Funções contínuas: Resultados fundamentais: O Teorema do Valor Intermediário e Teorema de Weierstrass - Aula 11

20 de Setembro de 2023

Segundo Semestre de 2023

Turma 2023201

Limite da Composta

Teorema (Limite da Composta)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *funções tais que* $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ *e* $L \in D_f$. *Se* p *é um ponto de acumulação de* D_g, $\lim_{x\to p} g(x) = L$ *e* f *é contínua em* L , *então*

$$\lim_{x\to p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to p} g(x)\right) = f(L).$$

De fato: Como f é contínua em L, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$y \in D_f, \quad |y - L| < \delta_f \;\Rightarrow\; |f(y) - f(L)| < \epsilon.$$

Como $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L$, dado $\delta_f > 0$ existe $\delta_g > 0$ tal que

$$x \in D_g, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \;\Rightarrow\; |g(x) - L| < \delta_f.$$

Desta forma, como $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$, $D_{f \circ g} = D_g$ e

$$x \in D_g = D_{f \circ g}, 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon.$$

Logo $\lim\limits_{x \to p} f(g(x)) = f(L).\square$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$.

De fato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \overset{u=5x}{=} 5 \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 5.$$

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{x}$.

De fato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \frac{2}{\cos(2x)} = 2.$$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

De fato:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\frac{(1+\cos x)}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercício: Calcule

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\mathrm{sen}(3x)}; \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(2x)}{\mathrm{sen}(3x)}.$$

Recorde que:

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$. *Diremos que* $f(x)$ **é contínua em** p *se,* *dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \ \text{ e } \ |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

- Se p é um ponto de acumulação de D_f, f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.
- Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.
- Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.
- Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema (Teorema da Conservação do Sinal)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\bar{x} \in D_f$ tal que $f(\bar{x}) > 0$ $(f(\bar{x}) < 0)$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

De fato: Como f é contínua em $\bar{x}$, dado $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f,\ x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x})-\epsilon, f(\bar{x})+\epsilon)) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado.$\square$

O Teorema do Valor Intermediário e Aplicações

Teorema (Teorema do Anulamento)

Se

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

$(f(a) > 0 > f(b))$, *então, existe* $\bar{x} \in (a, b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = 0$.

De fato: Faremos apenas o caso $f(a) < 0 < f(b)$. Seja

$$A = \{x \in [a, b] : f(s) > 0, \text{ para todo } s \in [x, b]\}.$$

Note que $\emptyset \neq A \subset [a, b]$ (pois $f(b) > 0$). Seja $z = \inf A$. Do Teorema da Conservação do Sinal, $z \in (a, b)$ e $z \notin A$. Portanto $f(z) \leq 0$.

Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z) = \lim_{x \to z^+} f(x) \geq 0$ (pois $x > z \Rightarrow x \in A \Rightarrow f(x) > 0$). Logo, $f(z) = 0$. $\square$

Teorema (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e tal que* $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$. *Se* $f(a) < k < f(b)$ $(f(a) > k > f(b))$, *então existe* $\bar{x} \in (a, b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = k$.

De fato: Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua, } g(a) < 0 \text{ e } g(b) > 0$$

e do Teorema do Anulamento, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$. Portanto $f(\bar{x}) = k$. $\square$

Aplicações a localização de zeros

Exemplo

Mostre que

$$f(x) = x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 2x + 1$$

tem uma raiz real no intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$.

De fato: Note que

$$f(-1) = -\frac{1}{3} \text{ e que } f(-\tfrac{1}{2}) = \frac{7}{24}.$$

Como f é contínua (em particular, em $[-1, -\frac{1}{2}]$) segue do Teorema do Anulamento que existe $\bar{x} \in [-1, -\frac{1}{2}]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Aplicações à sobrejetividade

Exemplo

Mostre que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, *é bijetora. Recorde que a inversa de* f *é a função, que chamamos "raiz cúbica",* $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$.

