# Polinômios de Taylor
# Aula 21

06 de Novembro de 2023

**Segundo Semestre de 2023**

# Polinômios de Taylor

Os polinômios são as funções mais simples de manipular, já que os seus valores podem ser obtidos através de operações simples (adição e multiplicação). Parece natural, portanto, buscar aproximar funções mais complicadas por funções polinomiais.

Nesta aula, vamos discutir a **Fórmula de Taylor** que fornece uma regra para determinar o polinômio de grau $n$ que 'melhor aproxima' uma função dada ao redor de um ponto $p$.

Antes de tratarmos o caso geral, discutimos alguns casos particulares para melhor entender o procedimento.

Suponha que a função $f$ seja diferenciável em um intervalo aberto $(a, b)$ e seja $p \in (a, b)$.

Neste caso, vamos procurar função linear (polinômio de grau 1) que 'melhor aproxima' a função $f$ ao redor do ponto $p$. Isto é, vamos encontrar a função linear

$$L(x) = m + n(x - p)$$

que 'melhor aproxima' a função $f$ para $x$ próximo a $p$.

A estratégia é encontrar $m$ e $n$ de modo que, em intervalos da forma $(p - \delta, p + \delta)$, com $\delta$ arbitrariamente pequeno, a função $L$ escolhida seja aquela que 'melhor aproxima' $f$.

Definimos o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $L(x)$ por

$$E(x) = f(x) - L(x) = f(x) - m - n(x-p).$$

Chamamos de 'melhor aproximação' aquela para a qual $E(p) = 0$ e $E(x)$ é pequeno quando comparado com $|x-p|$, isto é,

$$\lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x-p} = 0.$$

Note que, $E(p) = 0$ implica que $m = f(p)$ e para $x \neq p$, temos

$$\frac{E(x)}{x-p} = \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - n.$$

Daí,

$$0 = \lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x-p} = f'(p) - n \quad \text{e} \quad n = f'(p)$$

e, nossa definição de melhor aproximação, determina a escolha de

$$m = f(p) \quad \text{e} \quad n = f'(p).$$

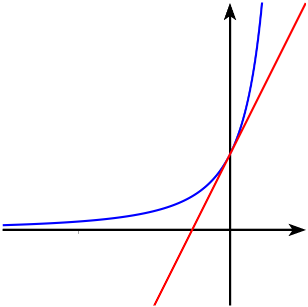
Definimos o **Polinômio de Taylor de Ordem 1 de $f(x)$ ao redor de $p$** por

$$\boxed{P_1(x) = f(p) + f'(p)(x - p)}.$$

$P_1$ é a função linear que melhor aproxima $f$ ao redor de $p$. Note ainda que o gráfico de $P_1$ é a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(p, f(p))$.

## Exemplo

*O Polinômio de Taylor de Ordem 1 da função* $f(x) = (1-x)^{-2}$ *ao redor do ponto zero é* $P_1(x) = 1 + 2x$.



Suponhamos agora que a
função $f(x)$ seja duas vezes diferenciável e
procuremos um polinômio $P(x)$, de grau no máximo 2, que
'melhor aproxime' $f$, ou seja, se $E(x) = f(x) - P(x)$, então

$$E(p) = 0, \quad \lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x - p} = 0 \text{ e } \lim_{x \to p} \frac{E(x)}{(x - p)^2} = 0.$$

É claro que a última condição expressa que o erro cometido é pequeno quando comparado com $(x - p)^2$ e implica a penúltima.

Assim, devemos procurar $P(x) = c_0 + c_1(x-p) + c_2(x-p)^2$, com os coeficientes a serem determinados pelas condições acima.

Agora, $E(p) = 0$ implica que $c_0 = f(p)$ e $\lim_{x \to p} \frac{E(x)}{x-p} = 0$ implica que

$$0 = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - c_1(x-p) - c_2(x-p)^2}{x-p} = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} - c_1 = f'(p) - c_1.$$

Por fim, $\lim_{x \to p} \frac{E(x)}{(x-p)^2} = 0$ implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) - c_2(x-p)^2}{(x-p)^2} = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)}{(x-p)^2} - c_2 \\ &= \lim_{x \to p} \frac{f'(x) - f'(p)}{2(x-p)} - c_2 = \frac{1}{2} f''(p) - c_2, \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{2} f''(p) \end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que

$$P(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2.$$

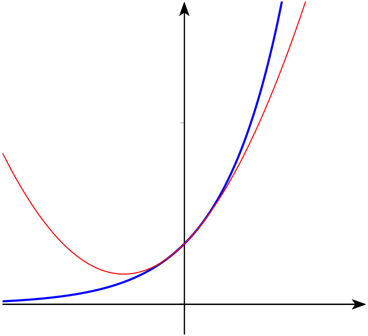
O **Polinômio de Taylor de Ordem 2 de** $f(x)$ **ao redor de** $p$ é

$$\boxed{P_2(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2.}$$

$P_2$ é o polinômio de grau 2 que 'melhor aproxima' $f$ ao redor de $p$.

