Propriedades Adicionais do Limite
Aula 10

18 de Setembro de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim_{x\to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim_{x\to p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x\to p} f_1(x) + \lim_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim_{x\to p} \; k \; f_1(x) = k \, L_1$ onde $k =$ constante.

3) $\lim_{x\to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x\to p} f_1(x) \cdot \lim_{x\to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

4) $\lim_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim_{x\to p} f_1(x)}{\lim_{x\to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Antes de provar estas propriedades vamos, rapidamente, nos convencer da enorme quantidade de trabalho que evitamos ao fazer o pequeno esforço de demonstrá-las.

Primeiramente note que, como $\lim\limits_{x\to p} x = p$ então, de 3) segue que $\lim\limits_{x\to p} x^2 = p^2$ e, por indução, obtemos que $\lim\limits_{x\to p} x^n = p^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Agora, de 1), 2) e 3), podemos facilmente concluir que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinômio, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Além disso, usando 4), concluímos que, se $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são polinômios e p é tal que $f_2(p) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{f_1(p)}{f_2(p)}$

Mais geralmente, utilizando a propriedade do produto e um argumento de indução obtemos que, se $\lim_{x\to p} f(x) = L$,

$$\lim_{x\to p}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to p} f(x)\right]^n = L^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercício

Calcule $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 8)$, $[R : 32]$ *e* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}$, $[R : 1/4]$.

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$, $[R : 6]$.

De fato: Simplesmente note que, para $h \neq 0$, $\dfrac{(3+h)^2-9}{h} = h+6$ e que $\lim\limits_{h\to 0} h + 6 = 6$.

Sabendo de que estas propriedades facilitam, enormemente, o nosso trabalho, vamos fazer a demonstração das mesmas para poder utilizá-las, livremente.

Prova de 1): $\lim_{x \to p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \to p} f_1(x) + \lim_{x \to p} f_2(x) = L_1 + L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$x \in D_{f_i},\ 0 < |x - p| < \delta_i \ \Rightarrow \ |f_i(x) - L_i| < \frac{\epsilon}{2},\ i = 1, 2.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 + f_2},\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$$

$$|(f_1 + f_2)(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x \to p} (f_1 + f_2)(x) = L_1 + L_2$.

Prova de 2): $\lim_{x \to p} k\ f_1(x) = k\ L_1$ onde $k =$ constante

Se $k = 0$ o resultado é trivial. Se $k \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Então

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |kf_1(x) - kL_1| = |k|\ |f_1(x) - L_1| < |k| \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x \to p} (kf_1)(x) = kL_1$.

Prova de 3): $\lim_{x\to p}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to p} f_1(x)\cdot \lim_{x\to p} f_2(x) = L_1\cdot L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x-p| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}, 1\right\}.$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}, 1\right\}.$$

Logo $|f_2(x)| \leq |f_2(x) - L_2| + |L_2| < |L_2| + 1$ sempre que $x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2$.

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$
\begin{aligned}
|(f_1 \cdot f_2)(x) - (L_1 \cdot L_2)| &\leq |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\
&\leq |f_1(x) - L_1||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&\leq |f_1(x) - L_1|\,(|L_2| + 1) + |L_1|\,|f_2(x) - L_2| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}(|L_2| + 1) + |L_1|\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

ou seja $\lim\limits_{x \to p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Prova de 4): $\displaystyle \lim_{x\to p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to p} f_1(x)}{\displaystyle\lim_{x\to p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}\,, \quad \text{se} \;\; L_2 \neq 0\,.$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\; 0 < |x-p| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon|L_2|}{4}$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2},\; 0 < |x-p| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1|+1)}, \frac{|L_2|}{2}\right\}.$$

