1ª Lista EXTRA de Exercícios de SMA-332 - Cálculo II

1. Esboce o traço da curva C determinada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, sendo:

(a) $\mathbf{r}(t) = 3\,t\,\mathbf{i} + (1-9\,t^2)\,\mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ (b) $\mathbf{r}(t) = (1-t^2)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R}$
(c) $\mathbf{r}(t) = (2+\cos t)\mathbf{i} - (3-\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j},\ t \in [0, 2\,\pi]$ $\qquad$ (d) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 3\cos t\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0$
(e) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j} + 9\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0$ $\qquad$ (f) $\mathbf{r}(t) = \operatorname{tg} t\,\mathbf{i} + \sec t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}, \quad |t| \leq \pi/2$

2. Calcule o comprimento das curvas dadas por:

(a) $y = \frac{1}{3}\,(x^2+2)^{3/2}$ de $x=0$ a $x=3$. $\qquad$ (b) $y = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}),\ x \in [-1, 0]$
(c) $y = x^{3/2}$ de $(0,0)$ a $(4,8)$. $\qquad$ (d) $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$
(e) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, e^{-t}), \quad t \in [0, 2\pi]$ $\qquad$ (f) $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, e^t), \quad t \in [0, 1]$

(g) $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t\operatorname{sen} t \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z = 1 - t^2 \end{cases}$ $\qquad$ (h) $C : \begin{cases} x = t \\ y = 4\,t^2 \quad 0 \leq t \leq 2 \\ z = 3\,t^2 \end{cases}$

3. Considere a curva C parametrizada por $x = a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} t,\ y = b\cos\alpha\operatorname{sen} t,\ z = c\cos t$, em que a, b, c, α são constantes fixadas.
(a) Mostre que C está contida no elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
(b) Mostre que C também está contida em um plano que contém o eixo z.
(c) Faça um esboço da curva C

4. Considere a curva C parametrizada por $x = a\,e^{\omega\,t}\cos t,\ y = a\,e^{\omega\,t}\operatorname{sen} t,\ z = b\,e^{\omega\,t}$, em que a, b, ω são constantes fixadas.
(a) Mostre que C está contida no cone $a^2\,z^2 = b^2\,(x^2+y^2)$.
(b) Faça um esboço da curva C para $a = b = 4$ e $\omega = -1$.
(c) Calcule o comprimento de C correspondente ao intervalo $0 \leq t \leq 2\,\pi$.

5. A posição de uma partícula é descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos 2t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j}$.
(a) Mostre que a trajetória está sobre a parábola $4y^2 - 9x = 18$.
(b) Desenhe a trajetória.
(c) Qual é o vetor aceleração nos instantes de velocidade zero?
(d) Desenhe estes vetores.

6. Ache a força que atua sobre uma partícula de massa m que se desloca segundo a lei $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$.

7. Um objeto de massa m desloca-se segundo a lei $\mathbf{r}(t) = a\cos(wt)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\,(wt)\,\mathbf{j}$. Ache a força que atua sobre este objeto. Faça uma ilustração da situação trajetória-força.

8. Dispara-se um projétil com velocidade inicial de 500 m/s e ângulo de inclinação de 30^o. Determine:
(a) A velocidade no instante t.
(b) A altura máxima atingida.
(c) O alcance.
(d) A velocidade com que o projétil atinge o solo.

9. Considere a função vetorial $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + (4t^2 - t^4)\,\mathbf{j}$:
(a) Esboce a curva determinada pelas componentes de $\mathbf{r}(t)$.
(b) Calcule $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.
(c) Esboce os vetores correspondentes a $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.

10. Uma curva tem a propriedade: o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ é sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$. Mostre que a curva está sobre uma superfície esférica com centro na origem.

11. Lança-se horizontalmente um projétil com velocidade de 600m/s de uma altura de 500m acima do nível do solo. Quando e onde o projétil atingirá o solo? (considere $g \simeq 10m/s^2$).

12. Um jogador de futebol lança uma bola a uma distância de 30 metros. Sabendo que a bola é liberada com um ângulo de $\pi/4$ com a horizontal, encontre sua velocidade inicial.

13. Encontre equações paramétricas da reta tangente a C em P, nos seguintes casos:

(a) $C : \begin{cases} x = 2\,t^2 - 1 \\ y = -5\,t^2 + 3, \quad P = (1, -2, 10) \\ z = 8\,t + 2 \end{cases}$ $\qquad$ (b) $C : \begin{cases} x = e^t \\ y = t\,e^t, \quad P = (1, 0, 4) \\ z = t^2 + 4 \end{cases}$

(c) $C :\ \mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\cos t\,\mathbf{k},\ P = (1, 0, 0)$ $\qquad$ (d) $C :\ \mathbf{r}(t) = 3\,t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + 6\,t\,\mathbf{k},\ P = (3, 1, 6)$

14. Uma *hélice* é uma curva cuja tangente faz um ângulo constante com um vetor unitário $\mathbf{u}$. Mostre que a curva $C : x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3,\ t \in \mathbb{R}$, é uma hélice, determinando um vetor apropriado $\mathbf{u}$.

