Cálculo - Introdução

Alexandre N. Carvalho

March 1, 2013

Chapter 1

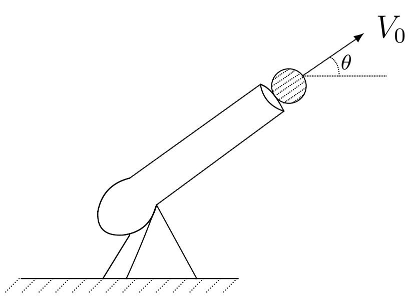
Introdução

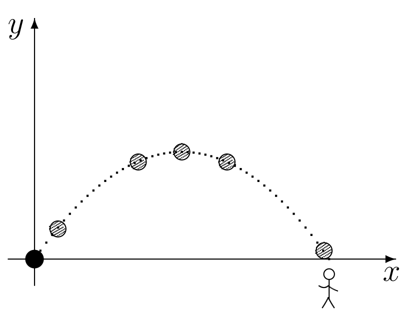
1.1 Porque Estudar Cálculo

No que segue apresentamos alguns exemplos que pretendem demosntrar que a matemática desenvolvida até o final do ensino médio é insuficiente para atacar alguns problemas importantes com os quais nos deparamos.

Começamos recordando um problema elementar de física do ensino médio.

Exemplo 1.1.1 (Lançamento Oblíquo de um Projétil)**.** *Imagine que, em uma batalha, saibamos que os projéteis lançados pelos nossos canhões tenham velocidade V_0 ao sair do canhão e que o inimigo situa-se a uma distância d de nossos canhões. Qual é ângulo de disparo para que o alvo seja atingido? Qual é o alcance máximo de nossos canhões? Qual é a altura máxima que o projétil alcançará?*



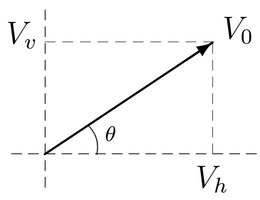


Solução: Em primeiro lugar, para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Para encontrar este modelo fazemos algumas suposições:

Suponhamos que

- a resistência do ar é desprezível,
- a aceleração da gravidade é constante,
- o ângulo de lançamento é $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,
- a altura do canhão relativamente ao solo é desprezível e que
- a altitude seja constante no campo de batalha.

Seja m a massa do projétil. A velocidade inicial V_0 do projétil pode ser decomposta em velocidade vertical e velocidade horizontal iniciais, isto é



$$V_v^0 = V_0 \text{sen}\theta,$$
$$V_h^0 = V_0 \cos\theta.$$

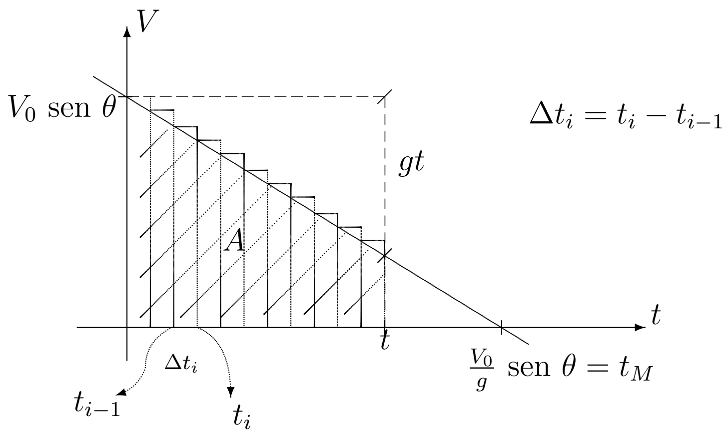
Se g denota a aceleração da gravidade a velocidade vertical depende do tempo através da relação

$$\boxed{V_v(t) = V_0 \text{sen}\theta - gt} \tag{1.1.1}$$

enquanto que a velocidade horizontal é constante ao longo do tempo. O projétil atingirá a altura máxima no instante t_M tal que $V_v(T_M) = 0$, ou seja

$$\boxed{t_M = \frac{V_0}{g} \text{sen}\theta.} \tag{1.1.2}$$

Como obter a altura do projétil como função do tempo? Note que o gráfico da velocidade vertical como função do tempo é



Se $t > 0$ e $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ é uma subdivisão do intervalo $[0, t]$ e $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Como em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ a velocidade é aproximadamente igual a $V_v(t_{i-1})$ temos que neste intervalo o deslocamento vertical é aproximadamente igual a

