Cálculo III - SMA 333

Notas de Aula

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Primeira Aula ↓

Para iniciar a discução vamos começar dizendo que, nesta disciplina, todos os objetos estudados serão seqüências. Não vamos definir seqüência neste contexto abstrato mas podemos dizer que uma seqüência é uma lista infinita de objetos.

As seqüências estão presentes no nosso dia a dia desde a infância. Logo depois de aprender a falar, começam a nos ensinar a contar e tomamos contato com a nossa primeira seqüência. Assim, a lista de números $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ é provavelmente a primeira seqüência com a qual tomamos contato (mesmo sem saber representá-la). Neste caso, os objetos são números os números naturais. Mais tarde, quando começamos a ler e escrever tomamos contato com uma lista de letras e espaços dispostos em uma certa ordem para formar os textos que lemos durante a nossa vida. Assim, podemos formar uma lista infinita de letras e espaços ou seja, uma seqüência onde os objetos são letras e espaços.

Podemos seguir imaginando inúmeros outros exemplos do nosso cotidiano onde as seqüências estão presentes mas vamos pensar naquelas que aparecem quando começamos a estudar matemática. Muito cedo, na nossa vida escolar aparecem as seqüências dos números ímpares, as seqüências dos múltiplos de um natural dado, a seqüência dos números primos, etc. Duas particulares seqüências que são enfatizadas no ensino médio são as progressões aritméticas e geométrica que por sua vez estão presentes em uma grande variedade de exemplos da vida cotidiana (Veja [1]).

No Brasil, todos aprendemos a conviver com duas particulares progressões geométricas: a perda do poder de compra gerada pela inflação e o aumento da dívida gerada pelos juros. É um exercício simples e instrutivo determinar a perda anual do poder de compra gerada pela inflação de 0,5% a.m. e identificar as seqüências envolvidas. O mesmo pode ser feito para obter uma fórmula para o cálculo do rendimento de uma aplicação com táxa de 0.6%

a.m.

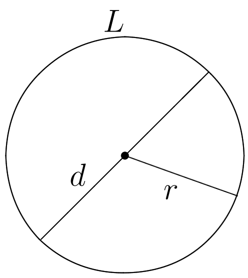
Muitas outras seqüências estão presentes no nosso dia a dia. Quando assistimos TV as imagens são compostas por uma seqüencia de telas que são exibidas uma após a outra e muitas vezes por segundo.

Uma análise mais profunda de alguns sinais elétricos periódicos que produzimos nos leva a concluir que esses sinais são compostos por uma seqüência de sinais senoidais com espectro de freqüências entre zero e infinito. Estas são as Séries de Fourier que vamos estudar no final desta disciplina. Já vimos também que as funções de classe C^∞ apresentam uma seqüência de polinômios que supostamente as aproximam (os Polinômios de Taylor). Estes aparecerão quando estudarmos séries de potências. Em ambos os casos acima, os objetos são funções (polinômios trigonométricos ou simplesmente polinômios).

De forma bastante elementar e muito antes da noção de seqüência ser sistematizada e bem compreendida, Arquimedes utilizou uma seqüência para determinar a área de um círculo sabendo que a razão entre o comprimento da circunferência de um circulo e seu diâmetro é um número fixo denotado por π. Apenas para mostrar a genialidade deste grande cientista vamos apresentar a seguir o seu argumento.

Exemplo 1.0.1. *A área de uma circunferência.*

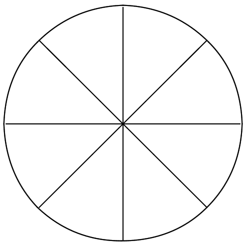
O quociente entre o comprimento de uma circunferência e o diâmetro é um número real denotado por π.

