Números Reais e Funções - Aula 05

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

23 de Agosto de 2023

Segundo Semestre de 2023
Turma 2023201

Exemplo

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|\,xy| = |\,x|\;|\,y|\,.}$$

Exemplo (Desigualdade triangular)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|\,x+y| \leqslant |\,x| + |\,y|\,.}$$

Resolução: Somando $-|\,x| \leqslant x \leqslant |\,x|$ e $-|\,y| \leqslant y \leq |\,y|$ obtemos $-|\,x| - |\,y| \leqslant x + y \leqslant |\,x| + |\,y|$.$\square$

Exercício

Descreva o valor de $|x+1|+|x-1|$ *sem utilizar o módulo.*

- Se $x \geqslant 1$, então $\begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = x-1 \end{cases}$ e, portanto,
  $|x+1|+|x-1| = x+1+x-1 = 2x.$
- Se $-1 \leqslant x < 1$, então $\begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto,
  $|x+1|+|x-1| = x+1-x+1 = 2.$
- Se $x < -1$, então $\begin{cases} |x+1| = -x-1 \\ |x-1| = -x+1 \end{cases}$ e, portanto,
  $|x+1|+|x-1| = -x-1-x+1 = -2x.$

Logo $|x+1|+|x-1| = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 1 \\ 2, & -1 \leqslant x < 1 \\ -2x, & x < -1. \end{cases}$

Definição

Um **intervalo** *em* $\mathbb{R}$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que tem uma das seguintes formas:*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ **Intervalo fechado**,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ **Intervalo aberto**,
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$,
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$,
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Exemplo

$$\{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 < x + 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\} = (-\infty, 4).$$

Limitação de Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ *será dito* **limitado**, *se existir* $L > 0$ *tal que* $|x| \leqslant L$, *para todo* $x \in A$.

Proposição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ *será limitado se, e somente se, existir* $L > 0$ *tal que* $A \subset [-L, L]$.

Exemplo

(a) $A = [0, 1]$ *é limitado*

(b) $\mathbb{N}$ *não é limitado (será mostrado mais tarde)*

(c) $B = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *é limitado*

(d) $C = \left\{ \dfrac{2n - 1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *é limitado.*

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ *será dito* **ilimitado**, *se ele não for limitado.*

Proposição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ *será ilimitado se, e somente se, para todo* $L > 0$, *existir* $x \in A$ *tal que* $|x| > L$.

Limitante Superior e Inferior

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- *A será dito* **limitado superiormente**, *se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant L$, para todo $x \in A$.*
  Neste caso, L será chamado **limitante superior** *de A.*

- *A será dito* **limitado inferiormente**, *se existir ℓ tal que $x \geqslant \ell$, para todo $x \in A$.*
  Neste caso, ℓ será chamado **limitante inferior** *de A.*

Segundo a definição acima, podemos notar que $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, A for limitado superiormente e inferiormente.

Supremo

Definição (Supremo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\overline{L} \in \mathbb{R}$ é o supremo de A (escreveremos $\overline{L} = \sup A$) se for um limitante superior de A e para qualquer limitante superior L de A, tivermos $\overline{L} \leqslant L$.

- Quando $\overline{L} = \sup A \in A$, $\overline{L}$ será chamado **máximo** de A e escreveremos $\overline{L} = \max A$.
- Vimos que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem **supremo**.

Ínfimo

Definição (Ínfimo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\overline{\ell} \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A (escreveremos $\overline{\ell} = \inf A$) se for um limitante inferior de A e para qualquer limitante inferior ℓ de A, tivermos $\overline{\ell} \geqslant \ell$.

- Quando $\overline{\ell} = \inf A \in A$, $\overline{\ell}$ será chamado **mínimo** de A e escreveremos $\overline{\ell} = \min A$.
- Veremos que todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ tem **ínfimo**.

