Material para a prova do dia 04/10/2023

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

02 de Outubro de 2023

Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos e são caracterizados pelos **Axiomas de Peano**:

1. Todo número natural tem um único sucessor.
2. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
3. Existe um único natural, chamado **zero** (denotado por 0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e, se $n \in X$, seu sucessor (denotado por $n+1$) também pertence a X. Então $X = \mathbb{N}$.

A adição é definida por: $n+0=n$, $n \in \mathbb{N}$, e $n+(p+1)=(n+p)+1$, $n, p \in \mathbb{N}$, (sabendo somar p sabemos somar $p+1$).

A multiplicação é definida por: $n \cdot 0 = 0$ e $n \cdot (p+1) = n \cdot p + n$, $n, p \in \mathbb{N}$.

Prova por Indução

O quarto Axioma de Peano é conhecido como axioma de indução e é frequentemente utilizado em demonstrações matemáticas.

Prova por Indução: Dado que uma proposição $P(n)$, definida para todo $n \in \mathbb{N}$, pode ser verdadeira ou falsa, para verificar que a mesma é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ basta verificar que:

- $P(0)$ é verdadeira e
- Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é.

Ordem

De maneira natural definimos uma ordem em $\mathbb{N}$. Diremos que $m \leqslant n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Esta relação tem as seguinte propriedades:

- O_1: *Reflexiva:* Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant n$.
- O_2: *Antisimétrica:* Se $m \leqslant n$ e $n \leqslant m$, então $m = n$.
- O_3: *Transitiva:* Se $m \leqslant n$ e $n \leqslant p$, então $m \leqslant p$.
- O_4: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que ou $m \leqslant n$ ou $n \leqslant m$.
- O_5: Se $m \leqslant n$ e $p \in \mathbb{N}$, então $m + p \leqslant n + p$ e $mp \leqslant np$.

Os Números Inteiros

A maneira usual de fazer a construção dos inteiros a partir dos naturais consiste em tomar os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação $(a, b) \sim (c, d)$ se $a + d = b + c$.

Desta forma, podemos representar $\mathbb{N} = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),\cdots\}$ e $-\mathbb{N}^* = \{\cdots,(0,3),(0,2),(0,1)\}$.

Tomar o sucessor significa somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar $(1, n)$ com $(0, n-1)$.

Os Números Racionais

Os números racionais são construídos tomando-se o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais $ad = bc$. Representamos um par (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{a}{b}$.

A **soma** e o **produto** em $\mathbb{Q}$ são dados, respectivamente, por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}\,.$$

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações "$+$" e "$\cdot$" satisfaz as propriedades de um corpo. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes:

Propriedades da Adição em $\mathbb{Q}$

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades da Multiplicação em $\mathbb{Q}$

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x(y+z) = xy + xz, \ \forall \, x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo $\mathbb{Q}$.

Proposição (Lei do Cancelamento)

Em $\mathbb{Q}$, vale

$$\boxed{x + z = y + z \implies x = y}$$

e, se $z \neq 0$

$$\boxed{x \cdot z = y \cdot z \implies x = y\,.}$$

Proposição

- *O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.*
- *O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.*
- *Para todo* $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.
- *Para todo* $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.

Definição (Ordem)

Diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-negativo}, \text{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \\ \textbf{positivo}, \text{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-positivo}, \text{ se } \frac{a}{b} \text{ não for positivo} \\ \textbf{negativo}, \text{ se } \frac{a}{b} \text{ não for não-negativo.} \end{cases}$$

Definição

Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Diremos que x é **menor do que** *y e escrevemos $x < y$, se existir $t \in \mathbb{Q}$ positivo tal que*

$$y = x + t.$$

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, isto é, também valem as propriedades seguintes:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y \;\text{ e }\; y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y,\; y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y \;\text{ e }\; z \geqslant 0 \implies xz \leqslant yz$.

