**$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II**

1. Calcule, caso exista:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

   f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

   g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$

   h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

2. Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$.

   a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, com $a^2+b^2>0$. Mostre que, quaisquer que sejam $a$ e $b$,

   $$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

   Tente vizualizar este resultado através das curvas de nível de f.

   b) Calcule $\lim_{t\to 0} f(\delta(t)) = 0$, onde $\delta(t) = (t^2, t)$. (Antes de calcular o limite, tente prever o resultado olhando para as curvas de nível de f.)

   c) O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ existe? Por quê?

3. Sejam $\delta_1$ e $\delta_2$ curvas em $\mathbb{R}^2$, contínuas em $t_0$, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ e, para $t \neq t_0, \gamma(t_0) \neq (x_0, y_0)$, com $\gamma(t_0) \in D_f$. A afirmação:

   $$\lim_{t\to t_0} f(\delta_1(t)) = \lim_{t\to t_0} f(\delta_2(t)) = L \implies \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

   é verdadeira ou falsa? Justifique.

4. Calcule $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - 2xh - k}{\|(h,k)\|}$, onde $f(x,y) = x^2 + y$.

5. Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|}$, onde $f$ é dada por $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.

6. Suponha que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ e $\lim_{u\to a} g(u) = L$, com $g$ não definida em $a$ e $Imf \subset D_g$. Prove que

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

   Prove, ainda, que o resultado acima continua válido se supusermos $g$ definida em $a$, com $g$ contínua em $a$.

7. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)}, \ x^2+y^2<1 \\ f(x,y)=0, \ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2-1}$.

9. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

   a) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

   b) $f(x,y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$

   c) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

   d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1-x^2-y^2}$

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f)$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   g) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2-1}\right)}, & r < 1 \\ f(x,y) = 1, & r \geq 1 \end{cases}$ , onde $r = \|(x,y)\|$.

10. A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

11. Prove que se $f$ for contínua em $(x_0, y_0)$ e se $f(x_0, y_0) > 0$, então existirá $r > 0$ tal que $f(x,y) > 0$ para $\|(x,y) - (x_0, y_0)\| < r$.

12. Seja $A$ um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que goza da propriedade: quaisquer que sejam $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ em $A$, existe uma curva contínua $\gamma : [a,b] \to A$ tal que $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x_1, y_1)$. Prove que se $f$ for contínua em $A$ e se $f(x_0, y_0) < m < f(x_1, y_1)$, então existirá $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ tal que $f(\overline{x}, \overline{y}) = m$.

    Sugestão: aplique o Teorema do Valor Intermediário à função contínua $g(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a,b]$.

13. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A$ aberto, uma função contínua e seja $c$ um número real dado. Prove que o conjunto $\{(x,y) \in A : f(x,y) < c\}$ é aberto.

14. Dizemos que a seqüência de pontos $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 0}$ converge para $(\overline{x}, \overline{y})$ se, dado $\epsilon > 0$, existe um natural $n_0$ tal que

$$n > n_0 \implies \|(x_n, y_n) - (\overline{x}, \overline{y})\| < \epsilon.$$

    Suponha que $f(x,y)$ seja contínua em $(\overline{x}, \overline{y})$, que $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ convirja para $(\overline{x}, \overline{y})$ e que $(x_n, y_n) \in D_f$ para todo $n \geq 0$. Prove que a seqüência dada por $a_n = f(x_n, y_n)$ converge para $f(\overline{x}, \overline{y})$.