Proposição (1)

Dado $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente,* $L = \sup A$ *se, e só se,*

(a) L *é limitante superior de* A *e,*

(b) *para todo* $\varepsilon > 0$*, existir* $a \in A$ *tal que* $a > L - \varepsilon$*.*

Analogamente temos

Proposição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ *limitado inferiormente,* $A \neq \emptyset$*. Então* $L = \inf A$ *se, e somente se, valem as seguintes propriedades*

(a) L *é limitante inferior de* A*.*

(b) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $a \in A$ *tal que* $a < L + \varepsilon$*.*

Teorema (Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$)

Seja $x \neq 0$. Então o conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado.

Prova: Se $x > 0$. Suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja $L = \sup A$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L - x < mx$ e $L = \sup A < (m+1)x$, o que é uma contradição.
A prova do caso $x < 0$ é feita de modo análogo. $\square$

Exemplo

(a) *Considere* $A = [0, 1)$. *Então* -2 *e* 0 *são limitantes inferiores de* A *enquanto 1,* π *e 101 são limitantes superiores de* A.

(b) $\mathbb{N}$ *não é limitado (porque?) mas é limitado inferiormente por 0, pois* $0 \leqslant x$, *para todo* $x \in \mathbb{N}$.

(c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant \sqrt{2}\}$ *não é limitado (porque?), mas é limitado superiormente por* L, *onde* $L \geqslant \sqrt{2}$.

Corolário (1)

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \varepsilon \quad e \quad 2^{-n} < \varepsilon.$$

Já sabemos (por construção) que, entre dois números reais distintos existe um número racional.

Provemos que entre dois números reais distintos existe um número irracional.

De fato: Sejam a e b reais distintos. Se $a<b$ e $\epsilon=b-a>0$, do Corolário (1), escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \epsilon$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.
- Se $a \in \mathbb{I}$, $r = a + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.

Assim, entre dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

Corolário

Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

Corolário

$$\textit{Se } A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \textit{ então } \inf A = 0.$$

Exemplo

(a) *Seja* $A = (0, 1]$. *Então* $0 = \inf A$ *e* $1 = \max A$.

(b) $\sqrt{2} = \{p \in \mathbb{Q} : p \leqslant q$ *com* $0 < q$ *e* $q^2 < 2\}$ *é um corte.*

(c) *Seja* $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. *Então* $\sqrt{2} = \sup C$ *e* $-\sqrt{2} = \inf C$. *Note que* $-\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$ *não pertencem a* C.

Vamos provar que $\sqrt{2}$ é um corte. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ e $r^2 < 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[2r + 1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ e $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. Todas as demais propriedades de corte estão satisfeitas trivialmente.

Vamos provar que $\sqrt{2} = \sup C$. Como todos os elementos x de C são racionais que satisfazem $x^2 < 2$, $\sqrt{2}$ é um limitante superior para C. Agora, se $0 < L < \sqrt{2}$, existe um racional $r \in (L, \sqrt{2})$ e $L^2 < r^2 < 2$. Logo $r \in C$, e L não é limitante superior para C e prova o resultado.

Proposição

Se $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ for limitado inferiormente (superiormente), então $-A = \{-x : x \in A\}$ será limitado superiormente (inferiormente) e $\inf A = -\sup(-A)$ ($\sup A = -\inf(-A)$).

De fato: Se A for limitado inferiormente,

- $\inf(A) \leqslant x$, para todo $x \in A$ e, dado $\epsilon > 0$, existirá $a \in A$ tal que $a < \inf(A) + \epsilon$, ou (trocando o sinal),
- $-\inf(A) \geqslant -x$, para todo $-x \in -A$ e, dado $\epsilon > 0$, existirá $b = -a \in -A$ tal que $b = -a > -\inf(A) - \epsilon$.

Agora, da Proposição (1), $-A$ será limitado superiormente e $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Deixaremos, como exercício, a prova a outra afirmativa.