Proposição

Para quaisquer x, y, z, w *no corpo ordenado* $\mathbb{Q}$, *valem*

(a) $$\left.\begin{array}{l} x \leqslant y \\ z \leqslant w \end{array}\right\} \Longrightarrow \; x + z \leqslant y + w.$$

(b) $$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} = \; xz \leqslant yw.$$

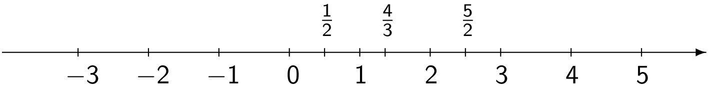
Outras propriedades:

Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$. Então valem

- $x < y \iff x + z < y + z$;
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$;
- $z > 0 \iff -z < 0$;
- Se $z > 0$, então $x < y \iff xz < yz$;
- Se $z < 0$, então $x < y \iff xz > yz$;
- $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < y \\ 0 \leqslant z < w \end{array}\right\} = xz < yw$;
- $0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;
- **(tricotomia)** $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$;
- **(anulamento do produto)** $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

$\mathbb{Q}$ não é completo

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real.



Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Nem todo ponto da reta real é racional.

Construção dos Números Reais - Cortes de Dedekind

Definição

Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades

- $\alpha \neq \varnothing$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- *Se $p \in \alpha$ e $\mathbb{Q} \ni q < p$, então $q \in \alpha$ (todos os racionais a esquerda de um elemento de α estão em α) e*
- *Se $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ com $p < r$ (α não tem um maior elemento).*

Observação

Note que:

- *Se α é um corte, $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.*
- *Se α é um corte, $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.*

Definição

Diremos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \subsetneq \beta$

Proposição

Se α, β, γ são cortes

- $\alpha < \beta$ *e* $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$.
- *Exatamente uma das seguintes relações é válida:* $\alpha < \beta$ *ou* $\alpha = \beta$ *ou* $\beta < \alpha$.
- *Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de* $\mathbb{R}$ *tem supremo.*
- *Entre dois números reais distintos existe um racional.*

Definição

- *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$.*
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Proposição

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. O corte β assim definido é denotado por $-\alpha$.

Prova: É fácil ver que
$-\alpha = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$.$\square$

Definição

- *Se α, β são cortes,*

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \{p \in \mathbb{Q} : \exists\ 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \alpha \text{ tais que } p \leqslant rs\}, \ \alpha, \beta > 0^* \\ \alpha \cdot 0^* = 0^*, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (-\alpha)(-\beta) \text{ se } \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] \text{ se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] \text{ se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

- $1^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.
- *Se $\alpha > 0$, $\alpha^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leqslant \frac{1}{q}$ e existe $r > 0$ tal que $q - r \notin \alpha\}$ e, se $\alpha < 0$, $\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$*

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e um número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ *satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso* $\mathbb{R}$ *é completo.*

Módulo de um Número Real

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}$. O **módulo** *ou valor absoluto de x é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Distância

Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. Então a **distância** de P a Q (ou de x a y) é dada por $|x-y|$. Assim $|x-y|$ é a **medida** do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x-0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0.

Exemplo

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|xy| = |x|\,|y|\,.}$$

Exemplo (Desigualdade triangular)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|\,.}$$

Limitação de Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definição

$A \subset \mathbb{R}$ *é* **limitado**, *se existe* $L > 0$ *tal que* $|x| \leqslant L, \forall x \in A$.

$A \subset \mathbb{R}$ *é* **ilimitado**, *se não é limitado.*

Proposição

$A \subset \mathbb{R}$ *é limitado se, e só se, existe* $L > 0$ *tal que* $A \subset [-L, L]$.

$A \subset \mathbb{R}$ *é ilimitado se, e só se, para todo* $L > 0$, *existe* $x \in A$ *tal que* $|x| > L$.

Limitante Superior e Inferior

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- *A é* **limitado superiormente**, *se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant L$, $\forall x \in A$. Neste caso, L é um* **limitante superior** *de A.*

- *A é* **limitado inferiormente**, *se existe ℓ tal que $x \geqslant \ell$, $\forall x \in A$. Neste caso, ℓ é um* **limitante inferior** *de A.*

Segundo a definição acima, podemos notar que $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, A for limitado superiormente e inferiormente.

