Limite e Continuidade - Aula 09

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

13 de Setembro de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Definição

Nesta seção vamos a dar a definição matemática precisa de limite. Começamos, em um exemplo, com uma análise mais formal da idéia de limite. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \neq 3, \\ 6, & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$.

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos do que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x - 3|$ e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo nosso problema é achar um número δ tal que,

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < 0,1.$$

Veja que $|x-3|>0$ equivale a dizer que $x \neq 3$.

Note que se $0<|x-3|<\dfrac{0,1}{2}$, então

$$|f(x)-5| = |(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < 0,1.$$

Assim a resposta será $\delta = \dfrac{0,1}{2} = 0,05$.

Se mudarmos o número 0,1 no problema para um número menor (para 0,01), então o valor de δ mudará (para $\delta = \dfrac{0,01}{2}$).

Em geral, se usarmos um valor positivo arbitrário ε, então o problema será achar um δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

E podemos ver que, neste caso, δ pode ser escolhido igual a $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

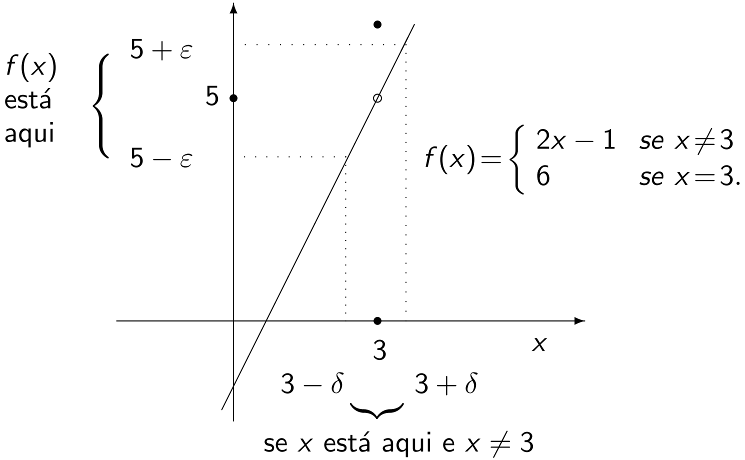
Esta é uma maneira de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3.

Também podemos escrever

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta, \quad x \neq 3,$$

ou seja, tomando os valores de $x \neq 3$ no intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Gráficamente, temos o seguinte:



Definição (Limite)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f. Diremos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende** p **é** L *se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f. O limite de $f(x)$ quando x tende a p, caso exista, é único. Este limite será denotado por

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

De fato: Se L e L' são limites de $f(x)$ quando x tende a p, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

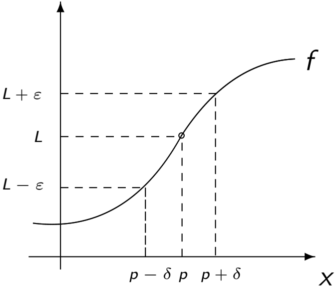
$$x \in D_f \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \implies |f(x) - L| < \varepsilon \text{ e } |f(x) - L'| < \varepsilon.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, com a escolha de δ acima e $x \in D_f$ satisfazendo $0 < |x - p| < \delta$, temos

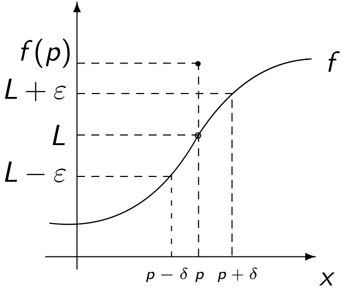
$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |f(x) - L| + |L' - f(x)| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que $L = L'$. $\square$

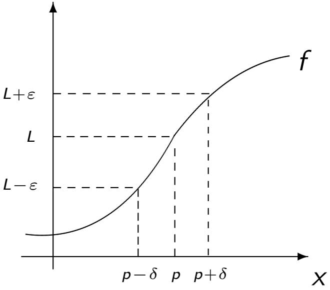
Interpretação geométrica do limite.