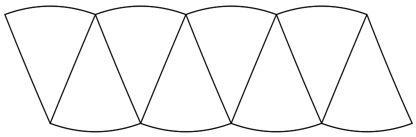


$$L = \pi\, d = 2\pi\, r$$

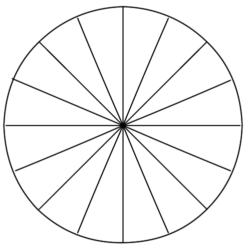
Vamos utilizar o argumento de Archimedes para determinar a área do círculo de raio r. A idéia de Archimedes (287-212 a.c.) foi dividir a circunferência em setores de igual área e reagrupá-los da seguinte forma

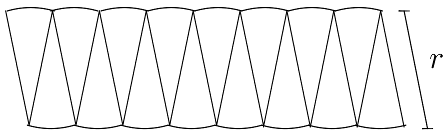
8 Setores





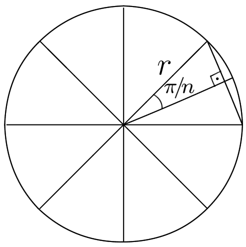
16 Setores





Cada uma dessas figuras geométricas planas tem área exatamente igual a área do circulo (pois é obtida do círculo recortando e reagrupando os pedaços). Esta seqüência de figuras geométricas planas se aproximam do retângulo de base πr e altura r e portanto a área do círculo tem que ser exatamente πr^2.

A demonstração deste resultado envolve o conceito de limite de seqüências que introduziremos brevemente. Se dividimos a circunferência em n setores iguais temos



$$A \sim 2n\, r\, \mathrm{sen}\frac{\pi}{n}\; r\cos\frac{\pi}{n}\,\frac{1}{2} \sim \pi r^2\,\frac{\mathrm{sen}\pi/n}{\pi/n}\,\cos\pi/n.$$

Se n é grande $\cos \pi/n \sim 1$ e $\dfrac{\text{sen}\pi/n}{\pi/n} \sim 1$ (primeiro limite fundamental) e teremos

$$A = \pi r^2$$

é, portanto, fundamental entendermos o processo de passagem ao limite de uma seqüência para encontrarmos soluções para problemas simples como o cálculo da área de um círculo.

Exemplo 1.0.2. *Cuidado!*

Recorde a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica de razão r

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Se $|r| < 1$, quanto maior o valor de n menor é o valor de r^{n+1} e mostraremos que r^{n+1} tende a zero quando n tende a infinito. Desta forma a soma de todos os termos da seqüência geométrica $\{1, r, r^2, r^3, \ldots\}$ é

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1. \tag{1.1}$$

Isto significa que quando tomamos

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

para n grande nos aproximamos do valor $S = \frac{1}{1-r}$. Uma tentativa de estender a igualdade (1.1) para $r = -1$ parece conduzir a

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

e de fato, matemáticos de peso como Euler, Leibniz e Bernoulli chegaram a propor $\frac{1}{2}$ como resultado desta soma "infinita" (antes de existir o conceito de série convergente que apresentaremos brevemente). Bernoulli usava a seguinte justificativa

$$\begin{aligned}
&S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \;\Rightarrow \\
&S - 1 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = -S \;\Rightarrow \\
&2S = 1 \text{ e } S = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

No entanto as somas S_n assumem os valores 0 e 1 alternadamente e não se aproximam de qualquer número real. Logo, as manipulações algébricas acima não fazem sentido.

A interpretação correta de (1.1) é dada pela noção de "limite" (noção de série convergente) que expressa o fato que S_n se aproxima de S.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}, \quad \text{para } |r| < 1$$

e tal limite não existe se $|r| \geq 1$.

Capítulo 2

Seqüências Numéricas

2.1 Definição, Exemplos e Operações

No Cálculo I estudamos as funções definidas em subconjuntos $\mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ e no Cálculo II estudamos as funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ e tomando valores em R^n com m e n naturais. Nesta seção, consideraremos um caso particular dessas funções que são as seqüências numéricas.

Definição 2.1.1. *Uma seqüência numérica é uma função definida no conjunto dos números naturais e com valores reais, ou seja,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Note que cada número natural é levado em um único número real

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ 0 & \to & f(0) \\ 1 & \to & f(1) \\ 2 & \to & f(2) \\ 3 & \to & f(3) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Se denotamos $f(n)$ por x_n, a seqüência f está unicamente determinada pela lista de números $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ ou, abreviadamente, por $\{x_n\}$. Desta forma, adotaremos a notação $\{x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ para representar uma seqüência. Cada x_n é chamado um elemento da seqüência.