Corolário

Todo $A \neq \varnothing$ e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ tem ínfimo.

Corolário

Todo subconjunto limitado e não vazio de $\mathbb{R}$ tem ínfimo e supremo.

Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição (Vizinhança)

Uma **vizinhança** *de $a \in \mathbb{R}$ é qualquer intervalo aberto da reta contendo a.*

Exemplo (δ-vizinhança)

Se $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta\,,\ a + \delta)$ é uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ e é chamada $\delta-$vizinhança.

Definição (Ponto de Acumulação)

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Se, para todo $\delta > 0$, existe $a \in V_\delta(b) \cap A$, $a \neq b$, então b será dito **ponto de acumulação** *de A.*

Exemplo

(a) *O conjunto dos pontos de acumulação de* (a, b) *é* $[a, b]$.

(b) *Seja* $B = \mathbb{Z}$. *Então* B *não tem pontos de acumulação.*

(c) *Subconjuntos finitos de* $\mathbb{R}$ *não têm pontos de acumulação.*

d) *O conjunto dos pontos de acumulação de* $\mathbb{Q}$ *é* $\mathbb{R}$.

Definição (Ponto isolado)

Seja $B \subset \mathbb{R}$. *Um ponto* $b \in B$ *será dito um* **ponto isolado** *de* B, *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $V_\delta(b)$ *não contém pontos de* B *distintos de* b.

Exemplo

(a) *Seja* $B = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$*. Então o conjunto dos pontos de acumulação de* B *é* $\{0\}$ *e o conjunto dos pontos isolados de* B *é o próprio conjunto* B*.*

(b) *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *possui apenas pontos isolados.*

Observação:

- Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo $\mathbb{Z}$).
- Todo conjunto infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação (veja proposição a seguir).

Proposição (Bolzano-Weierstrass)

Se A é um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

Prova: Se $A \subset [-L, L]$ e $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ escolhidos de modo que: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = -a_0 = L$, $b_n - a_n = 2L/2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $[a_n, b_n]$ contém infinitos elementos de A. Seja $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n, b_n] \subset [a_j, b_j]$, $j \leqslant n$ e $[a_j, b_j] \subset [a_n, b_n]$, $j > n$. Em qualquer dos casos $a_n \leqslant b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $a \leqslant b_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Segue que $a_n \leqslant a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in \bigcap_{n \geqslant 1} [a_n, b_n]$.

Dado $\delta > 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $2L/2^n < \delta$. Seque que $a \in [a_n, b_n] \subset (a - \delta, a + \delta) = V_\delta(a)$ e a é ponto de acumulação de A. $\square$

Funções - Noções Gerais

O principal objetivo do cálculo é o estudo das funções. As funções surgem para expressar uma quantidade em termos de outra.

Por exemplo, a área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona r com A é dada por $A = \pi r^2$, neste caso diremos que A é uma função de r.

Outros exemplos são, a população P de uma determinada espécie que depende do tempo t, o custo C de envio de um pacote pelo correio que depende de seu peso w.

Definição

Dados dois conjuntos $A, B \neq \emptyset$, uma **função** *f de A em B (escreveremos $f : A \to B$) é uma lei ou regra que a cada $x \in A$, associa um único elemento $f(x) \in B$. Adotaremos a seguinte terminologia*

- *A é chamado* **domínio** *de f ;*
- *B é chamado* **contra-domínio** *de f ;*
- *o conjunto*

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B\,;\; y = f(x),\; x \in A\}\,.$$

é chamado **imagem** *de f .*

Notações alternativas. Seja $f : A \to B$ uma função. Podemos denotar

- $D_f = D(f) = A$ para o domínio de f;
- $f(D_f) := \mathrm{Im}(f)$ para a imagem de f.