De fato: Vimos que f é injetora. Provemos que f é sobre. Note que dado $y\in\mathbb{R}$, existe $n\in\mathbb{N}^*$ tal que $y\in(-n,n)$ e $f(n)\geqslant n$.
Como f é ímpar, temos $f(-n)\leqslant -n<y<n\leqslant f(n)$.
Visto que f é contínua, do Teorema do Valor Intermediário, existe $\bar{x}\in\mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x})=y$. Isto mostra que f é sobrejetora.

Exemplo

Seja $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Então, as funções*

$$f_{2k} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \text{ e } f_{2k+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}, \text{ são bijetoras.}$$

As suas inversas são as raízes $n-$*ésimas*, $f_n^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$. *Estas funções são contínuas em seus domínios.*

De fato: Como $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$, segue que $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é injetora.

Mostremos que $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é sobrejetora. Note que $f(0) = 0$
Logo, dado $y \in \mathbb{R}^+$, seja $\ell \in \mathbb{N}^*$ tal que $y \in [0, \ell)$ e $f_n(\ell) \geqslant \ell$.

Como $0 \leq y < \ell \leqslant f_n(\ell)$ e f é contínua,

do Teorema do Valor Intermediário, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) = y$.

Mostrando que $f_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ e $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é sobrejetora.

Como $f_{2k+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ínpar o resultado segue.

Veremos que a inversa de uma função contínua é uma função contínua e disto seguirá que as raízes são funções contínuas.

O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema (de Weierstrass ou do Valor Extremo)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for contínua, existirão* $p, q \in [a, b]$ *tais que*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \quad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

De fato: Verifiquemos, inicialmente, que $\mathrm{Im}(f)$ é limitada.

Se este não fosse o caso, dado $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in [a, b]$ tal que, $x_0 \in [a, b]$ e $|f(x_n)| > \max\{n, |f(x_{n-1})|\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Segue que $A \subset [a, b]$ tem um ponto de acumulação $r \in [a, b]$.

Como f é contínua em r, existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (r - \delta, r + \delta) \cap [a, b] = B \;\Rightarrow\; |f(x) - f(r)| < 1.$$

Segue que $f(B)$ é limitado e contém infinitos pontos de $f(A)$ e isto é uma contradição. Segue que $\mathrm{Im}(f)$ é limitada.

Seja $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Então $f(x) \geq m$, $\forall\, x \in [a, b]$. Se f não é constante m é ponto de acumulação de $\{y \in \mathrm{Im}(f) : y > m\}$.

Seja $x_0 \in [a, b]$ tal que $0 < f(x_0) - m$ e $x_k \in [a, b]$ tal que $0 < f(x_k) - m < \min\{\frac{1}{k}, f(x_{k-1}) - m\}$, para $k \in \mathbb{N}^*$.

O conjunto $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é infinito e limitado, portanto A tem um ponto de acumulação p.

Como f é contínua em p, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$x \in [a, b],\ |x - p| < \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \tfrac{1}{n}.$$

Em particular, escolha $x_k \in A$ com $k > n$ e tal que $|x_k - p| < \delta_n$,

$$m - \frac{1}{n} < f(x_k) - \tfrac{1}{n} < f(p) < f(x_k) + \tfrac{1}{n} < m + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < m + \frac{2}{n}.$$

Concluímos que $f(p) = m$.

A afirmativa restante segue de $-\inf \mathrm{Im}(-f) = \sup \mathrm{Im}(f)$. □

Se o intervalo não for limitado o teorema de Weierstrass não vale, em geral, por exemplo, $f(x) = x^3$ não é limitada e $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ não tem máximo, em $[0, +\infty)$.

Se o intervalo não for fechado, o resultado também não vale, em geral. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, 1]$ não é limitada e a função $f(x) = x$ não tem mínimo em $(0, 1]$.

Se a função não for contínua, o resultado também não precisa valer. Por exemplo, $f(x) = x$ para $x \in [0, 2)$ e com $f(2) = 1$ não tem máximo.

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se

$$m=\min\{f(x):x\in[a,b]\} \text{ e } M=\max\{f(x):x\in[a,b]\},$$

então

$$Im(f)=f([a,b])=[m,M].$$