Gabarito da 1.^{a} Prova de SMA-333 Cálculo III

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Questões	Notas
1.^{a}	**2.0**
2.^{a}	**2.0**
3.^{a}	**3.0**
4.^{a}	**3.0**
Total	**10.0**

Nome:____

N.^{o} USP: ____________ **12.04.2005**

1.^{a} Questão: (Valor 2.0) Mostre que se a seqüência $\{a_n\}$ é convergente com limite a então, a seqüência $\{|a_n|\}$ é convergente com limite $|a|$. Vale a recíproca? Se a resposta for afirmativa prove, caso contrário dê um contra-exemplo. O que ocorre se $a = 0$?

Solução: Mostremos que se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||a_n| - |a|| < \epsilon, \quad \forall n \geq N;$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

A recíproca não vale pois $\{a_n\}$ com $a_n = (-1)^n$ não é convergente, mas $\{|a_n|\} = \{1, 1, 1, \cdots\}$ é convergente.

No caso particular $a = 0$, a recíprova é verdadeira. De fato, como $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||a_n| - a| = ||a_n| - 0| = |a_n| < \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

e isto implica que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = a = 0$.

2.ª Questão: (Valor: 2.0) Prove, utilizando a definição ou propriedades, que a seqüência dada é convergente:

$$\text{(a)} \left\{ \sqrt[n]{n^2} \right\} \quad \text{(b)} \left\{ n^2 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\}$$

Solução:

a) Primeiramente note que $\sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2$. Logo basta mostrar que $\{\sqrt[n]{n}\}$ é convergente e isto segue do fato que

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \text{ e } n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2!}a_n^2 + \cdots na_n^{n-1} + a_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a_n^2, \quad n \geq 2.$$

Segue que $1 \geq \frac{n-1}{2}a_n^2$ e $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \geq a_n \geq 0$, $n \geq 2$. Do Teorema do Confronto (para seqüências) obtemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Disto segue que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$.

b) Primeiramente note que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (aplicando duas vezes a regra de L'Hospital). Disto segue que

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{1}{2}.$$

3.ª Questão: (Valor: 3.0) Encontre uma fração ou soma de frações que aproxime $\sqrt{3}$ com erro inferior a 10^{-2}.

- *Sugestão*: Mostre que a seqüência $\{x_n\}$ dada por: $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n}$, $n \geq 2$, é convergente com limite $\sqrt{3}$ e estime o erro $e_n = |x_n - \sqrt{3}|$.

Solução: Já vimos que a seqüência $\{x_n\}$ satisfaz

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$$

e com isto mostramos em sala de aula que a seqüência $\{x_n\}$ é convergente e que seu limite é $\sqrt{3}$. Da espressão acima, é fácil ver que

$$|x_{n+k+1} - x_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2}\right)|x_{n+1} - x_n| \leq |x_{n+1} - x_n|.$$

Fazendo $k \to \infty$ e usando o critério da comparação para seqüências temos que

$$|\sqrt{3} - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n|.$$

Assim, basta estimar a diferença entre x_{n+1} e x_n para determinar o erro com o qual x_{n+1} aproxima $\sqrt{3}$. Calculando x_n para alguns valores de n temos.

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{7}{4}, \quad x_3 = \frac{97}{56}, \quad x_4 = \frac{97}{112} + \frac{84}{97}.$$

Note que $|x_4 - x_3| = |\frac{84}{97} - \frac{97}{112}| = \frac{1}{97 \times 112} < 10^{-4} < 10^{-2}$ e portanto x_4 aproxima $\sqrt{3}$ com erro inferior a 10^{-2}.

4.ª Questão: (Valor: 3.0) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostre que, se $\{x_n\}$ é uma seqüência convergente com limite x_0 então, a seqüência $\{f(x_n)\}$ é convergente com limite $f(x_0)$. Use este resultado para mostrar que a seqüência

$$\left\{e^{\left(\frac{n^3+3n^2+1}{(3n^2+2n+1)(2n+1)}\right)^2}\right\}$$

é convergente com limite $e^{\frac{1}{36}}$.

Solução: Sabemos que f é contínua em x_0; ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \delta$, $\forall n \geq N$. Com isto

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon, \quad \forall n \geq N;$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Sabemos que $\left\{\left(\frac{n^3+3n^2+1}{(3n^2+2n+1)(2n+1)}\right)^2\right\}$ converge para $\frac{1}{36}$. Usando o resultado anterior com

$$x_n = \left(\frac{n^3 + 3n^2 + 1}{(3n^2 + 2n + 1)(2n + 1)}\right)^2$$

e com $f(x) = e^x$ temos o resultado desejado.