15. Calcule a curvatura de cada uma das curvas abaixo. Em que ponto ela é máxima? (a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \ln \sec x$ (c) $y = x + 1/x$, (d) $x = e^t \cos t,\ \ y = e^t \operatorname{sen} t$, (e) $x = t^2,\ y = \ln t$.

16. Determine o (maior conjunto que pode ser) domínio de f, sendo:
(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x - 2y}$; (b) $f(u,v) = \sqrt{1-u} - e^{u/v}$.

17. (a) Encontre as curvas de nível da função $f(x,y) = x^2 + 2xy$ (analise separadamente os casos $c = 0$ e $c \neq 0$).
(b) Encontre a intersecção do gráfico de f com o plano $y = mx$.
(c) Faça o gráfico de f.

18. Esboce as curvas (ou superfícies) de nível das funções abaixo nos níveis indicados:

(a) $f(x,y) = x - y;\ c = 0,1,2$

(b) $f(x,y) = \dfrac{e^x}{2y}$; $c = -1/2, 0, 1/2.$

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2/4};\ c = 0,1,2.$

(d) $f(x,y) = \sqrt{x+y};\ c = 0,1,2$

(e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}};\ c = 0,1,2$

(f) $f(x,y,z) = x - y;\ c = 0,1,2$

(g) $f(x,y,z) = 2x - y + 3z + 1; c = 0,1,2$

(h) $f(x,y) = xy; c = 0,1,2.$

19. Determinar o valor dos seguintes limites (em todos os casos $P = (x,y) \to P_0 = (0,0)$), caso existam.

(a) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$ (b) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{xy}$ (f) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} x^2 \operatorname{sen}\frac{y}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{(1+y^2)\operatorname{sen} x}{x}$ (h) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{1+x-y}{x^2+y^2}$ (i) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$

(j) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x^2\,y}{x^4+y^2}$ (k) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x^2\,y}{x^2+y^2}$ (l) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(m) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} (x^3+2x^2y-y^2+2)$ (n) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$ (o) $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{\sqrt{x\,y}}{x+y}$

20. Achar o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de modo que f seja contínua, sendo:

(a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}$ (c) $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ (e) $f(x,y) = \frac{y}{x^2-y^2-4}$ (f) $f(x,y) = \frac{x\,y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

21. Determine a região de continuidade de f. Faça um desenho da mesma:
a) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2-4}}$ b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$
c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) - \ln(9-x^2-y^2)$ d) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{xyz}}{x+y+z}$
e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

22. Verifique se a função dada por $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ tem limite em (0,0).

23. Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das funções abaixo:
(a) $f(x,y) = 4y^3 + \sqrt{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ (c) $f(x,y) = 4xyz - \ln(2xyz)$
(d) $f(r,\theta) = r\operatorname{tg}\theta - r^2\operatorname{sen}\theta$ (e) $f(x,y,z) = e^{xy^2} + \ln(y+z)$ (f) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \ln(\operatorname{sen} t)dt.$

24. Encontre a declividade da reta tangente à curva de interseção da superfície $36x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 36 = 0$ com o plano $x = 1$ no ponto $(1,2,3)$.

25. Dê a inclinação da reta tangente à interseção da superfície $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ com o plano $x = 1$ no ponto $(1, \sqrt{12}, 3)$. Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.

26. Ache a inclinação da reta tangente à curva interseção da superfície $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 1$, no ponto (2,1,5). Faça um esboço.

27. A temperatura em qualquer ponto de uma placa plana é dada por $T(x, y) = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Ache a taxa de variação da temperatura, ao longo da placa, nas direções dos eixos positivos x e y, respectivamente, no ponto $(3, 1)$.

28. Encontrar a derivada direcional de $\ln(x^2 + y^2 + z^2)$ no ponto $(1, 2, -1)$:
a) no sentido deste ponto para a origem;
b) no sentido em que ela seja máxima.

29. Quais os pontos do hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$?

30. Determinar a equação do plano tangente ao elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36$ no ponto (1,2,3).

31. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal à superfície dada no ponto indicado:
(a) $z = (x^2 + y^2)^2$, $P = (1, 2, 25)$
(b) $z = 4xy$, $P = (4, 1/4, 4)$
(c) $z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 3(x + y)$, $P = (0, 0, 0)$
(d) $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$, $P = (4, 4, \pi/4)$

32. Calcule a derivada direcional de f no ponto P na direção indicada:
(a) $f(x, y) = x^2 - 5\,x\,y + 3\,y^2$, $P = (3, -1)$, $\theta = \pi/4$
(b) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$, $P = (4, -4)$, $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$
(c) $f(x, y) = x^2 + 3\,y\,z + 4\,x\,y$, $P = (1, 0, -5)$, $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

33. Calcule a derivada direcional de f no ponto P na direção de P a Q. Calcule também a direção segundo a qual f cresce mais rapidamente, bem como essa taxa de crescimento:
(a) $f(x, y) = x^2\, e^{-2\,y}$, $P = (2, 0)$, $Q = (-3, 1)$
(b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(2\,x - y)$, $P = (-\pi/2, \pi/6)$, $Q = (0, 0)$
(c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P = (-2, 3, 1)$, $Q = (0, -5, 4)$

34. Uma chapa metálica aquecida está situada em um plano $x\,y$ de tal modo que a temperatura $T(x, y)$ em um ponto $P = (x, y)$ é inversamente propocional à distância de P à origem. Sabendo que a temperatura em $P_0 = (3, 4)$ é $100°\,C$, determine a taxa de variação de T em P_0 na direção do vetor $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. A partir de P_0, em que direção T cresce mais rapidamente? Em que direção a taxa de variação é nula?

35. Uma função $f(x, y)$ é dita *harmônica* se $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Mostre que as seguintes funções são harmônicas:
(a) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (b) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$
(c) $f(x, y) = a \cos x \operatorname{senh} y + b \operatorname{sen} x \cosh y$ (d) $f(x, y) = a\, e^{-x} \cos y + b\, e^{-y} \cos x$

36. Mostre que as funções $z(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-x^2/4kt}$ (em que k é uma constante) e $z(x, t) = e^{-k^2\,t} \operatorname{sen}(k\,x)$ satisfazem a chamada *equação de difusão* ou *equação do calor* $z_t = k\, z_{xx}$.

37. Suponha que as funções $f\,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenham derivadas de segunda ordem contínuas. Mostre que a função $u(x, t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$ (em que c é uma constante) satisfaz a chamada *equação de onda* $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$.

38. Mostre que a função $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ satisfaz a equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

39. Sendo $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$;
b) Calcular $f_x(x, y)$ e$f_y(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$;
c) Calcular $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$;
d) Mostre que f_x e f_y são contínuas em $\mathbb{R}^2$;
e) Calcule f_{xy} e f_{yx} para $(x, y) \neq (0, 0)$;
f) Verifique que $f_{yx}(0, 0) \neq f_{xy}(0, 0)$. Há alguma contradição disto com a teoria? Justifique.

40. Em cada um dos casos abaixo, verifique se a função dada é diferenciável na origem:
(a) $g(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ (b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

41. Seja $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. Seja $z = z(v)$ diferenciável e $v = y/x$, portanto $z = f(x, y)$. Mostre que $\nabla z \cdot \mathbf{r} = 0$.

42. Justifique que f é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, sendo:
(a) $f(x,y) = 5\,x\,y^2 - 3\,x^2\,y$ (b) $f(x,y) = 2\,x^2 + 3\,y^2$ (c) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + 3\,y^4)$
(d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

43. Medem-se os catetos de um triângulo retângulo, obtendo-se 3 cm e 4 cm, com possíveis erros de 0,02 cm. Usando diferenciais, obtenha uma aproximação do erro cometido, quando se calcula:
(a) a hipotenusa (b) a área do triângulo.

44. Uma lata cilíndrica tem dimensões de 3cm de diâmetro, 4cm de altura e 0,1 cm de espessura. Usando diferenciais, calcule aproximadamente a quantidade de material utilizada para fabricar a lata.

45. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$, sendo: (a) $z = x^3 - y^3,\ x = 1/(1+t),\ y = t/(t+1)$,
(b) $z = \ln(r+s),\ r = e^{-2\,t},\ s = t^3 - t^2$ (c) $z = u^2 - v\,\text{tg}\ w,\ u = \text{sen}^{\,2} t,\ v = \cos\ t,\ w = 4\,t$.

46. Calcule w_r e w_s, sendo: (a) $w = x^2 \text{sen}\ y^3,\ x = r^3 - 2\,s^3,\ y = r\,s^2$,
(b) $w = \sqrt{u^2+v^2},\ u = r\,e^{-s},\ v = s^2\,e^{-r}$ (c) $w = e^{x/y},\ x = r^2 - s^2,\ y = r^3 + s^3$.