Supremo

Definição (Supremo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\bar{L} \in \mathbb{R}$ é o supremo de A (escreveremos $\bar{L} = \sup A$) se for um limitante superior de A e para qualquer limitante superior L de A, tivermos $\bar{L} \leqslant L$.

- Quando $\bar{L} = \sup A \in A$, $\bar{L}$ será chamado **máximo** de A e escreveremos $\bar{L} = \max A$.
- Vimos que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem **supremo**.

Ínfimo

Definição (Ínfimo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\overline{\ell} \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A (escreveremos $\overline{\ell} = \inf A$) se for um limitante inferior de A e para qualquer limitante inferior ℓ de A, tivermos $\overline{\ell} \geqslant \ell$.

- Quando $\overline{\ell} = \inf A \in A$, $\overline{\ell}$ será chamado **mínimo** de A e escreveremos $\overline{\ell} = \min A$.
- Veremos que todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ tem **ínfimo**.

Proposição (1)

Dado $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente,* $L = \sup A$ *se, e só se,*

(a) L *é limitante superior de* A *e,*

(b) *para todo* $\varepsilon > 0$*, existir* $a \in A$ *tal que* $a > L - \varepsilon$.

Analogamente

Proposição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ *limitado inferiormente,* $A \neq \emptyset$*. Então* $L = \inf A$ *se, e só se*

(a) L *é limitante inferior de* A *e*

(b) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $a \in A$ *tal que* $a < L + \varepsilon$.

Teorema (Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$)

Seja $x \neq 0$. Então o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado.

Corolário (1)

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, $\quad \dfrac{1}{n\sqrt{2}} < \varepsilon \quad$ e $\quad 2^{-n} < \varepsilon$.

Entre dois reais distintos existe um racional. Do corolário acima, entre dois reais distintos, existe um irracional.

Corolário

- *Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.*
- *Se $A = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$, então* $\inf A = 0$.

Proposição

Se $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ for limitado inferiormente (superiormente), então $-A = \{-x : x \in A\}$ será limitado superiormente (inferiormente) e $\inf A = -\sup(-A)$ $(\sup A = -\inf(-A))$.

Corolário

Todo $A \neq \varnothing$ e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ tem ínfimo.

Corolário

Todo subconjunto limitado e não vazio de $\mathbb{R}$ tem ínfimo e supremo.

Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição (Vizinhança)

Uma **vizinhança** *de* $a \in \mathbb{R}$ *é qualquer intervalo aberto da reta contendo* a.

Exemplo (δ-vizinhança)

Se $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta\,,\, a + \delta)$ *é chamada* $\delta-$*vizinhança de* a.

Definição (Ponto de Acumulação)

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$. *Se, para todo* $\delta > 0$, *existe* $a \in V_\delta(b) \cap A$, $a \neq b$, *então* b *será dito* **ponto de acumulação** *de* A.

Definição (Ponto isolado)

Seja $B \subset \mathbb{R}$. *Um ponto* $b \in B$ *será dito um* **ponto isolado** *de* B, *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $V_\delta(b)$ *não contém pontos de* B *distintos de* b.

Exemplo

(a) *O conjunto dos pontos de acumulação de* (a, b) *é* $[a, b]$.

(b) *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *possui apenas pontos isolados.*

(c) *Subconjuntos finitos de* $\mathbb{R}$ *não têm pontos de acumulação.*

(d) *O conjunto dos pontos de acumulação de* $\mathbb{Q}$ *é* $\mathbb{R}$.

(e) *Seja* $B = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. *Todo ponto de* B *é isolado e* $\{0\}$ *único ponto de acumulação de* B.