Também podemos descrever a ação de f ponto a ponto como

$$A \ni x \;\mapsto\; f(x) \in B\,.$$

Convenção: Se o domínio da função não é dado explicitamente, então, por convenção, adotamos como domínio o conjunto de todos os números reais x para os quais a regra $f(x)$ esteja definida.

Definição

Sejam $f : A \to B$ uma função e $A, B \subset \mathbb{R}$. O conjunto

$$G(f) = G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

é chamado **gráfico** *de f.*

Decorre da definição que $G(f)$ é o lugar geométrico descrito pelos pontos da forma $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f.

Observe que, por exemplo, uma circunferência não representa o gráfico de uma função.

Exemplo

Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por:*

(a) **função constante**: $f(x) = k$;

(b) **função identidade**: $f(x) = x$;

(c) **função linear**: $f(x) = ax$;

(d) **função afim**: $f(x) = ax + b$;

(e) **função polinomial**:
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$; *em particular,*
se $n = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ *é uma* **função quadrática**,
se $n = 3$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *é uma* **função cúbica**;

(f) **função racional**: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, *onde* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são funções polinomiais. Note que* $D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\ q(x) \neq 0\}$;

(g) **função potência**: *$f(x) = x^a$, onde a é uma constante; em particular,*
se $a = \dfrac{1}{n}$, $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo, é uma **função raiz**; *temos que $D_f = [0, +\infty)$ se n é par e $D_f = \mathbb{R}$ se n é ímpar;*

(h) **função algébrica**: *função construída como solução de uma equação polinomial da forma*

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_n(x) = 0,$$

($p_0, p_1, \cdots, p_n$ polinômios) como, por exemplo,

$$f(x) = \sqrt{x^2+1},\ D_f = \mathbb{R},$$

$$g(x) = \frac{(x-4)}{x^4 + \sqrt{2x}} \sqrt[3]{x+1},\ D_g = (0, +\infty).$$

Definição

Sejam $f : A \to B$ e $D \subset A$. Denotamos por $f\big|_D$ a **restrição** *de f ao subconjunto D de A. Então*

$$f\big|_D(x) = f(x), \quad \textit{para todo} \;\; x \in D.$$

Observação: Seja $D \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por $I_D : D \to D$ a **função identidade** definida por $I_D(x) = x$ para todo $x \in D$.

Exemplo

Função definida por partes: *definida por regras diferentes em distintas partes de seu domínio; por exemplo,*

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 1 - x & se\ x \leq 1, \\ x^2 & se\ x > 1; \end{cases}$$

$$(b)\ g(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geqslant 0, \\ -x & se\ x < 0. \end{cases}$$

Exemplo (Modelagem)

Um fabricante de refrigerante quer produzir latas cilíndricas para seu produto. A lata dever ter um volume de 360 ml. Expresse a área superficial total da lata em função do seu raio e dê o domínio da função.

Solução: Seja r o raio da lata e h a altura. A área superficial total (topo, fundo e área lateral) é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Sabemos que o volume $V = \pi r^2 h$ deve ser de 360 ml, temos

$$\pi r^2 h = 360,$$

ou seja $h = 360/\pi r^2$. Portanto,

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r 360/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 720/r.$$

Como r só pode assumir valores positivos, $D_S = (0, +\infty)$.

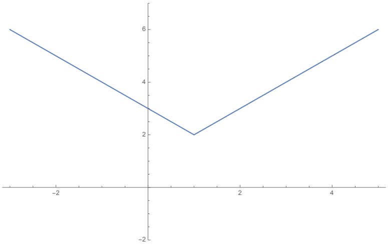
Translação e o Esboço de Gráficos

Exemplo (Translação)

Esboce o gráfico de $f(x) = |x-1| + 2$.