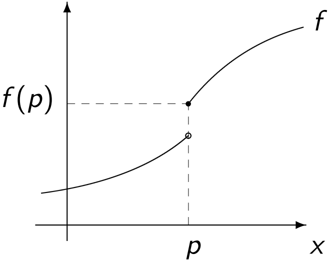
$$\lim_{x \to p} f(x) = L,\ p \notin D_f$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L \neq f(p)$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p)$$



Não existe o limite de f em p

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Fazemos uma análise preliminar para determinar como δ pode ser obtido a partir de ϵ. Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |(3x - 2) - 4| < \varepsilon.$$

Mas $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2|$. Assim, teremos

$$3|x - 2| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Isto sugere que escolhamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Provemos que esta escolha de δ é adequada. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, então

$$|(3x-2)-4| = |3x-6| = 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ tal que

$$|(3x-2)-4| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x-2| < \delta$$

logo, pela definição, $\lim\limits_{x \to 2}(3x-2) = 4$.

Limites Laterais

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D^+ = D \cap (p, \infty)$ $(D^- = D \cap (-\infty, p))$.

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D_f. O **limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** p **pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \to p^+} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D^+}(x) \qquad \left(\lim_{x \to p^-} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D^-}(x) \right)$$

Critério negativo para existência de limites

Teorema

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D_f. Então

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x).$$

Prova: Existe $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f, \ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon,$$

se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f \cap (-\infty, p), \ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in D_f \cap (p, \infty), \ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x). \square$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to R$ *a função definida por*

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \; x \neq 1.$$

Mostre que não existe o limite $\lim_{x\to 1} f(x)$*.*

De fato: *Para todo* $x < 1$ *temos que* $f(x) = -1$ *e portanto* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$*. Por outro lado, Para todo* $x > 1$ *temos que* $f(x) = 1$ *e portanto* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$*. Do teorema anterior, não pode existir o limite* $\lim_{x\to 1} f(x)$*.*

Continuidade

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to p} k = k$ *e* $\lim_{x \to p} x = p$*.*

- Dado $k \in \mathbb{R}$, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p \in \mathbb{R}$ e note que, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta > 0$ qualquer, temos $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| = |k - k| = 0 < \epsilon$.
- Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p \in \mathbb{R}$ e note que, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \epsilon$, temos $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(p)| = |x - p| < \delta = \epsilon$.

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to p} x^2 = p^2$.

- Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p \in \mathbb{R}$ e, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta \leq \min\{1, \epsilon/(2|p|+1)\}$, temos

  $i)$ $0 < |x-p| < \delta \leq 1 \;\Rightarrow\; |x+p| \leq |x-p| + |2p| \leq 2|p|+1$ e

  $ii)$ $0 < |x-p| < \delta \leq \epsilon/(2|p|+1) \;\Rightarrow |x+p||x-p| \leq (2|p|+1)\delta \leq \epsilon$

  segue que, se $0 < |x-p| < \delta = \min\{1, \epsilon/(2|p|+1),$

  $$|h(x) - h(p)| = |x^2 - p^2| = |x+p||x-p| \leq (2|p|+1)|x-p|$$
  $$< (2|p|+1)\delta \leq \epsilon.$$

Observação:

Esperamos que os exemplos anteriores (que estão entre os limites mais elementares) tenham convencido o leitor que, definitivamente, não queremos calcular limites por definição.

Isto impõe a necessidade de buscar métodos que nos permitam mostrar a existência de limites sem que tenhamos, todas as vezes, que recorrer à definição.

As propriedades dos limites serão provadas a seguir e passarão a ser a nossa principal ferramenta para o cálculo de limites.

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$. *Diremos que* $f(x)$ **é contínua em** p *se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon \; .$$

Observação

Note que,

- *se* $p \in D_f$ *é um ponto de acumulação de* D_f, *então* f *é contínua em* p *se, e somente se,* $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ *e*
- *se* p *é um ponto isolado de* D_f *então* f *é contínua em* p.

Exemplo

(a) *A função* $f(x) = k$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(b) *A função* $f(x) = x$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(c) *A função* $f(x) = x + 1$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(d) *A função* $f(x) = x^2$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(e) *A função* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & se\ x \neq 1 \\ 0 & se\ x = 1 \end{cases}$ *não é contínua em* $x = 1$ *pois* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$.

Exercício: Verifique cada uma das afirmativas do exemplo anterior utilizando os resultados dos exemplos anteriores para as mesmas funções.

Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x\to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x\to p} (f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) + \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x\to p} \; k \; f_1(x) = k \, L_1$ onde $k =$ constante.

3) $\lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

4) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.