(g) *Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo* $\mathbb{Z}$*).*

Proposição (Bolzano-Weierstrass)

Se A *é um subconjunto infinito e limitado de* $\mathbb{R}$ *então,* A *possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Funções - Noções Gerais

Definição

Dados dois conjuntos $A, B \neq \emptyset$, uma **função** *f de A em B (escreveremos $f : A \to B$) é uma lei ou regra que a cada $x \in A$, associa um único elemento $f(x) \in B$. Adotaremos a seguinte terminologia*

- *A é chamado* **domínio** *de f (D_f);*
- *B é chamado* **contra-domínio** *de f ;*
- *o conjunto*
$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B\, ;\, y = f(x),\ x \in A\}\,.$$
é chamado **imagem** *de f .*

Convenção: Se o domínio da função não é dado explicitamente, então, por convenção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais x para os quais a regra $f(x)$ esteja definida.

Definição

Sejam $f : A \to B$ uma função e $A, B \subset \mathbb{R}$. O conjunto

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

é chamado **gráfico** *de f.*

Definição

Sejam $f : A \to B$ e $D \subset A$. Denotamos por $f\big|_D$ a **restrição** *de f ao subconjunto D de A. Então*

$$f\big|_D(x) = f(x), \quad \textit{para todo} \ \ x \in D.$$

Translação/Dilatação - Esboço de Gráficos

Translação:

- $f(x) + k$ translada o gráfico de f, k unidades *para cima* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para baixo* se $k < 0$,
- $f(x + k)$ translada o gráfico de f, k unidades *para a esquerda* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para a direita* se $k < 0$.

Dilatação:

Seja $k > 1$

- $kf(x)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo* y
- $\frac{1}{k}f(x)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo* y
- $f(kx)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo* x
- $f(x/k)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo* x

Reflexões e Esboço de Gráficos

Note que:

- O ponto $(a, -b)$ é a reflexão de (a, b) em relação ao eixo x.
- O ponto (a, b) é a reflexão de $(-a, b)$ em relação ao eixo y.
- Se refletimos o ponto (a, b) em relação ao eixo x, e depois em relação ao eixo y, produzimos o ponto $(-a, -b)$, que é a reflexão do ponto (a, b) em relação à origem $(0, 0)$.

Propriedades da reflexão

- $g(x) = -f(x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo x*
- $g(x) = f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo y*
- $g(x) = -f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *à origem*

Funções com simetria

No que segue, consideraremos $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição (Funções Pares e Ímpares)

Diremos que

- f *é* **par** $\iff$ $f(-x) = f(x), \forall\, x \in D_f$;
- f *é* **ímpar** $\iff$ $f(-x) = -f(x), \forall\, x \in D_f$.

Observação: Geometricamente,

- o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e
- o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

Soma, Produto e Quociente de Funções

Definição (Soma, Produto e Quociente)

Dadas duas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, podemos definir as operações:

- **soma**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$;
- **produto**: $(fg)(x) = f(x)g(x),\ x \in D_{fg} = D_f \cap D_g$;
- **quociente**: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\quad x \in D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$.

Composição

Definição (Composição)

Dadas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$, *definimos a* **função composta**

$$h : D_{g \circ f} \to \mathbb{R}$$

por

$$h(x) = g(f(x)), \quad \forall\, x \in D_{g \circ f},$$

onde $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. *Neste caso, escrevemos* $h = g \circ f$.

Funções Inversas

Definição

Uma função $f : A \to B$ será dita **invertível**, *se existir $g : B \to A$ (denotada por f^{-1}) tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$.*

Proposição

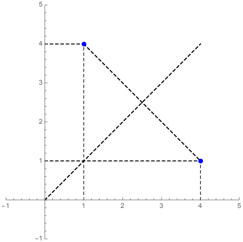
Uma função $f : A \to B$ é invertível se, e somente se, é bijetora.

Neste caso, a **função inversa** está definida por

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y, \quad \forall\, y \in B.}$$

$$D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \;\text{ e }\; \mathrm{Im}(f^{-1}) = D(f)$$

Observação: Note que o ponto (b, a) é a reflexão do ponto (a, b) em torno da reta $y = x$.



Observação: Note que

$$G(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in B\} = \{(f(x), x) : x \in A\} .$$

Segue da observação anterior que $G(f^{-1})$ é a reflexão de $G(f)$ em torno da reta $y = x$.