Exemplo 2.1.1. Temos

- A seqüência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = n$ será denotada por $\{n\}$ ou $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

- A seqüência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \dfrac{1}{n+1}$ será denotada por $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ ou $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots\right\}$.
- A seqüência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = (-1)^n$ será denotada por $\{(-1)^n\}$ ou $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$.
- A seqüência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ será denotada por $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ ou $\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dots\right\}$.
- A seqüência $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = r^n$, $r \in \mathbb{R}$, será denotada por $\{r^n\}$ ou $\{1, r, r^2, r^3, \dots\}$.

Observação: Como uma seqüência é uma função particular, estão definidas as operações soma, multiplicação por escalar, produto e quociente de seqüências.

Definição 2.1.2. *Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são seqüências e $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos*

- *A soma $\{s_n\}$ de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ por*

$$s_n := x_n + y_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Assim $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x +_n + y_n\}$.

- *O produto $\{p_n\}$ de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ por*

$$p_n := x_n y_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Assim $\{x_n\}\{y_n\} = \{x_n y_n\}$.

- *A multiplicação $\{m_n\}$ do número real α por $\{x_n\}$ por*

$$m_n := \alpha x_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Assim $\alpha\{x_n\} = \{\alpha x_n\}$.

- *Se $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o quociente $\{q_n\}$ de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ por*

$$q_n := \frac{x_n}{y_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Assim $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$.

Exemplo 2.1.2. Temos

- $\{n\} + \left\{\dfrac{1}{n+1}\right\} = \left\{n + \dfrac{1}{n+1}\right\} = \left\{\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\right\}$,
- $\{(-1)^n\}\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\} = \left\{\dfrac{n(-1)^n}{n+1}\right\}$,
- $2\{n^{-n}\} = \{2n^{-n}\}$,
- $\dfrac{\{2n\}}{\{n^n\}} = \left\{\dfrac{2}{n^{n-1}}\right\}$.

Definição 2.1.3. *Se $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função estritamente crescente e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma seqüência, então a função $f \circ h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma* **subseqüência** *de f.*

Exemplo 2.1.3.

- Sejam $h(n) = 2n$ e $\{x_n\}$ uma seqüência. Então $\{x_{2n}\}$ é uma subseqüência de $\{x_n\}$ chamada subseqüência dos pares.
- Seja $h(n) = 2n+1$ e $\{x_n\}$ uma seqüência. Então $\{x_{2n+1}\}$ é uma subseqüência de $\{x_n\}$ chamada subseqüência dos ímpares.
- Seja $h(n) = n + p$, $p \in \mathbb{N}$, e $\{x_n\}$ uma seqüência. Então $\{x_{n+p}\}$ é uma subseqüência de $\{x_n\}$.
- A subseqüência dos pares (ímpares) da seqüência $\{(-1)^n\}$ é a seqüência constante $\{1\}$ (resp. $\{-1\}$).

Primeira Aula $\uparrow$

2.2 Seqüências Limitadas e Ilimitadas

Note que a seqüência $\{(-1)^n\}$ é a lista infinita $\{1, -1, 1, -1, \cdots, \}$ mas a seqüência só assume os valores 1 ou -1. Se lembramos que esta é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ com $f(n) = (-1)^n$ então, vemos que a imagem de f ($\text{Im}(f) = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$) é o conjunto $\{-1, 1\}$.

Definição 2.2.1. *A imagem de uma seqüência é chamada conjunto dos valores da seqüência.*

Note que a seqüência $\{1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \cdots\}$ tem o mesmo conjunto de valores que a seqüência $\{(-1)^n\}$.

Exemplo 2.2.1. *Vamos considerar as expansão binária de um número real $s \in [0, 1]$. Considere a seqüência $\{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$ onde $s_1 = 0$ se $s \in [0, 1/2]$ e $s_1 = 1$ se $s \in (1/2, 1]$. Se $s_1 = 0$ então, $s_2 = 0$ se $s \in [0, 1/4)$ e $s_2 = 1$ se $s \in (1/4, 1/2]$. Se $s_1 = 1$ então, $s_2 = 0$ se $s \in (1/2, 3/4]$ e $s_2 = 1$ se $s \in (3/4, 1]$. Seguindo com este procedimento obtemos a seqüência $\{s_n\}$. Não é difícil ver que*

$$|s - \sum_{0}^{k} s_n 2^{-n}| \leq 2^{-n-1}.$$

Veremos que isto significa que podemos escrever

$$s = s_1 2^{-1} + s_2 2^{-2} + s_3 2^{-3} + \cdots .$$

Com isto em mente, podemos associar a cada número real em $[0, 1]$ uma seqüência $\{s_n\}$ com conjunto de valores em $\{0, 1\}$. Aqui vemos uma infinidade de seqüências numéricas distintas com mesmo conjunto de valores.