## Exemplo

*O Polinômio de Taylor de Ordem 2 da função $f(x) = e^x$ ao redor do ponto zero é $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.*



De forma geral, se a função dada $f(x)$ for derivável até ordem $n$ e procuramos um polinômio $P_n(x)$ de grau n que 'melhor aproxima' $f$ ao redor de $p$, isto é, tal que

$$\lim_{x \to p} \frac{E_n(x)}{(x-p)^n} = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-p)^n} = 0.$$

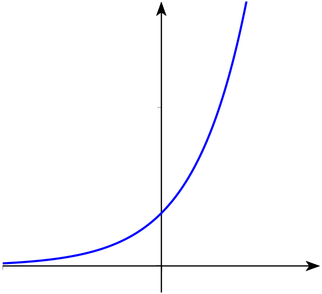
Procedendo como antes, concluímos que $P_n(x)$ terá a forma

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n, \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j \end{aligned}$$

o qual é chamado de **Polinômio de Taylor de Ordem n de** $f(x)$ **ao redor de** $p$.

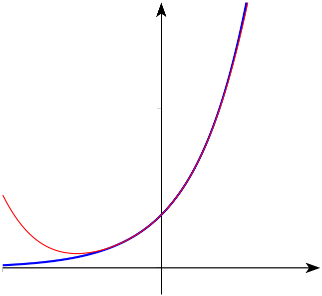
## Exemplo

*O Polinômio de Taylor de Ordem 4 ao redor do zero da função* $f(x) = e^x$ *é* $P_4(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.



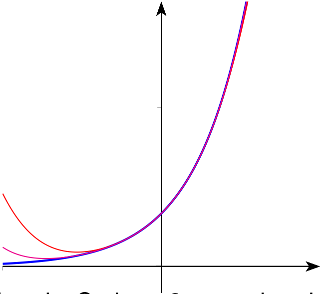
## Exemplo

*O Polinômio de Taylor de Ordem 4 ao redor do zero da função* $f(x) = e^x$ *é* $P_4(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.



## Exemplo

*O Polinômio de Taylor de Ordem 4 ao redor do zero da função* $f(x) = e^x$ *é* $P_4(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.



O Polinômio de Taylor de Ordem 6 ao redor do zero da função $f(x) = e^x$ é $P_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6$

Para avaliarmos a precisão com que uma função é aproximada por polinômios de Taylor, vamos definir o erro por

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_n(x),}$$

onde $f(x)$ é a função dada e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem $n$ de $f$ ao redor de $p$.

O teorema a seguir nos fornece uma fórmula para o erro.

### Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

*Suponhamos que a função $f$ seja $(n+1)$ vezes diferenciável em um intervalo aberto $I$ e sejam $a, b \in I$. Então*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + E_n$$

*onde*

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

*para algum $c$ entre $a$ e $b$.*

**De fato:** Para $a > b$ defina

$$E_n = f(b) - P_n(b) = f(b) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j$$

e, para $x \in [a, b]$,

$$\phi(x) \ = f(b) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(b-x)^j - E_n \frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}. \text{ Logo,}$$

$$\phi'(x) \ = -\sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j + \sum_{j=2}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(b-x)^{j-1} + (n+1)E_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

Como $\phi$ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $(a, b)$ e $\phi(a) = \phi(b) = 0$, do teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$. Agora,

$$
\begin{aligned}
\phi'(x) &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j + \sum_{j=2}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(b-x)^{j-1} + (n+1)E_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^j + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(b-x)^{j} + (n+1)E_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + (n+1)E_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \\
&= \left[-\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + E_n\right] \frac{(n+1)(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

e, como $\phi'(c) = 0$, $E_n$ tem a expressão desejada. O caso $b < a$ é idêntico.$\square$

## Exemplo

*Utilizando Polinômio de Taylor de Ordem 2, calcule um valor aproximado para* $\ln(1,03)$ *e avalie o erro.*

**Solução:** O Polinômio de Taylor de Ordem 2 de $f(x) = \ln x$ em torno de $p = 1$ é

$$P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

Logo, $P_2(1,03) = 0,02955$ é uma aproximação para $\ln(1,03)$. Avaliemos o erro. Como $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, temos $|f'''(x)| \leq 2$, para $x \geq 1$. Da fórmula do erro,

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{2}{3!}|x-1|^3, \qquad x \geq 1.$$

Segue que, para $x = 1,03$ o erro cometido na aproximação é

$$|f(1,03) - P_2(1,03)| \leq \frac{1}{3}(0,03)^3 = 9(10)^{-6} < 10^{-5}.$$

## Exemplo

*O Polinômio de Taylor de Ordem $n$ ao redor do zero de $f(x) = e^x$ é*

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

**Solução:** Recorde que

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Como $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e para todo $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo a expressão de $P_n(x)$ é a expressão dada acima.

## Exemplo

*Calcule um valor aproximado para o número e e avalie o erro.*

**Solução:** Observe que para $x \in [0,1]$, $0 \leq e^x = f^{(n+1)}(x) \leq e < 3$. Pelo Teorema anterior, o erro é dado por

$$\begin{aligned} |e^1 - P_n(1)| &= \left| e - \left(1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \ldots + \tfrac{1}{n!}\right)\right| \\ &= |E_n(1)| = \left| \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| \end{aligned}$$

para algum $c \in [0,1]$. Logo,

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

## Exemplo

*Avalie e com um erro inferior a $10^{-5}$.*

**Solução:** Queremos que $E_n(1) < 10^{-5}$, Logo basta tomar $n$ tal que $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$, ou seja, tal que $(n+1)! > 3(10^5)$. Por tentativas, chega-se a $n = 8$.

**Exercício:** Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{7,9}$ e avalie o erro.