p)(x - p), \quad \Big((x, y) = (p, f(p)) + (1, f'(p))(x - p)\Big).$$

Definimos a **reta normal** *ao gráfico de $y = f(x)$ em $(p, f(p))$ como a reta por este ponto que é perpendicular à reta tangente.*



Se $f'(p) = 0$, $x = p$ é a reta normal. Se $f'(p) \neq 0$, as retas por $(p, f(p))$ são da forma $r : (x, y) = (p, f(p)) + (1, a)(x - p)$ e têm vetor direção $(1, a)$. Neste caso, a reta normal é $\big((1, a) \perp (1, f'(p))\big)$

$$y = f(p) - \frac{1}{f'(p)}(x - p), \quad \Big((x, y) = (p, f(p)) + (1, \frac{-1}{f'(p)})(x - p)\Big).$$

A função derivada

O seguinte Teorema estabelece uma relação entre continuidade e diferenciabilidade.

Teorema

Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p.

Note que não vale a recíproca. A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo (Critério Negativo)

Se f não é contínua em p então f não é diferenciável em p.

Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema (Fórmulas de Derivação)

Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, são válidas as fórmulas de derivação a seguir

(a) $f(x) = k \Rightarrow \; f'(x) = 0,$

(b) $f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f'(x) = nx^{n-1},$

(c) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; f'(x) = \cos x,$

(e) $f(x) = \cos x \;\Rightarrow\; f'(x) = -\operatorname{sen} x,$

(f) $f(x) = e^x \Longrightarrow\; f'(x) = e^x,$

(g) $f(x) = \ln x \;\Longrightarrow\; f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

Propriedades da Derivada

Teorema (Propriedades da Derivada)

Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então

(a) *kf será diferenciável em p e*

$$(kf)'(p) = kf'(p),$$ **(Multiplicação por constante)**

(b) *$f + g$ será derivável em p e*

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p),$$ **(Derivada da Soma)**

(c) *fg será derivável em p e*

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p),$$ **(Derivada do Produto)**

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ *será derivável em p, se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2},$$ **(Derivada do Quociente)**.

A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g.

Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam f e g diferenciáveis com $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$. Se $h = f \circ g$, então h é diferenciável e

$$\boxed{h'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \textit{para todo } x \in D_g.} \tag{1}$$

Derivada da Função Inversa

Proposição (Derivada de funções inversas)

Seja f invertível e definida em um intervalo. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$, com $f'(q) \neq 0$, então f^{-1} será diferenciável em p e

$$\boxed{(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\,.}$$

Derivação Implícita

Exemplo

Se $x^2 + y^2 = 25$, *encontre* $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando a ambos os lados da equação e usando a Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25 \Rightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas mais importantes do Cálculo. A sua demonstração depende do seguinte resultado:

Teorema (de Rolle)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *é contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b) *e* $f(a)=f(b)$, *então existirá* $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=0$.

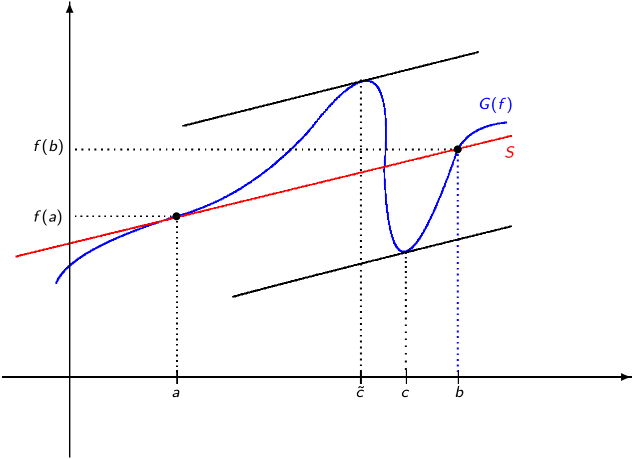
Teorema (do Valor Médio)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),}$$

ou seja

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.}$$


$G(f)$
S
$f(b)$
$f(a)$
a
$\tilde{c}$
c
b

Agora vamos obter informação do comportamento de uma função a partir de suas derivadas. Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário (1)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Se $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, *$f$ será estritamente crescente em* $[a, b]$.