Definição 2.2.2. *Uma seqüência é dita* **limitada** *se o seu conjunto de valores for limitado. Caso contrário a seqüência é dita* **ilimitada**.

Então, dizer que uma seqüência numérica $\{x_n\}$ é limitada é dizer que existem números m e M tais que $m \leq x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.2.

- A seqüência $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ é limitada.
- A seqüência $\{(-1)^n\}$ é limitada.

- A seqüência $\left\{\cos\dfrac{1}{n}\right\}$ é limitada.

- A seqüência $\{n\}$ é ilimitada.

2.2.1 Seqüências Convergentes

Note que a seqüência

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

tem a propriedade de que quanto maior for a variável n, mais próximo o valor da seqüência em n, $\dfrac{n}{n+1}$, fica de 1. Neste caso, diremos que o limite da seqüência $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ é 1 e a seqüência é dita convergente com limite 1. É preciso dar uma definição mais precisa da noção de convergência de uma seqüência. Começamos com as seqüências infinitésimas.

Definição 2.2.3. *Dizemos que uma seqüência* $\{x_n\}$ *é* **infinitésima** *se dado* $\varepsilon > 0$ *existe um natural* $N = N(\epsilon)$ *tal que*

$$|\,x_n| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

Interpretação da Definição: Uma seqüência é infinitésima se a partir de um certo número natural N todos os x_n's estão no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e fora deste intervalo há apenas um número finito de x_n's. Entre os elementos $x_1, x_2, \cdots, x_N$ encontramos todos os elementos da seqüência que estão fora do intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Exemplo 2.2.3. *Mostrar que a seqüência* $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ *é infinitésima.*
De fato: Dado $\epsilon > 0$ *seja* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$*. Então,*

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Exemplo 2.2.4. *Mostrar que a única seqüência constante que é infinitésima é a seqüência nula* $\{0, 0, 0, \cdots\}$

Definição 2.2.4. *Uma seqüência* $\{x_n\}$ *é* **convergente** *com* **limite** ℓ *se a seqüência* $\{x_n - \ell\}$ *é infinitésima; ou seja, se dado* $\epsilon > 0$*, existe um número natural* $N = N(\epsilon)$*, tal que*

$$|\,x_n - \ell| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

Interpretação da Definição: Uma seqüência é convergente com limite ℓ se a partir de um certo número natural N todos os x_n's estão no intervalo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e fora deste intervalo há apenas um número finito de x_n's. Entre os elementos $x_1, x_2, \cdots, x_N$ encontramos todos os elementos da seqüência que estão fora do intervalo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Notação: Se $\{x_n\}$ é convergente com limite ℓ, escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$$

e lemos "*o limite de x_n quando n tende para infinito é ℓ*" ou

$$x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

e lemos *"x_n tende a ℓ quando n tende a infinito"*.

Exemplo 2.2.5. Mostre que a seqüência $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ é convergente com limite 1.

De fato: Dado $\epsilon > 0$ seja $N > \dfrac{1}{\epsilon}$, então

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Exemplo 2.2.6. Mostre que a seqüência $\left\{\cos\dfrac{1}{n}\right\}$ é convergente com limite 1. De fato: Dado $\varepsilon > 0$ seja $N > \dfrac{1}{\epsilon}$, então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, \frac{1}{n})$ tal que

$$\left|\cos\frac{1}{n} - 1\right| = \left|\cos\frac{1}{n} - \cos 0\right| = |\mathrm{sen}\theta|\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Exercício: Se $\{x_n\}$ for uma seqüência convergente com limite ℓ, mostre que a seqüência $\{\cos x_n\}$ será convergente com limite $\cos\ell$.

Segunda Aula ↑

Terceira Aula ↓

O próximo resultado diz que, se uma seqüência for convergente, então o limite será único.