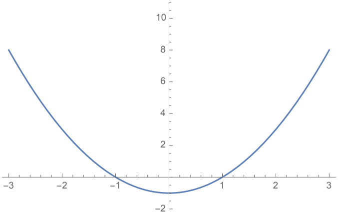
Eliminando o módulo, temos $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geqslant 1, \\ 3-x & \text{se } x < 1. \end{cases}$

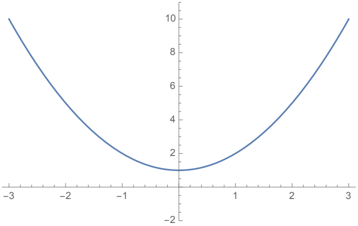
Desenhar o gráfico.



Exemplo

Esboce os gráficos de $f(x) = x^2 - 1$ *e* $g(x) = x^2 + 1$.





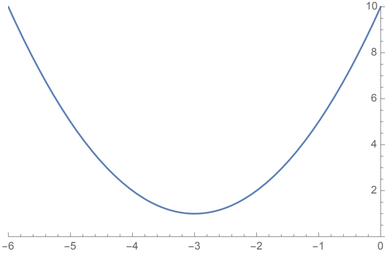
Gráficos e a translação:

- $f(x) + k$ translada o gráfico de f, k unidades *para cima* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para baixo* se $k < 0$,
- $f(x + k)$ translada o gráfico de f, k unidades *para a esquerda* se $k > 0$ e $|k|$ unidades *para a direita* se $k < 0$.

Exemplo

Esboce o gráficos de $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

Completando o quadrado, escrevemos $f(x) = (x+3)^2 + 1$. Logo, o gráfico é a parábola $y = x^2$ deslocada 3 unidades para esquerda e então uma unidade para cima.

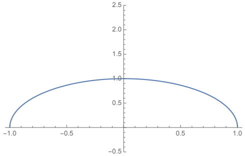


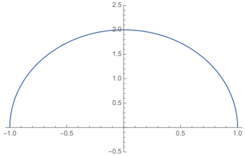
Dilatação e o Esboço de Gráficos

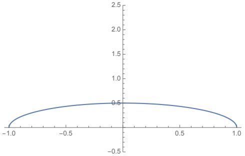
Exemplo (Dilatação em y)

Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = 2f(x) \qquad h(x) = \frac{1}{2}f(x)$$



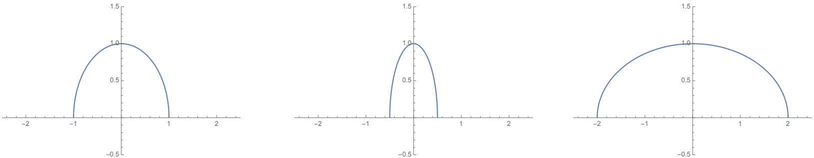




Exemplo (Dilatação em x)

Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad g(x) = f(2x) \qquad h(x) = f(x/2)$$



Note que $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ e $h(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

Resumo das propriedades

Os exemplos anteriores ilustram o seguinte:

Seja $k > 1$

- $kf(x)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo y*
- $\frac{1}{k}f(x)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo y*
- $f(kx)$ contrai o gráfico de f por um fator $1/k$ *no eixo x*
- $f(x/k)$ dilata o gráfico de f por um fator k *no eixo x*

Reflexões e Esboço de Gráficos

Note que:

- O ponto $(a, -b)$ é a reflexão de (a, b) em relação ao eixo x.
- O ponto (a, b) é a reflexão de $(-a, b)$ em relação ao eixo y.
- Se refletimos o ponto (a, b) em relação ao eixo x, e depois em relação ao eixo y, produzimos o ponto $(-a, -b)$, que é a reflexão do ponto (a, b) em relação à origem $(0, 0)$.

Propriedades da reflexão

- $g(x) = -f(x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo x*
- $g(x) = f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *ao eixo y*
- $g(x) = -f(-x)$ reflete o gráfico de f relativamente *à origem*

Exemplo (Reflexão)

Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = -\sqrt{x} \qquad h(x) = \sqrt{-x} \qquad j(x) = -\sqrt{-x}$$