A Derivada da Inversa e a Derivação Implícita
O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências
Aula 17

23 de Outubro de 2023

Segundo Semestre de 2023

Turma 2023201

Derivada da Função Inversa

Considere f invertível. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Já vimos que se f é contínua, então f^{-1} também é.

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Portanto, para todo $x \in D_{f^{-1}}$, tal que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, vale

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para mostrar que f^{-1} é diferenciável usamos a seguinte proposição:

Proposição (Derivada de funções inversas)

Seja f invertível. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$, com $f'(q) \neq 0$, então f^{-1} será diferenciável em p e

$$\boxed{(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}} \, .$$

De fato: Como f^{-1} é contínua em p, $\lim\limits_{h\to 0} \overbrace{f^{-1}(p+h)}^{u} = \overbrace{f^{-1}(p)}^{u_p}$.

Usando que $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$, temos

$$(f^{-1})'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{(p+h)-p}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h))-f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} = \lim_{u\to u_p} \frac{1}{\frac{f(u)-f(u_p)}{u-u_p}} = \frac{1}{f'(u_p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}$$

Exemplo

Se $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$*, então* $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

Recorde que, $x > 0$ *se* n *for par e* $x \neq 0$ *se* n *for ímpar.*

Solução: Note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$ onde $f(u) = u^n$. Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemplo

Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *definida por* $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *é bijetora.*

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\operatorname{Im}(f) \subset [-1, 1]$.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, do teorema do valor intermediário que $\operatorname{Im}(f) \supset [-1, 1]$ e que f é sobrejetora.

Para verificar que f é injetora observamos que se $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x > y$, então $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0.$$

Exemplo

A inversa da função $f(x) = sen\ x$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a função $g(x) = \mathrm{arcsen}\ x$, para $x \in [-1, 1]$. Qual é a derivada de $g(x)$?

Solução: Aplicando a Proposição 1.

$$\mathrm{arcsen}' x = \frac{1}{\cos(\mathrm{arcsen}\ x)}.$$

Agora, $1 = \cos^2(\mathrm{arcsen} x) + \mathrm{sen}^2(\mathrm{arcsen} x) = \cos^2(\mathrm{arcsen}\ x) + x^2$,
logo $\cos(\mathrm{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ pois $\cos y \geq 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.
Portanto,

$$\mathrm{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, tg$x$, $\sec x$ e cotg x, denominadas arccos x, arctg x, arcsec x e arccotg x.

Exercício: Mostre que

$$(a)\ \mathrm{arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (b)\ \mathrm{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(c)\ \mathrm{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}; \quad (d)\ \mathrm{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Derivação Implícita

Em geral, as funções são dadas na forma $y = f(x)$. Entretanto, algumas funções são definidas implicitamente por uma relação entre x e y.

No exemplo $x^2 + y^2 = 25$ é possível resolver uma equação e obter $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Contudo, no exemplo $x^3 + y^3 = 6xy$ não é fácil obter y como função de x.

Neste caso, para calcular a derivada de y, recorremos à **derivação implícita**, que consiste em derivar ambos os lados da equação em relação a x e então resolver a equação resultante para encontrar y'.

A existência de uma função diferenciável $y(x)$ dada pela equação será mostrada no Cálculo III. Este resultado mostrará que sempre que podemos encontrar y' o resultado é válido.

Exemplo

Se $x^2 + y^2 = 25$, *encontre* $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando ambos os lados da equação e usando a Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25 \Rightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim, $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.}$

Exemplo

Se $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando ambos os lados da equação em relação a x, obtemos $3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy'$. Resolvendo em y'

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Exemplo

Se $y = f(x)$ é diferenciável e $xf(x) + \operatorname{sen} f(x) = 4$, determine $f'(x)$.