Se $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, *$f$ será estritamente decrescente em* $[a, b]$.

Agora vamos obter informação do comportamento de uma função a partir de suas derivadas. Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário (1)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Se *$f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, f será estritamente crescente em $[a, b]$.*

Se *$f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, f será estritamente decrescente em $[a, b]$.*

Corolário (2)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

- *Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, f será crescente em $[a, b]$.*
- *Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, f será decrescente em $[a, b]$.*

Exemplo

Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ definida por

$f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é bijetora.

Máximos e Mínimos

Definição (Máximos e Mínimos Locais)

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo local** de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um **máximo local**.*
- *Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo local** de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **mínimo local**.*
- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo local**, se x_0 for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local.*

Definição (Máximos e Mínimos Globais)

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de máximo global** *de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$. Neste caso, $f(x_0)$ é um* **máximo global**.
- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* **ponto de mínimo global** *de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I$. Neste caso, $f(x_0)$ é* **mínimo global**.
- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um* **ponto extremo global**, *se x_0 for um ponto de máximo ou de mínimo global.*

Definição

Um **ponto crítico** *de uma função f é um ponto c onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Proposição

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $c \in (a, b)$ for um ponto extremo (máximo ou mínimo) de f, então $f'(c) = 0$.

Método do Intervalo Fechado

Para encontrar os valores máximos e mínimos globais de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos pontos críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo.
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo global e o menor desses valores é o mínimo global.

Critério da derivada primeira

O resultado abaixo segue dos Corolários do Terorema do Valor Médio.

Proposição (Critério da derivada primeira)

Seja c um ponto crítico de f. Se f é contínua em $(c-\delta, c+\delta)$ e diferenciável em e $(c-\delta, c+\delta)\backslash\{c\}$

(i) *Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.*

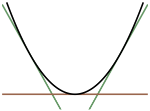
(ii) *Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.*

Concavidade

Definição (Concavidade)

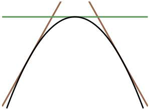
Seja f derivável em (a, b). Diremos que

- *f é* **convexa** *ou tem* **concavidade para cima** *em (a, b) se, para quaisquer $x, p \in (a, b)$, com $x \neq p$, tivermos*



$$f(x) > T_p(x).$$

- *f é* **côncava** *ou tem* **concavidade para baixo** *em (a, b) se, para quaisquer $x, p \in (a, b)$, com $x \neq p$, tivermos*



$$f(x) < T_p(x).$$

O nosso próximo resultado estabelece condições suficientes para que uma função f tenha concavidade para cima ou para baixo.

Teorema

Seja f uma função derivável em (a, b).

(i) *Se f' for estritamente crescente em (a, b), então f terá concavidade para cima em (a, b).*

(ii) *Se f' for estritamente decrescente em (a, b), então f terá concavidade para baixo em (a, b).*

Corolário (Critério de concavidade)

Seja f uma função derivável até segunda ordem em (a, b).

(i) *Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f terá concavidade para cima em (a, b).*

(ii) *Se $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f terá concavidade para baixo em (a, b).*

Pontos de Inflexão

Definição

Seja f uma função contínua em $p \in D_f$. Diremos que p é **ponto de inflexão de f** *se*

(i) *Existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p \in (a, b) \subset D_f$.*

(ii) *f for differenciável em x para $x \in (a, b)$, $x \neq p$.*

(iii) *f tiver concavidade para baixo (para cima) em (a, p) e para cima (para baixo) em (p, b).*

Ou seja, um ponto de inflexão é um ponto onde a concavidade da função muda.