Proposição 2.2.1. *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência convergente. Se*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell_1 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \ell_2,$$

então $\ell_1 = \ell_2$.

Prova: Suponha por absurdo que $l_1 \neq l_2$ e seja $\epsilon = \frac{|l_1-l_2|}{4}$. Então existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n - l_1| < \epsilon$ para todo $n \geq N_1$ e $|x_n - l_2| < \epsilon$ para todo $n \geq N_2$. Se $N = \max\{N-1, N_2\}$ temos que

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - x_n| + |x_n - l_2| < 2\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}, \ \forall n \geq N,$$

o que é um absurdo. Segue que $l_1 = l_2$. ■

Definição 2.2.5. *Uma seqüência é dita* **divergente** *se não for convergente.*

Proposição 2.2.2. *Se $\{x_n\}$ for uma seqüência convergente com limite ℓ, então toda subseqüência de $\{x_n\}$ será convergente com limite ℓ.*

Prova: Como $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é crescente, temos que $h(n) \geq n$. Do fato que $\{x_n\}$ é convergente com limite ℓ temos que, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \ell| < \epsilon$, para todo $n \geq N$. Segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_{h(n)} - \ell| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Isto mostra que $\lim_{n\to\infty} x_{h(n)} = \lim_{n\to\infty} x_n$ para toda $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente e o resultado segue. ■

A Proposição 2.2.2 é importante pois implica no seguinte critério negativo de convergência que é bastante utilizado.

Proposição 2.2.3. *Se uma seqüência possui duas subseqüências convergentes com limites distintos, então a seqüência é divergente.*

Exemplo 2.2.7. A seqüência $\{(-1)^n\}$ é divergente.

Proposição 2.2.4. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Prova: Se $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, seja $\epsilon = 1$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \ell| < 1$ para todo $n \geq N$. Seja $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |\ell| + 1\}$. Então $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Observação: Note que, toda seqüência convergente ser limitada mas **nem toda seqüência limitada é convergente** (por exemplo, $\{(-1)^n\}$ é limitada, mas não é convergente).

Proposição 2.2.5. *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência. Então $\{x_n\}$ é convergente com limite* 0 *se, e somente se,* $\{|x_n|\}$ *é convergente com limite* 0.

Prova: A seqüência $\{x_n\}$ é convergente com limite 0 se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_n| - 0| = |x_n - 0| < \epsilon, \quad \forall n \geq N,$$

se, e somente se, a seqüência $\{|x_n|\}$ é convergente com limite 0. ■

Proposição 2.2.6. *Seja $\{x_n\}$ uma seqüência convergente com limite ℓ. Então, a seqüência $\{|x_n|\}$ é convergente com limite $|\ell$. A volta não é válida, em geral.*

Prova: Se $\{x_n\}$ é convergente com limite ℓ temos que: dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_n| - |\ell|| \leq |x_n - \ell| < \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Segue que $\{|x_n|\}$ é convergente com limite $|\ell|$. Para verificar que a recíproca não é válida em geral, basta considerar a seqüência $\{(-1)^n\}$ que não é convergente e cujo módulo é convergente. ■

Terceira Aula ↑

Quarta Aula ↓

Exemplo 2.2.8. Considere a seqüência $\{r^n\}$. Temos

- $\{r^n\}$ é convergente com limite 0, se $|\, r| < 1$;
- $\{r^n\}$ é convergente com limite 1, se $r = 1$;
- $\{r^n\}$ é divergente, se $r = -1$ ou $|\, r| > 1$. Sugestão: Mostre que se $|\, r| > 1$, então $\{|\, r|^n\}$ é ilimitada.

Proposição 2.2.7. *Se $\{x_n\}$ é convergente com limite 0 e $\{y_n\}$ é limitada, então $\{x_n y_n\}$ é convergente com limite 0.*

Prova: Como $\{y_n\}$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $|y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{x_n\}$ é convergente com limite 0, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \frac{\epsilon}{M}$ para todo $n \geq N$. Segue que

$$|x_n y_n| < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Disto segue que $\{x_n y_n\}$ é convergente com limite 0. ■

Exemplo 2.2.9. A seqüência $\left\{\dfrac{1}{n}\cos n\right\}$ é convergente com limite 0.

