Regras de L'Hospital
Aula 23

02 de Novembro de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Análise do gráfico de uma função f: Estratégia

- Determinamos, se possível, os pontos onde f se anula e os intervalos onde f é positiva e onde f é negativa.
- Determinamos, caso existam, as assíntotas horizontais e verticais de f.
- Calculamos f' e determinamos, se possível, os pontos críticos de f (zeros de f' e pontos onde f' não existe).
- Estudamos o sinal de f' e determinamos os intervalos onde f é crescente ou decrescente.
- Calculamos, se possível, f'' e f''' e classificamos os pontos críticos e encontramos os pontos de inflexão.
- Analisamos o sinal de f'' para determinar a concavidade em cada intervalo.

Exemplo

Esboce o gráfico de $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

Solução: Note que $f(0) = f(6) = 0$ e que $f(x) > 0$ se $x < 6$ e $f(x) < 0$ se $x > 6$. Calculando as derivadas

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}.$$

Os pontos críticos são $x = 4$, $x = 0$ e $x = 6$.

Analisando o sinal da derivada primeira

- Se $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.
- Se $0 < x < 4 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente crescente.
- Se $4 < x < 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.
- Se $x > 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente decrescente.

Pelo teste da Derivada Primeira

- $x = 0$ é um ponto de mínimo local.
- $x = 4$ é um ponto de máximo local.

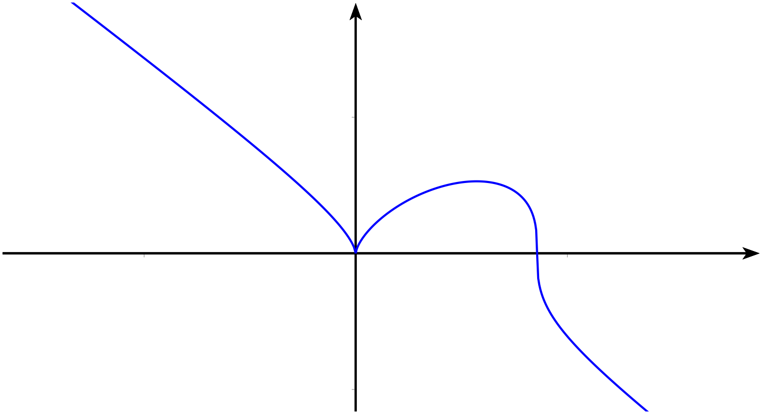
Observe que o teste da Derivada Segunda poderia ser usado em 4, mas não em 0.

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Analisando o sinal da derivada segunda

- Se $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo.
- Se $0 < x < 6 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo.
- Se $x > 6 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ tem concavidade para cima.

O único ponto de inflexão é $x = 6$. Observe que as retas tangentes em $x = 0$ e $x = 6$ são verticais.



Exemplo

Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Note que, $f(-1) = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Derivando

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}, \quad f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

Os pontos críticos são $x = 0$ e $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Analisando o sinal da derivada primeira

- $f'(x) > 0$ se $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f$ é crescente em $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ se $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow f$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

Pelo teste da Derivada Primeira ou Segunda $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é um ponto de mínimo local.

Analisando o sinal da derivada segunda

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

- Se $-1 < x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ é côncava para baixo.
- Se $x > 0$ ou $x < -1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ é côncava para cima.

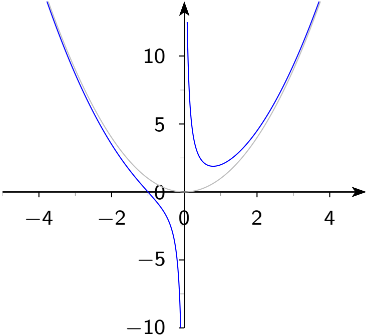
O único ponto de inflexão é $x = -1$.

Analisando o sinal da derivada segunda

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

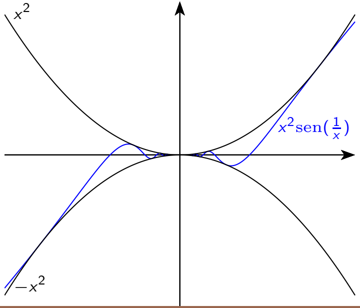
- Se $-1 < x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ é côncava para baixo.
- Se $x > 0$ ou $x < -1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ é côncava para cima.

O único ponto de inflexão é $x = -1$.



Observações: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável em (a,b). Recorde que

- Se $f'(p) = 0$, p pode ser um ponto extremo local, um ponto de inflexão horizontal ou nenhum desses.



- Se $f'(p) \neq 0$, $p \in (a,b)$, p não será ponto extremo local de f.

Entretanto,

- Pode ocorrer que p seja um ponto extremo local de f sem que exista $f'(p)$ ou $f'(p) \neq 0$ (se $p = a$ ou $p = b$).