Logo, se $x \in D_{f_2},\; 0<|x-p|<\delta_2$

$$|L_2| \leq |f_2(x) - L_2| + |f_2(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |f_2(x)| \;\text{ e }\; \frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)|.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \frac{|(f_1(x) - L_1)L_2 + (L_2 - f_2(x))L_1|}{|f_2(x)|\,|L_2|} \\
&\leq \frac{|f_1(x) - L_1||L_2| + |L_2 - f_2(x)||L_1|}{|L_2|\,|L_2|/2} \\
&\leq 2\frac{|f_1(x) - L_1|}{|L_2|} + 2|L_2 - f_2(x)|\frac{|L_1|}{|L_2|^2} \\
&\leq 2\frac{\epsilon|L_2|}{4}\frac{1}{|L_2|} + 2\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1| + 1)}\frac{|L_1|}{|L_2|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

ou seja $\lim\limits_{x \to p}(f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Propriedades Adicionais: Comparação e Confronto

Além das propriedades mostradas anteriormente, a comparação o confronto são propriedades extremamente úteis para que possamos concluir a existência de limites. Começamos com a comparação.

Teorema (Comparação)

Se p é um ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$ e $f(x) \leq g(x)$ sempre que $x \in (D_f \cap D_g) \setminus \{p\}$ e x está próximo de p e os limites de f e g quando x tende a p existem, então

$$\lim_{x \to p} f(x) = \boxed{L_f \leq L_g} = \lim_{x \to p} g(x).$$

Observação: O texto em azul do enunciado significa que,

- existe $r > 0$ tal que $x \in D_f \cap D_g$, $0 < |x - p| < r$ implica $f(x) \leq g(x)$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_f > 0$ e $\delta_g > 0$ tais que,

$$x \in D_f,\ 0 < |x-p| < \delta_f \Rightarrow \boxed{L_f - \epsilon < f(x)} < L_f + \epsilon$$

$$x \in D_g,\ 0 < |x-p| < \delta_g \Rightarrow L_g - \epsilon < \boxed{g(x) < L_g + \epsilon}$$

Ainda, existe $r > 0$ tal que

$$x \in D_f \cap D_g,\ 0 < |x-p| < r \Rightarrow \boxed{f(x) \leq g(x)}.$$

Assim, para $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, r\}$, $x \in D_f \cap D_g$ e $0 < |x-p| < \delta$, temos

$$\boxed{L_f - \epsilon < f(x) \leq g(x) < L_g + \epsilon}$$

e consequentemente $L_f \leq L_g$.

Teorema (do Confronto)

Dadas f, g, h funções e p ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g \cap D_h$, se existe $r > 0$ tal que $\{x \in D_g : 0 < |x - p| < r\} \subset D_f \cap D_h$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad para \quad x \in D, \quad 0 < |x - p| < r,$$

e se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L \, .$$

De fato: Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_f > 0$ e $\delta_h > 0$ tais que,

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta_f \Rightarrow \boxed{L - \epsilon < f(x)} < L + \epsilon$$

$$x \in D_h,\ 0 < |x - p| < \delta_h \Rightarrow L - \epsilon < \boxed{h(x) < L + \epsilon}$$

Ainda, existe $r > 0$ tal que

$$x \in \overbrace{D_f \cap D_g \cap D_h}^{=D_g},\ 0 < |x - p| < r \Rightarrow \boxed{f(x) \leq g(x) \leq h(x)}.$$

Se $\boxed{\delta = \min\{\delta_f, \delta_h, r\},\ x \in D_g \text{ e } 0 < |x - p| < \delta}$, temos

$$\boxed{x \in D_f \cap D_g \cap D_h,} \quad \text{e}$$

$$\boxed{L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon}$$

Logo, $\boxed{\text{dado } \epsilon > 0, \text{ para } \delta = \min\{\delta_f, \delta_h, r\},\ x \in D_g \text{ e } 0 < |x - p| < \delta,}$

$\boxed{\text{temos } |g(x) - L| < \epsilon}$ e portanto $\lim_{x \to p} g(x) = L$.

Exemplo

As funções trigonométricas são contínuas.