Corolário

Se f for duas vezes diferenciável em (a, b) e $p \in (a, b)$ for um ponto de inflexão de f, então $f''(p) = 0$.

Em geral não vale a volta. Basta considerar a função $f(x) = x^4$. No entanto, se a derivada segunda for estritamente monótona então vale a volta e, em particular,

Teorema

Seja f três vezes diferenciável em (a, b) com derivada terceira contínua. Se $p \in (a, b)$ for tal que $f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$, então p será um ponto de inflexão de f.

Pontos Extremos: Critérios envolvendo derivadas

Teorema

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivável em* (a, b) *e* $p \in [a, b]$.

(i) *Se* $f'(p) = 0$ *e* f' *for crescente em* (a, b), *então* p *será um ponto de mínimo local de* f.

(ii) *Se* $f'(p) = 0$ f' *for decrescente em* (a, b), *então* p *será um ponto de máximo local de* f.

Proposição (Critério da derivada segunda)

Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tenha derivadas até ordem dois contínuas em (a, b) e que $p \in (a, b)$.

(i) *Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$, então p será um ponto de mínimo local de f.*

(ii) *Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$, então p será um ponto de máximo local de f.*

Análise do gráfico de uma função f: Estratégia

- Determinamos, se possível, os pontos onde f se anula e os intervalos onde f é positiva e onde f é negativa.
- Determinamos, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais de f.
- Calculamos f' e determinamos, se possível, os pontos críticos de f (zeros de f' e pontos onde f' não existe).
- Estudamos o sinal de f' e determinamos os intervalos onde f é crescente ou decrescente.
- Calculamos, se possível, f'' e f''' e classificamos os pontos críticos e encontramos os pontos de inflexão.
- Analisamos o sinal de f'' para determinar a concavidade em cada intervalo.

Regras de L'Hospital

As regras de L'Hospital se aplicam a cálculos de limites que apresentam as seguintes indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Teorema (De Cauchy)

Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Teorema (Regra de L'Hospital)

Sejam f e g funções differenciáveis em x com $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (p-r, p+r)\backslash\{p\}$ e para algum $r > 0$. Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 = \lim_{x \to p} g(x)$$

e $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ *(ou* $\ell = \pm\infty$*), então* $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Observação: A regra de L'Hospital ainda será válida se, em lugar de $x \to p$, tivermos $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

2ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g funções deriváveis em x com $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (p-r, p+r)\backslash\{p\}$ e algum $r > 0$. Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty = \lim_{x \to p} g(x)$$

e $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (ou divergir para $\pm\infty$), então $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ também existirá (ou divergirá para $\pm$ infinito) e

$$\boxed{\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Observação: A 2ª regra de L'Hospital ainda vale se, em lugar de $x \to p$, tivermos $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. A regra continua válida se um ou ambos os limites for $-\infty$ em lugar de $+\infty$.

Polinômios de Taylor

Se a função dada $f(x)$ for derivável até ordem n e procuramos um polinômio $P_n(x)$ de grau n que 'melhor aproxima' f ao redor de p, isto é, tal que

$$\lim_{x\to p} \frac{E_n(x)}{(x-p)^n} = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-p)^n} = 0.$$

Procedendo como antes, concluímos que $P_n(x)$ terá a forma

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n, \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j \end{aligned}$$

o qual é chamado de **Polinômio de Taylor de Ordem n de $f(x)$ ao redor de p.**

Para avaliarmos a precisão com que uma função é aproximada por polinômios de Taylor, vamos definir o erro por

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

onde $f(x)$ é a função dada e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f ao redor de p.

O teorema a seguir nos fornece uma fórmula para o erro.

Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

Suponhamos que a função f seja $(n+1)$ vezes diferenciável em um intervalo aberto I e sejam $p, x \in I$. Então

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j + E_n$$

onde

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-p)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algum c entre p e x.