Funções Monótonas

Definição

- *Se valer a implicação* $x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$, *então* f *será* **estritamente crescente**.
- *Se valer a implicação* $x \geqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$, *então* f *será* **crescente**.
- *Se valer a implicação* $x > y \Longrightarrow f(x) < f(y)$, *então* f *será* **estritamente decrescente**.
- *Se valer a implicação* $x \geqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, *então* f *será* **decrescente**.

Definição

Se $f : A \to B$ *satisfizer uma das condições da Definição anterior, diremos que* f *é uma função* **monótona** *ou* **monotônica**.

Funções Limitadas

Definição

Diremos que f é **limitada** *se, e somente se,* $\mathrm{Im}(f) = f(D_f) \subset \mathbb{R}$ *for limitado. Caso contrário, a função f será dita* **ilimitada**. *Se $A_1 \subset D_f$, então f será* **limitada em A_1** *se, e somente se, a restrição $f|_{A_1}$ for limitada, isto é, $f(A_1) \subset \mathbb{R}$ for limitado.*

Observação: Da definição acima, f será limitada, se e somente se, existir $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant L, \quad \forall\, x \in D_f,$$

ou, equivalentemente, se $\exists\ L,\, l \in \mathbb{R}$ tais que

$$l \leqslant f(x) \leqslant L, \quad \forall\, x \in D_f.$$

Definição

Diremos que:

- $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in D_f\} = \sup(\mathrm{Im}(f))$.
- $\inf(f) = \inf\{f(x) : x \in D_f\} = \inf(\mathrm{Im}(f))$.
- *Se* $\sup(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **máximo** *de* f *ou o* **valor máximo** *de* f. *O ponto* x_0 *será chamado* **ponto de máximo** *de* f.
- *Se* $\inf(f) = f(x_0)$ *para algum* $x_0 \in D_f$, *então diremos que* $f(x_0)$ *é o* **mínimo** *de* f *ou o* **valor mínimo** *de* f. *O ponto* x_0 *será chamado* **ponto de mínimo** *de* f.

Funções Periódicas

Definição

Seja $\omega \neq 0$. *Então* f *é* **periódica** *com* **período** ω *ou* ω-**periódica** *se, e só se,*

$$f(x) = f(x+\omega), \ \forall\, x \in D_f.$$

Em particular, se existe um menor $\omega_0 > 0$ *tal que* f *é* ω_0*-periódica, dizemos que* ω_0 *é o* **período mínimo** *de* f.

Proposição

Sejam $c \neq 0 \neq \omega$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ω-periódica, valem as afirmações:

(a) *f é $n\omega$-periódica, $\forall n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$.*

(b) *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(cx)$ é ω/c-periódica.*

Funções Trigonométricas

Proposição (Propriedades)

(a) *O seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes.*

(b) *O cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.*

(c) *O seno e cosseno são funções 2π-periódicas com imagem $[-1, 1]$.*

(d) *O cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar.*

(e) $\mathrm{sen}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *e* $\cos(0) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Proposição (Propriedades - via congruência de triângulos)

(*f*) $\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ *e* $\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

(*g*) $-\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ *e* $\cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$.

(*h*) $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$ *e* $-\cos t = \cos(\pi - t)$.

(*i*) $-\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi + t)$ *e* $-\cos t = \cos(\pi + t)$.

Proposição (Fórmulas de Adição)

(a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$.

(b) $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

Trocando β por $-\beta$ e utilizando que o cosseno é par e o seno é ímpar, obtemos

(c) $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)$.

(d) $\mathrm{sen}(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$.

Recorde que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

Disto obtemos o seguinte resultado:

Proposição (Arco Duplo)

(a) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$.

(b) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$.

Recorde que:

$$(a)\ \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \ \text{ e}$$

$$(b)\ \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos(2\alpha).$$

Disto obtemos as fórmulas de arco metade.

Proposição (Arco Metade)

(a) $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$, $\quad \left[\dfrac{(a)+(b)}{2}\right]$.

(b) $\operatorname{sen}^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$, $\quad \left[\dfrac{(a)-(b)}{2}\right]$.

