$8^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Determine $P = (x, y)$ como no teorema do valor médio, sendo dados:
   a) $f(x, y) = 2x^2 + 3y,\ P_0 = (1, 1)$ e $P_1 = (2, 3)$.
   b) $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + xy,\ P_0 = (1, 2)$ e $P_1 = (4, 3)$.
   c) $f(x, y) = x^3 + xy^2,\ P_0 = (1, 1)$ e $P_1 = (2, 2)$.

2. Seja $f(x, y)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $\|\nabla f(x, y)\| \leq M$, para todo (x, y). Prove que
$$|f(x - y) - f(s, t)| \leq M\|(x, y) - (s, t)\|$$
quaisquer que sejam (x, y) e (s, t) em $\mathbb{R}^2$.

3. Seja $f(x, y) = \ln(x + y)$. Prove que
$$|f(x - y) - f(s, t)| \leq M\|(x, y) - (s, t)\|$$
quaisquer que sejam (x, y) e (s, t), com $x > 1,\ y > 1,\ s > 1$ e $t > 1$.

4. Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que:
   a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 10x,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 1$
   b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy + 3x^2 - y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy - x + 3y^2$
   c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + \dfrac{1}{1+y^2}$

5. Determine a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto $(1, 2, 1)$ e tal que
$$\nabla f(x, y) = (2xy^3 - 2x, 3x^2y^2 + 2y - 1).$$

6. Determine a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto $(0, 0, 2)$ e tal que
$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2} + ye^{y^2}\right).$$

7. Existe função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
$$\nabla f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 + 1)$$
para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$? Justifique.

8. Determine $z = \varphi_1(x, y),\ y > 0$, tal que $\varphi_1(1, 1) = \dfrac{\pi}{4}$ e, para todo $y > 0$,
$$\nabla\varphi_1(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

9. Determine $z = \varphi_2(x, y),\ y > 0$, tal que $\varphi_2(-1, 1) = \dfrac{3\pi}{4}$ e, para todo $x < 0$,
$$\nabla\varphi(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

10. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Determine $z = \varphi(x, y),\ (x, y) \in A$, tal que $\varphi(-1, 1) = \dfrac{3\pi}{4}$ e, para todo $(x, y) \in A$,
$$\nabla\varphi_1(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

11. Um campo de forças $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$, onde P e Q são funções definidas num aberto A do $\mathbb{R}^2$, denomina-se *conservativo* se existe um campo escalar $\varphi : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\varphi(x,y) = \overrightarrow{F}(x,y) \text{ em } A.$$

Uma tal função φ, quando existe, denomina-se função podencial associada ao campo $\overrightarrow{F}$. O campo de forças dado é conservativo? Justifique.

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}$

c) $\overrightarrow{F}(x,y) = y\overrightarrow{i} + (x+2y)\overrightarrow{j}$

d) $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

e) $\overrightarrow{F}(x,y) = 4\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$

f) $\overrightarrow{F}(x,y) = ex^2 + y^2(2x\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j})$

12. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ um campo de forças com P e Q contínuas no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a,b]$, uma curva de C^1, com $\gamma(a) = \gamma(b)$ (γ é uma curva fechada). Suponha que, para todo $t \in [a,b],\ \gamma(t) \in A$. Prove que se $\overrightarrow{F}$ for conservativo então

$$\int_a^b \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = 0.$$

Uma tal função φ, quando existe, denomina-se função podencial associada ao campo $\overrightarrow{F}$. O campo de forças dado é conservativo? Justifique.

13. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{-y}{(x^2+y^2)}\overrightarrow{i} + \dfrac{x}{(x^2+y^2)}\overrightarrow{j}, (x,y) \neq (0,0).$

a) Verifique que, para todo $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

onde $P(x,y) = \dfrac{-y}{(x^2+y^2)}$ e $Q(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)}$.

b) Calcule $\int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$, onde $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$.

c) $\overrightarrow{F}$ é conservativo? Por quê?

14. Seja $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ um campo de forças com P e Q definidas e contínuas no aberto A de $\mathbb{R}^2$. Se $\overrightarrow{F}$ for conservativo então existirá uma função escalar $U(x,y)$ definida em A tal que $\overrightarrow{F} = -\nabla U$ em A. Uma tal função denomina-se função energia podencial associada ao campo $\overrightarrow{F}$. Determine, caso exista, a função energia podencial associada ao campo $\overrightarrow{F}$ dado e satisfazendo a condição dada.

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = -6x\overrightarrow{i} - 2y\overrightarrow{j}$ e $U(0,0) = 0$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ e $U(0,0) = 0$.

c) $\overrightarrow{F}(x,y) = x\overrightarrow{i} - xy\overrightarrow{j}$ e $U(0,0) = 1.000$.

15. Determine o polinômio de Taylor de ordem um da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

a) $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$.

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1,1)$.

c) $f(x,y) = \mathrm{sen}(3x+4y)$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$.

16. Sejam $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(0,0)$.

a) Mostre que para todo (x,y), com $x + 5y < 1$,

$$|e^{x+5y} - P_1(x,y)| < \frac{3}{5}(x+5y)^2$$

b) Avalie o erro que se comete na aproximação

$$e^{x+5y} \cong P_1(x, y)$$

para $x = 0,01$ e $y = 0,01$.

17. Sejam $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1, 1)$. Mostre que para todo (x, y), com $|x - 1| < 1$ e $|y - 1| < 1$,

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 7(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2$$

18. Sejam $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1, 1)$. a) Utilizando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(x, y)$, sendo $x = 1,01$ e $y = 0,99$.

    b) Avalie o erro que se comete na aproximação do item a).

19. Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de $f(x, y)$ e suponha que f seja de classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0, y_0). Prove que para todo (x, y) em B, existe $(\overline{x}, \overline{y})$ interno ao segmento de extremidade (x_0, y_0) e (x, y) tal que

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\overline{x}, \overline{y})(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y})(x - x_0)(y - y_0) + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\overline{x}, \overline{y})(y - y_0)^2\right].$$

20. Seja $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$ (a, b, c, d, e, m, constantes) e seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f. Prove que, para todo (h, k),

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2.$$

21. Sejam $f(x, y)$ e (x_0, y_0) como no exercício anterior. Prove que se $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então

$$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$$

    para todo $(h, k) \neq (0, 0)$. Como é o gráfico de f?

22. Suponha $f(x, y)$ de classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0, y_0) e que as derivadas parciais de 2ª ordem sejam limitadas em B. Prove que existe $M > 0$ tal que para todo $(x, y) \in B$,

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| \leq M\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$$

    onde $P_1(x, y)$ é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de (x_0, y_0).

23. Considere o polinômio $P(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$, com a, b, c, x_0 e y_0 constantes. Suponha que exista $M > 0$ tal que para todo (x, y),

$$|P(x, y)| \leq M\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$$

    Prove que $P(x, y)$ em $\mathbb{R}^2$.

24. Seja $f(x, y)$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e seja (x_0, y_0) um ponto de A. Seja o polinômio $P(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$, com a, b, c, x_0 e y_0 constantes. Suponha que exista $M > 0$ e uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), com $B \subset A$, tal que para todo (x, y) em B,

$$|f(x, y) - P(x, y)| \leq M\|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$$

    Prove que P é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de (x_0, y_0).