

Anti-derivadas ou Primitivas: Integração por partes

Aula 24

15 de Novembro 2023

Segundo Semestre de 2023

Integração por Partes

Sejam $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Então, se $x \in (a, b)$,

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou seja,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Como $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$,

- ▶ encontrar uma primitiva para $f'(x)g(x)$, é equivalente a
- ▶ encontrar uma primitiva para $f(x)g'(x)$

e vale a **fórmula de integração por partes**:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Notação alternativa. Tomando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos

$$du = f'(x) dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x) dx$$

e podemos re-escrever a fórmula de integração por partes como

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Example

Calcule $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução: Suponha $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então, $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. Assim

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + k.$$

Example

Calcule $\int \ln x \, dx$.

Solução:

$$\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{\ln x}_u \cdot \underbrace{x}_v - \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{du} dx = x \ln x - x + k.$$

Example

Calcule $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Solução:

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_u \underbrace{1 \, dx}_{dv} &= (\operatorname{arctg} x) x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= (\operatorname{arctg} x) x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_u \underbrace{2x \, dx}_{du} \\
 &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k.
 \end{aligned}$$

Example

Calcule $\int x^2 e^x dx$.

Solução:

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^x}_g - \int \underbrace{2x}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx.$$

Integrando por partes mais uma vez, obtemos

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + k.$$

Portanto,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + k.$$