Assíntotas Verticais, Horizontais e Oblíquas

Recordemos a definição de assíntotas verticais

Definição (Assíntota Vertical)

A reta $x = p$ é uma **assíntota vertical** *ao gráfico de f se*

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x\to p} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty.$$

Definição (Assíntota Oblíqua)

Seja f uma função. Se existir uma reta de equação $y = mx + n$ tal que

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (mx + n)] = 0$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx + n)] = 0,$$

então tal reta será dita uma **assíntota** *para f.*

Se $m = 0$, teremos uma **assíntota horizontal** *e, se $m \neq 0$, teremos uma* **assíntota oblíqua**.

Procedimento para determinar assíntotas: Primeiro determine m, caso exista, através do limite

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Em seguida, calcule

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx].$$

Se n for finito então $y = mx + n$ será assíntota para $x \to \pm\infty$.

Esboço de Gráficos de Funções

A lista de passos úteis para esboçar o gráfico de uma função.

1. **Explicite o domínio da função.**
2. Calcule os limites laterais de f nos pontos onde f não é contínua ou não estiver definida.
3. **Calcule os limites de f para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.**
4. Determine as assíntotas oblíquas.
5. **Localize as raízes de f.**
6. Encontre os pontos críticos e determine os intervalos de crescimento e de decrescimento.
7. **Determine os pontos de máximo e mínimo e calcule os valores da função nestes pontos.**
8. Estude a concavidade e destaque os pontos de inflexão.
9. **Esboce a curva utilizando todas as informações anteriores.**

Anti-derivadas ou Primitivas

Sabemos que a derivada de uma função constante é zero.

Entretanto, uma função pode ter derivada zero em todos os pontos de seu domínio e não ser constante; por exemplo $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ é tal que $f'(x) = 0$ em todo ponto de seu domínio, mas não é constante.

No entanto vale o seguinte resultado

Corolário

Se f for contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será constante.

Corolário

Duas funções $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ diferem por uma constante.

Definição

Uma **primitiva** *ou* **anti-derivada** *de f definida em um intervalo I é uma função derivável F definida em I tal que $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.*

As primitivas de f são da forma $F(x) + k$. Denotamos por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \quad k \text{ constante}$$

à *família* de primitivas ou **integral indefinida de** f.

Das fórmulas de derivação já vistas seguem as seguintes primitivas

$(a)\ \int c\,dx = cx + k;$ $(b)\ \int e^x\,dx = e^x + k;$

$(c)\ \int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ \alpha \neq -1;$ $(d)\ \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k;$

$(e)\ \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + k,\ x > 0;$ $(f)\ \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + k,\ x < 0;$

$(g)\ \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k;$ $(h)\ \int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + k;$

$(i)\ \int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + k;$ $(j)\ \int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k;$

$(k)\ \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + k.$

Mudança de Variável ou Regra da Substituição

Sejam f e g tais que $Im(g) \subset D_f$. Suponhamos que F seja uma primitiva de f.

Então $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$, de fato, pela Regra da Cadeia,

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Portanto,

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + k,$$

onde k é uma constante arbitrária.

Se fizermos a *mudança de variável* ou *substituição* $u = g(x)$ temos

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int F'(g(x))g'(x)\ dx = \int [F(g(x))]'\ dx$$

$$= F(g(x)) + k = F(u) + k = \int f(u)\,du,$$

recordando que $F' = f$. Assim, temos a **Regra da Substituição**:

$$\boxed{\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)\ dx}_{du} = \int f(u)\ du = F(u) + k = F(g(x)) + k.}$$

Integração por Partes

Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Então, se $x \in (a, b)$,

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou seja,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Como $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$,

- encontrar uma primitiva para $f'(x)g(x)$, é equivalente a
- encontrar uma primitiva para $f(x)g'(x)$

e vale a **fórmula de integração por partes**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx\,.}$$

Notação alternativa. Tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x)\,dx$$

e podemos re-escrever a fórmula de integração por partes como

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.}$$