Recorde que:

$$\begin{aligned}
&(a)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)\\
&(b)\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta)=\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)\\
&(c)\ \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)\\
&(d)\ \mathrm{sen}(\alpha-\beta)=\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Disto obtemos as fórmulas seguintes:

Proposição (Transformação de Produto em Soma)

(a) $\cos(\alpha)\cos(\beta)=\dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$, $\left[\frac{(a)+(c)}{2}\right]$.

(b) $\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)=-\dfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\dfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$, $\left[\frac{(c)-(a)}{2}\right]$.

(c) $\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)=\dfrac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\dfrac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha-\beta)$ $\left[\frac{(b)+(d)}{2}\right]$.

Recorde que

$$\begin{aligned}
&(a)\ \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)\\
&(b)\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)\\
&(c)\ \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)\\
&(d)\ \mathrm{sen}(\alpha-\beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{\alpha'+\beta'}{2},\ \beta = \frac{\alpha'-\beta'}{2}$$

obtemos as fórmulas seguintes:

Proposição (Transformação de Soma em Produto)

(a') $\mathrm{sen}(\alpha') + \mathrm{sen}(\beta') = 2\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right)$. $\quad (a') = \frac{(b)+(d)}{2}$

(b') $\cos(\alpha') + \cos(\beta') = 2\cos\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right)$. $\quad (b') = \frac{(a)+(c)}{2}$

De maneira análoga obtemos as fórmulas seguintes.

Proposição (Transformação de Subtração em Produto)

(a) $\mathrm{sen}(\alpha') - \mathrm{sen}(\beta') = 2\mathrm{sen}\left(\dfrac{\alpha'-\beta'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha'+\beta'}{2}\right).$

(b) $\cos(\alpha') - \cos(\beta') = -2\mathrm{sen}\left(\dfrac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\dfrac{\alpha'-\beta'}{2}\right).$

Definição

Definimos

- $\mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad D(\mathrm{tg}) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\};$
- $\mathrm{cotg}(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}, \quad D(\mathrm{cotg}) = \{\alpha : \mathrm{sen}\alpha \neq 0\};$
- $\mathrm{cossec}(\alpha) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)}, \quad D(\mathrm{cossec}) = \{\alpha : \mathrm{sen}\alpha \neq 0\};$
- $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}, \quad D(\sec) = \{\alpha : \cos\alpha \neq 0\}$

Limite: Definição

Definição (Limite)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f. Diremos que **o limite de $f(x)$ quando x tende p é L** *se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f. O limite de $f(x)$ quando x tende a p, caso exista, é único. Este limite será denotado por

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

Limites Laterais

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D^{+} = D \cap (p, \infty)$ $(D^{-} = D \cap (-\infty, p))$.

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D_f. O **limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \to p^{+}} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D^{+}}(x) \qquad \left(\lim_{x \to p^{-}} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D^{-}}(x)\right)$$

Critério negativo para existência de limites

Teorema

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D_f. Então

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x).$$

Continuidade

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$ **é contínua em** *p se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon \, .$$

Observação

Note que,

- *se $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f, então f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ e*
- *se p é um ponto isolado de D_f então f é contínua em p.*

Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i=1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x \to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x \to p} (f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x \to p} f_1(x) + \lim\limits_{x \to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x \to p} \ k \ f_1(x) = k \, L_1$ onde $k =$ constante .

3) $\lim\limits_{x \to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x \to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

4) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Comparação e Confronto

Além das propriedades mostradas anteriormente, a comparação o confronto são propriedades extremamente úteis para que possamos concluir a existência de limites. Começamos com a comparação.

Teorema (Comparação)

Se p é um ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$ e $f(x) \leq g(x)$ sempre que $x \in (D_f \cap D_g)\backslash\{p\}$ e x está próximo de p e os limites de f e g quando x tende a p existem, então

$$\lim_{x\to p} f(x) = \boxed{L_f \leq L_g} = \lim_{x\to p} g(x).$$

Observação: O texto em azul do enunciado significa que,

- existe $r>0$ tal que $x \in D_f \cap D_g$, $0<|x-p|<r$ implica $f(x) \leq g(x)$.