Regras de L'Hospital

As regras de L'Hospital se aplicam a cálculos de limites que apresentam as seguintes indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Teorema (De Cauchy)

Se f e g são contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Prova: Considere $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$ e note que h é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e $h(a) = h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. Do Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$ e o resultado segue.

Teorema (Regra de L'Hospital)

Sejam f e g funções differenciáveis em x com $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (p - r, p + r)\backslash\{p\}$ e para algum $r > 0$. Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 = \lim_{x \to p} g(x)$$

e $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ *(ou* $\ell = \pm\infty$*), então* $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Prova: Como os valores de $f(p)$ e $g(p)$ não influem no cálculo do limite, defina $f(p) = g(p) = 0$. Assim, do Teorema de Cauchy, para cada $x \in (p-r, p+r) \setminus \{p\}$ existe c entre x e p (distinto de ambos) tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Como $\lim\limits_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ e c está entre x e p, segue que $\lim\limits_{x \to p} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell$.

Logo existe o limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando x tende a p e $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Observação: A regra de L'Hospital ainda será válida se, em lugar de $x \to p$, tivermos $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{x}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0} 1-e^{2x} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^{2x})'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{2x}}{1} = -2.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\, x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen}\, x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

2ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g funções deriváveis em x com $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (p-r, p+r)\backslash\{p\}$ e algum $r > 0$. Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty = \lim_{x \to p} g(x)$$

e $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (ou divergir para $\pm\infty$), então $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ também existirá (ou divergirá para $\pm$ infinito) e

$$\boxed{\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

A prova da 2ª Regra de L'Hospital é bastante elaborada. Faremos a sua prova na Seção 1, por completude, para o leitor interessado.

Observação: A 2ª regra de L'Hospital ainda vale se, em lugar de $x \to p$, tivermos $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. A regra continua válida se um ou ambos os limites for $-\infty$ em lugar de $+\infty$.

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x - x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ da Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \sec^2 x - 1 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 = 0$ usamos mais uma vez a Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}.$$

Como ainda o numerador e o denominador tendem a zero, usamos pela terceira vez a Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{4 \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2 \sec^4 x}{6} = \frac{1}{3}.$$

Observação: As Regras de L'Hospital se aplicam a indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. As outras formas de indeterminação, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, podem ser reduzidas a estas.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen x}} \right)$.

Solução: Observe que é uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Escrevendo

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen } x} \right) = \frac{\text{sen } x - x}{x\,\text{sen } x}$$

temos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen x}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\text{sen } x + x \cos x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x\text{sen } x} = 0$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

Solução: Observe que é uma indeterminação da forma $0\cdot(-\infty)$. Escrevendo $x\ln x = \dfrac{\ln x}{1/x}$ temos uma indeterminação da forma $\frac{-\infty}{\infty}$. Da Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$.

Solução: Observe que a indeterminação é da forma 0^0. Escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x)} = e^0 = 1.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Solução: Note que a indeterminação é da forma ∞^0. Escrevemos $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\right).$$

Como a indeterminação é da forma $\frac{\infty}{\infty}$, da Regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Solução: Note que a indeterminação é da forma 1^{∞}. Escrevemos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Agora temos uma indeterminação da forma $0\cdot\infty$ que pode ser reduzida a $\dfrac{0}{0}$. Então, pela regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=1$$

e como a função exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{1}=e.$$

Prova da 2ª Regra de L'Hospital:

Sejam f e g funções deriváveis em $(p-r,p+r)\backslash\{p\}$, $r>0$, com $g'(x)\neq 0$ para $0<|x-p|<r$. Se

$$\lim_{x\to p} f(x)=+\infty=\lim_{x\to p} g(x) \;\text{ e }\; \lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell \;\text{ entao, }\; \lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

De fato:, dado $1\geq \epsilon>0$ existe $0<\delta<r$ tal que

$$p\neq x\in(p-\delta,p+\delta)\Rightarrow\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\ell\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

Agora, do Teorema de Cauchy, para $x,y\in(p-\delta,p)$ (ou $x,y\in(p,p+\delta)$), existe c entre x e y tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \;\text{ e }\; \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-\ell\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

Assim, para $x,y\in(p-\delta,p)$ (ou $x,y\in(p,p+\delta)$)

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right|<|\ell|+\frac{\epsilon}{2}\leq|\ell|+\frac{1}{2}$$

Note que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| = \left|\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{g(y)}{g(x)}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| \leq \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|(|\ell|+\tfrac{1}{2})$$

Fixe $y \in (p-\delta, p)$ (ou $y \in (p, p+\delta)$) e escolha $\delta' < \delta$ tal que $x \in (p-\delta', p)$ (ou $x \in (p, p+\delta')$) temos (recorde que f, g tendem para infinito quando x tende para p)

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $x \in (p-\delta', p)$ (ou $x \in (p, p+\delta')$), então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \ell\right| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que

$$\lim_{x\to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \ \text{ e } \lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \ \Rightarrow \ \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$