Solução: Note que,

$$0 = \frac{d}{dx}(xf(x) + \operatorname{sen}(f(x))) = f(x) + xf'(x) + \cos(f(x))f'(x).$$

Assim,

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x + \cos(f(x))}$$

O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

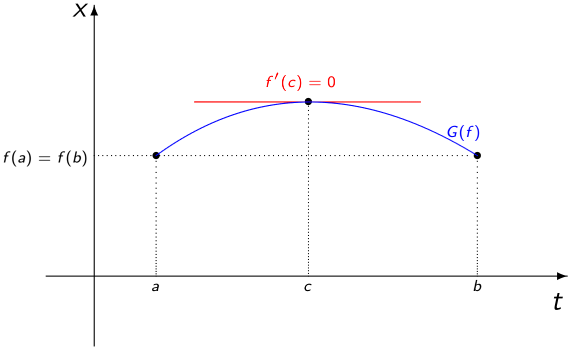
O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas mais importantes do Cálculo. A sua demonstração depende do seguinte resultado:

Teorema (de Rolle)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Interpretação: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), $x=f(t)$ a equação horária do movimento de uma partícula sobre a reta.

Se e a partícula estiver no mesmo lugar em 2 instantes distintos de tempo, pelo Teorema de Rolle, existirá um tempo para o qual a velocidade se anula.



Prova: Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existem x_1 e x_2 tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$.

Se f não é uma função constante em $[a, b]$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, ao menos um dos pontos em $\{x_1, x_2\}$ pertence a (a, b).

Seja $c \in (a, b) \cap \{x_1, x_2\}$. Então c é um ponto de máximo ou de mínimo de f e $c \in (a, b)$.

Vimos que se c é um máximo ou um mínimo de f em $[a, b]$ e $c \in (a, b)$, então $f'(c) = 0$ e o resultado segue.

Se f for constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$. Logo, podemos escolher c qualquer em (a, b). $\square$

Teorema (do Valor Médio)

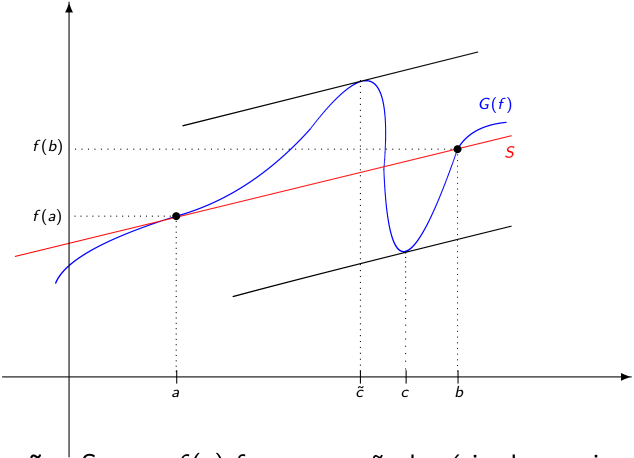
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

ou seja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observação: O Teorema do Valor Médio diz que, se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta S que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Observação. Se $x = f(t)$ for a equação horária do movimento de uma partícula, $v_m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ será a velocidade média entre $t = a$ e $t = b$. O Teorema do Valor Médio assegura que existe um instante $c \in (a, b)$ tal que $v_m = f'(c) =$ velocidade instantânea em $t = c$.

Prova: A reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Definamos

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Note que, h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, isto é,

(a) $h(x)$ é contínua em $[a, b]$.

(b) $h(x)$ é diferenciável em (a, b).

(c) $h(a) = h(b) = 0$.

Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

e o Teorema do Valor Médio está demonstrado. $\square$

Agora vamos obter informação do comportamento de uma função a partir de suas derivadas. Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário (1)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Se *$f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, f será estritamente crescente em $[a, b]$.*

Se *$f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, f será estritamente decrescente em $[a, b]$.*

Prova: Queremos provar que, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.
Pelo Teorema do Valor Médio, aplicado a f em $[x_1, x_2]$, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ devemos ter que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Segue que f é estritamente crescente. A prova do outro item é análoga. $\square$

É fácil ver que, se f for diferenciável e crescente (decrescente) em (a, b), então $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), para todo $x \in (a, b)$. O resultado a seguir mostra que a recíproca também é verdadeira.