$7^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

1. Sejam $z = x^2y,\ x = e^{t^2}$ e $y = 2t + 1$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

2. Seja $F(t) = f(e^{t^2}, sent)$, onde $f(x, y)$ é uma função dada, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
   a) Calcule $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.
   b) Calcule $F'(0)$ supondo $\dfrac{df}{dy}(1, 0) = 5$.

3. Seja $z = f(x^2, 3x + 1)$, onde $f(u, v)$ é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.
   a) Expresse $\dfrac{dz}{dx}$ em termos das derivadas parciais de f.
   b) Verifique que $\dfrac{dz}{dx}|_{x=1} = 2\dfrac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 4)$.

4. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.
   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.
   b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \dfrac{1}{3}$.

5. Suponha que, para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

6. Admita que, para todo (x, y), $4y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2$. Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2cost, sent)$.

7. Admite que, para todo (x, y), $4y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Prove que f é constante sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

8. Seja $z = f(u + 2v, u^2 - v)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

9. Prove que a função $u = f(x + at, y + bt)$, a e b constantes, é solução da equação as derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

10. Seja g dada por $g(t) = f(x, y)sen3t$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$. Verifique que $g'(t) = 3f(x, y)cos3t + sen3t[2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)]$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$.

11. Seja $F(x, y, z) = f(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x})$. Mostre que $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} + z\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$.

12. Seja $F(u, v)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v) \neq 0$,para todo (u, v). Suponha que, para todo (x, y), $F(xy, z) = 0$, onde $z = z(x, y)$. Mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

13. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Em caso afirmativo, expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

14. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

a) $x^2y + seny = x$

b) $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$

15. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x, y)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x e y e z.

a) $e^{x+y+z} + xyz = 1$

b) $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$

16. Suponha que $y = y(x)$ seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde $F(u, v)$ é suposta diferenciável. Expresse $\dfrac{dx}{dy}$ em termos de x e y e das derivadas parciais de F.

17. Sejam $y = y(x)$ e $z = z(x)$, $z > 0$, diferenciáveis e dadas implicitamente pelo sistema $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x + y = 1$.

a) Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$ em termo de x, y e z.

b) Expresse y e z em função de x.

c) Desenhe a imagem da curva $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$.

18. Sejam $u = x + y$ e $v = \dfrac{y}{x}$. Calcule o determinante do jacobiano $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

19. Seja $g(u, v) = f(x, y)$, onde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ são dadas implicitamente pelo sistema $u = x^2 + y^2$ e $v = xy$. Suponha que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

a) Mostre que $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial x}{\partial u}$.

b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}$.

c) Mostre que f é constante sobre as hipérboles $xy = c$.

20. É dada a curva γ que passa pelo ponto $\gamma(t_o) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_o) \neq \overrightarrow{0}$.

a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 3)$.

b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

21. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_o) = (2, 5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_o) \neq \overrightarrow{0}$ e que sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto?

22. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado:

a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$.

b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\dfrac{1}{2}, 1)$.

23. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

24. Determine uma reta que seja tangente à elipse $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

25. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável definida implicitamente pela equação $y^3 + xy + x^3 = 3x$. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

26. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.

a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$

b) $2xyz = 3$ em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$

c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$

27. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}$, sendo dados:

a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2, (x_o, y_o) = (1, 2)$ e $\overrightarrow{u}$ o versor de $2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

b) $f(x, y) = e^{x^2-y^2}, (x_o, y_o) = (1, 1)$ e $\overrightarrow{u}$ o versor de $(3, 4)$.

c) $f(x, y) = arctg(\frac{x}{y}), (x_o, y_o) = (3, 3)$ e $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

d) $f(x, y) = xy, (x_o, y_o) = (1, 1)$ e $\overrightarrow{u}$ o versor de $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

28. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$

b) $f(x, y) = ln\|(x, y)\|$ em $(1, -1)$

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $(1, \frac{1}{2})$

29. Seja $f(x, y) = xarctg(\frac{x}{y})$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(1, 1)$, onde $\overrightarrow{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f, no ponto $(1, 1)$.

30. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

31. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em ^oC.) Um indívidua encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio:

a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre na mesma temperatura no ponto $(3, 2)$.

b)Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

c) De quanto tempo a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01km$ na direção encontrada no item b).

d) De quanto decrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe $0,01km$ na direção $\overrightarrow{j}$?

32. Calcule todas as derivadas parciais de 2^a ordem.

a) $f(x, y) = x^3y^2$

b) $z = e^{x^2-y^2}$

c) $z = ln(1 + x^2 + y^2)$

d) $g(x, y) = 4x^3y^4 + y^3$

33. Expresse $g'(t)$ em termos de derivadas parciais de f, sendo g dada por:

a) $g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), x = t^2$ e $y = sent$.

b) $g(t) = t^3 \frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)$.

c) $g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 5\frac{\partial f}{\partial y}(sen3t, t)$.

34. Expresse $g''(t)$ em termos de derivadas parciais de f, sendo $g(t) = f(5t, 4t)$.

35. Considere a função $g(t) = f(a + ht, b + kt)$, com a, b, h e k constantes. Supondo $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$. Verifique que $g''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

36. Considere a função $z = \frac{\partial f}{\partial x}(x, sen3x)$. Verifique que $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, sen3x) + 3cos3x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, sen3x)$.

37. Seja $g(u, v) = f(2u + v, u - 2v)$, onde $f(x, y)$ é suposta de classe C^2. Verifique que $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 5\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

38. Suponha que $z = z(x, y)$ satisfaça a equação $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} = x^3y^2$. Fazendo a mudança de variáveis $x = e^u$ e $y = e^v$, calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} - 2\frac{\partial z}{\partial u}$.