Definição 2.2.6. *Uma seqüência $\{x_n\}$ é dita crescente (decrescente) se $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.2.7. *Uma seqüência $\{x_n\}$ é dita limitada superiormente (inferiormente) se existe $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) tal que $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso M (m) é dito um limitante superior (inferior) para o conjunto dos valoroes de $\{x_n\}$. Ao menor (maior) limitante superior (inferior) do conjunto dos valores de $\{x_n\}$ chamamos supremo de $\{x_n\}$ (ínfimo de $\{x_n\}$) e denotamos por $\sup\{x_n\}$ ($\inf\{x_n\}$).*

Propriedade: Se $L = \sup\{x_n\}$ ($\ell = \inf\{x_n\}$), dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \geq L - \epsilon$ ($x_{n_0} \leq \ell + \epsilon$).

Proposição 2.2.8. *Toda seqüência $\{x_n\}$ crescente (decrescente) e limitada é convergente com limite $\sup\{x_n\}$ (resp. $\inf\{x_n\}$).*

Prova: Se $\{x_n\}$ é crescente (decrescente) e limitada, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que $x_{n_0} \geq L - \epsilon$ ($x_{n_0} \leq \ell + \epsilon$). Como $\{x_n\}$ é crescente (decrescente) $L \geq x_n \geq L - \epsilon$ ($\ell \leq x_n \leq \ell + \epsilon$) para todo $n \geq n_0$ e o resultado está provado. ■

Exemplo 2.2.10. Mostre que a seqüência $\{x_n\}$ dada por $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $n \geq 2$, é convergente e encontre o seu limite.

Proposição 2.2.9 (Propriedades). *Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são seqüências convergentes com limites ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente e $c \in \mathbb{R}$, então*

(a) $\{cx_n + y_n\}$ é convergente com limite $c\ell_1 + \ell_2$

(b) $\{x_n y_n\}$ é convergente com limite $\ell_1 \ell_2$

(c) $\{x_n / y_n\}$ é convergente com limite ℓ_1/ℓ_2, sempre que $\ell_2 \neq 0$.

Quarta Aula $\uparrow$

Quinta Aula ↓

Proposição 2.2.10. *Se* $\{x_n\}$ *for uma seqüência convergente e* $x_n \leq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq 0$*.*

Prova. Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

Mas $x_n \leq 0$ por hipótese. Portanto

$$\ell - \varepsilon < x_n \leq 0, \quad \forall\, n \geq N,$$

ou seja, $\ell < \varepsilon$. Segue da arbitrariedade de ε que $\ell \leq 0$ e a prova está concluída.

Corolário 2.2.1 (Teste da comparação). *Se* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *são seqüências convergentes e* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Proposição 2.2.11 (Teorema do Confronto). *Sejam* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *duas seqüências convergentes com mesmo limite* ℓ*. Se* $\{z_n\}$ *é um seqüência tal que*

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall\, n \in N,$$

então $\{z_n\}$ *é convergente com limite* ℓ*.*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\ell - \varepsilon \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq \ell + \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

Então $|z_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$. Isto conclui a prova.

Vamos dividir as seqüências divergentes em três tipos. Aquelas que divergem para $+\infty$, aquelas que divergem para $-\infty$ e aquelas que são limitadas mas não são convergentes.

Definição 2.2.8.

- *Dizemos que uma seqüência* $\{x_n\}$ **diverge para** $+\infty$ *se, dado* $R > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > R$ *para todo* $n \geq N$*. Neste caso escrevemos* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$*.*
- *Dizemos que uma seqüência* $\{x_n\}$ **diverge para** $-\infty$ *se, dado* $R > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < -R$ *para todo* $n \geq N$*. Neste caso escrevemos* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*.*

- *Dizemos que uma seqüência* $\{x_n\}$ **oscila**, *se ela não for convergente e não divergir para* $+\infty$ *ou para* $-\infty$.

Exemplo 2.2.11.

- $\{2^n\}$ diverge para $+\infty$ ou seja $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$.
- $\{-n\}$ diverge para $-\infty$ ou seja $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$
- $\{1 + \operatorname{sen} n\}$ e $\{(-2)^n\}$ oscilam.

Referências Bibliográficas

[1] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado, *A matemática do Ensino Médio*, Coleção do Professor de Matemática, SBM.