Teorema (do Confronto)

Dadas f, g, h *funções e* p *ponto de acumulação de* $D = D_f \cap D_g \cap D_h$, *se existe* $r > 0$ *tal que* $\{x \in D_g : 0 < |x - p| < r\} \subset D_f \cap D_h$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad para \quad x \in D, \quad 0 < |x - p| < r,$$

e se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L \, .$$

Exemplo

As funções trigonométricas são contínuas.

Infinitésima vezes limitada é infinitésima

Corolário

Dadas $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$, p ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$ e, para algum $M > 0$ e $r > 0$, $|g(x)| \leq M$, $x \in D_g$, $0 < |x - p| < r$. Então

$\lim_{x \to p} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x \to p} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.

Infinitésima vezes limitada é infinitésima

Corolário

Dadas $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$, *p ponto de acumulação de* $D_f \cap D_g$ *e, para algum* $M > 0$ *e* $r > 0$, $|g(x)| \le M$, $x \in D_g$, $0 < |x-p| < r$. *Então* $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.

- $\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0.$
- $\lim_{x\to p} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to p} (f(x) - L) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x) - L| = 0.$
- $\lim_{x\to p} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = |L|$. **Não vale a volta.**

O Primeiro Limite Fundamental

Exemplo (O Primeiro Limite Fundamental)

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$$

Limite da Composta

Teorema (Limite da Composta)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ funções tais que $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ e $L \in D_f$. Se p é um ponto de acumulação de D_g, $\lim_{x \to p} g(x) = L$ e f é contínua em L, então

$$\lim_{x \to p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to p} g(x)\right) = f(L).$$

Limite da Composta

Teorema (Limite da Composta)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ funções tais que $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ e $L \in D_f$. Se p é um ponto de acumulação de D_g, $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L$ e f é contínua em L , então

$$\lim_{x \to p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to p} g(x)\right) = f(L).$$

Exemplo

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos p}{x - p} = -\mathrm{sen} p.}$$

$$\cos(x) - \cos(p) = -2\mathrm{sen}\left(\frac{x+p}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)$$

Recorde que:

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$. *Diremos que* $f(x)$ **é contínua em** p *se,* *dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \ \text{ e } \ |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

- Se p é um ponto de acumulação de D_f, f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.
- Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.
- Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.
- Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema (Teorema da Conservação do Sinal)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $\bar{x} \in D_f$ *tal que* $f(\bar{x})>0$ $(f(\bar{x}) < 0)$. *Então, existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ *sempre que* $x \in D_f$ *e* $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

O Teorema do Valor Intermediário e Aplicações

Teorema (Teorema do Anulamento)

Se

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

$(f(a) > 0 > f(b))$, *então, existe* $\bar{x} \in (a, b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = 0$.

Teorema (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e tal que* $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$. *Se* $f(a) < k < f(b)$ $(f(a) > k > f(b))$, *então existe* $\bar{x} \in (a, b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = k$.

O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema (de Weierstrass ou do Valor Extremo)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, existirão $p, q \in [a, b]$ tais que

$$f(p) \le f(x) \le f(q), \quad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se

$$m=\min\{f(x):x\in[a,b]\} \text{ e } M=\max\{f(x):x\in[a,b]\},$$

então

$$Im(f)=f([a,b])=[m,M].$$

A inversa de uma função contínua é contínua

Proposição

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e injetora. Então f é estritamente monótona. Se $f([a,b])=[m,M]$ e $p\in[a,b]$, $\lim\limits_{y\to f(p)} f^{-1}(y)=p$.

Definição (Limite Infinito)

Seja f uma função e p um ponto de acumulação de D_f. Diremos que

- $f(x)$ **diverge para** $+\infty$ **quando** x **tende a** p *se, dado* $K>0$, *existir* $\delta>0$ *tal que* $x \in D_f,\ 0<|x-p|<\delta \Rightarrow f(x)>K$.

  Notação $\lim\limits_{x\to p} f(x)=+\infty$.