Prova: Das fórmulas de transformação de soma em produto, para qualquer p, temos

$$\begin{aligned} |\mathrm{sen} x - \mathrm{sen} p| &= \left| 2\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\cos\left(\frac{x+p}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-p}{2}\right| = |x-p|. \end{aligned}$$

Onde usamos que $|\mathrm{sen}\theta| \leq |\theta|$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Como $\lim_{x\to p}(x-p) = 0$, do Teorema do Confronto, segue que $\lim_{x\to p}(\mathrm{sen} x - \mathrm{sen} p) = 0$, ou seja, $\lim_{x\to p} \mathrm{sen} x = \mathrm{sen} p$. Logo a função seno é contínua para todo p.

A prova da continuidade do cosseno é feita de maneira similar utilizando a igualdade

$$\boxed{\cos x - \cos p = -2\mathrm{sen}\left(\frac{x+p}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)}.$$

A continuidade das outras funções trigonométricas seguem das propriedades do limite. $\square$

Exemplo

Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$

De fato: Note que,

$$-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1.$$

Multiplicando por x^2 temos

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x^2.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

(a) *Calcule, caso exista, $\lim_{x \to 0} f(x)$*.

(b) *Verifique se f é contínua em 0*.

Solução: Como $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, segue do Teorema do Confronto que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e, do fato que $|f(x)| \leq x^2$ segue que $f(0) = 0$. Logo existe o limite $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ e f é contínua em $x = 0$.

Observação: Diremos que f é infinitésima em p se $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Infinitésima vezes limitada é infinitésima

Corolário

Dadas $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$, p ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$ e, para algum $M > 0$ e $r > 0$, $|g(x)| \leq M$, $x \in D_g$, $0 < |x - p| < r$. Então
$\lim\limits_{x \to p} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to p} f(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.

De fato: Note que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = 0$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| = ||f(x)| - 0| < \epsilon$$

se, e somente se $\lim\limits_{x \to p} |f(x)| = 0.$ Como

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M\, |f(x)|,\ \ x \in D_{fg} = D_f \cap D_g,\ 0 < |x - p| < r.$$

o resultado segue do Teorema da Confronto.

Exercício: Vimos que $\lim_{x\to p} f(x)=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0$. Prove que $\lim_{x\to p} f(x)=L$ se, e somente se, $\lim_{x\to p}(f(x)-L)=0$ se, e somente se, $\lim_{x\to p} |f(x)-L|=0$. Prove que $\lim_{x\to p} f(x)=L \Longrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)|=|L|$ e que não vale a volta.

Sugestão:

- Para ver que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to p}(f(x)-L)=0$ use a propriedade que o limite da soma é a soma dos limites.
- Para ver que $\lim_{x\to p} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = |L|$, note que $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$, para todo $x \in D_f$.
- Para ver que não vale a volta, considere a funão $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -1$ se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exemplo

Calcule $\lim_{x \to 0} x^2 g(x)$*, onde* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $g(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ *.*

Solução: Note que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ e que $|g(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício: Calcule

$$(a) \ \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}; \qquad (b) \ \lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2}.$$

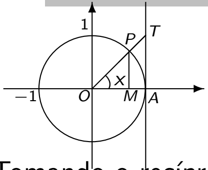
O Primeiro Limite Fundamental

Exemplo (O Primeiro Limite Fundamental)

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.}$$

De fato: Note que que para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ vale a desigualdade

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$



$\operatorname{sen} x = |PM| < |PA| < x$ e $A(\text{setor}\, OPA) < A(\triangle OTA)$

$\operatorname{sen} x < x$ e $\frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

Tomando o recíproco e multiplicando por $\operatorname{sen} x$, obtemos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x, \quad x \in (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Se $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\boxed{-x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ e } 1 > \frac{\text{sen}(-x)}{-x} > \cos(-x)}$. Logo

$$\boxed{1 > \frac{\text{sen} x}{x} > \cos x, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.}$$

Como $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$. □

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$.

De fato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \right) = 1 \cdot 1 = 1$$