- $f(x)$ **diverge para** $-\infty$ **quando** x **tende a** p *se, dado* $K>0$, *existir* $\delta>0$ *tal que* $x \in D_f,\ 0<|x-p|<\delta \Rightarrow f(x)<-K$.

  Notação $\lim\limits_{x\to p} f(x)=-\infty$.

- *Analogamente definimos* $\lim\limits_{x\to p^+} f(x)=\pm\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to p^-} f(x)=\pm\infty\right)$ *quando p é ponto de acumulação à direita (esquerda) de D_f.*

Definição

A reta $x = p$ é chamada de **assíntota vertical** *do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:*

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to p} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to p^-} f(x) = -\infty.$$

A seguinte proposição será muito útil para calcular limites.

Proposição

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *um ponto de acumulação de* D_f*. Se* $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$ *e existir* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ *para* $x \in D_f$ *tal que* $0 < |x - p| < r$ *então,* $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ $(-\infty)$.

Observação: O resultado também vale para os casos $x \to p^+$ e $x \to p^-$. Basta que a função restrita a $D^+ = D_f \cap (p, \infty)$ e/ou a $D^- = D_f \cap (-\infty, p)$ esteja nas condições da proposição.

Propriedades dos limites infinitos

Seja L um número real. Temos:

- $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to p} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to p} g(x) = -\infty \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty,\ L>0 \\ \lim\limits_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty,\ L<0 \\ \lim\limits_{x\to p} (f+g)(x) = -\infty. \end{array}\right.$$

- $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to p} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to p} g(x) = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty,\ L>0 \\ \lim\limits_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty,\ L<0 \\ \lim\limits_{x\to p} (f+g)(x) = +\infty \end{array}\right.$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f+g)(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f+g)(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty$$

Observação: As propriedades acima são válidas se, em lugar de $x \to p$, usarmos $x \to p^+$ ou $x \to p^-$.

Observação: As propriedades acima sugerem como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, por exemplo, se $L \in \mathbb{R}$,

$$L \pm \infty = \pm\infty,\ \infty \cdot (-\infty) = -\infty \text{ e } L \cdot (\pm\infty) = \pm\infty (\mp\infty) \text{ se } L > 0 (L < 0).$$

Também temos **indeterminações**, por exemplo,

$$\boxed{\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty.}$$

Limites no Infinito e assíntotas horizontais

Definição (Limite no Infinito)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função. Se* D_f *não é limitado inferiormente,*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se, e só se, dado $\varepsilon > 0$*, existir* $R < 0$ *tal que*

$$x \in D_f,\ x < R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição

A reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** *ao gráfico de f se ou*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Observação: As propriedades do limite são também válidas se $x \to p$ for substituído por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Limites Infinitos no Infinito

Definição (Limite Infinito no Infinito)

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  se, e somente se, dado $K > 0$, *existe* $R > 0$ *tal que*
  $$x \in D_f,\ x > R \Rightarrow f(x) > K.$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

  se, e somente se, dado $K < 0$, *existe* $R > 0$ *tal que*
  $$x \in D_f,\ x > R \Rightarrow f(x) < K.$$

De maneira análoga definimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Observação: Todas as propriedades de limites infinitos valem se substituirmos $x \to p$ por $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Logaritmo e Exponencial

Para $x > 0$ definimos a função $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

- para $x \geq 1$, $\ln x$ é a a área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = 1$ até $s = x$ e,
- para $x \in (0, 1)$, $\ln x$ é o negativo da área sob o gráfico da função $f(s) = \frac{1}{s}$, desde $s = x$ até $s = 1$.

Esta função é estritamente crescente, portanto injetora. Veremos mais tarde que ln é sobrejetora.

A inversa de ln é a exponencial denotada por $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$.

Exemplo

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exemplo

$\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ *e* $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x.y)$.

Exemplo

$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínua e bijetora (estritamente crescente). Sua inversa é a função* $\mathbb{R} \ni x \to e^x \in (0,\infty)$

Exemplo

$e^{x+y} = e^x e^y$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$, *e*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$