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) \sim V_v(t_{i-1})\Delta t_i$$

e o deslocamento vertical correspondente ao intervalo de tempo $[0, t]$ é aproximadamente igual a

$$y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \sim \sum_{i=1}^{n} V_v(t_{i-1})\Delta t_i \sim A$$

onde por $\sim$ queremos espressar o fato que a medida que o comprimento dos intervalos $[t_i, t_{i-1}]$ se aproxima de zero y se aproxima mais e mais da área A sob o gráfico da velocidade no intervalo $[0, t]$. Como

$$A = V_0 \text{sen}\theta t - \frac{1}{2} g t^2,$$

segue que

$$\boxed{y(t) = V_0 \text{sen}\theta t - \tfrac{1}{2} g t^2} \tag{1.1.3}$$

é o deslocamente vertical do projétil (altura do projétil depois de decorridos t unidades de tempo).

O deslocamenteo horizontal ocorre com velocidade constante $V_h = V_0 \cos\theta$. Logo

$$\boxed{x(t) = V_0 \cos\theta \ t} \tag{1.1.4}$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical estamos preparados para resolver o problema proposto:

- O projétil alcançará altura máxima em $t = t_M = \frac{V_0}{g} \text{sen}\theta$. Logo

$$\begin{aligned} y_M = y(t_M) &= V_0 \,\text{sen}\theta\, t_M - \tfrac{1}{2} g\, (t_M)^2 \\ &= V_0 \,\text{sen}\theta\, \tfrac{V_0}{g} \,\text{sen}\theta - \tfrac{1}{2}\, g \tfrac{V_0^2}{g^2} \,\text{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2} \tfrac{V_0^2}{g} \,\text{sen}^2\theta \end{aligned}$$

e

$$\boxed{y_M = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\,\mathrm{sen}^2\theta.} \tag{1.1.5}$$

- O projétil atinge o seu alvo quando $y(t_a) = 0$. Logo $t_a = 2\frac{V_0}{g}\mathrm{sen}\theta$ o que implica

$$x_a = x(t_a) = 2\frac{V_0^2}{g}\mathrm{sen}\theta\cos\theta$$

e

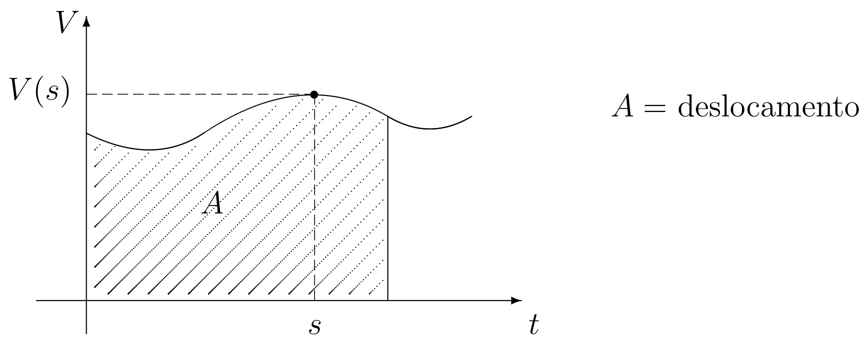
$$\boxed{x_a = \frac{V_0^2}{g}\mathrm{sen}2\theta.} \tag{1.1.6}$$

- O alcance do projétil é máximo quando $\theta = \pi/4$.

O que voce observa sobre a matemática contida neste exemplo?

1. O procedimento para obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente mas requer uma melhor justificativa. O processo de fazer Δt_i pequeno (tender a zero) exige uma melhor formulação que é dada pela noção de limite.

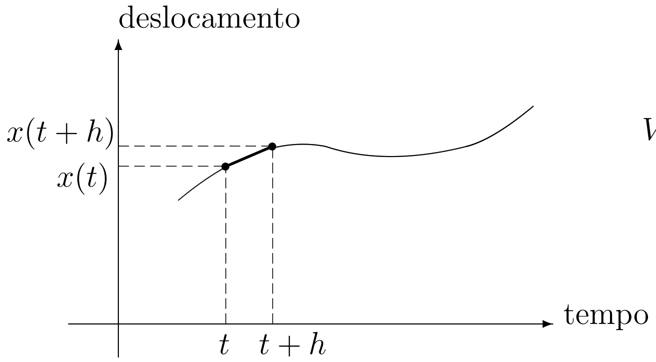
2. Se a velocidade depende do tempo de uma forma mais complicada podemos não ser capazes de encontrar a área sob o gráfico A de forma tão simples. Por exemplo, o projétil pode ser impulsionado durante o precurso (como ocorre no lançamento de foguetes). Deparamos então com o problema de calcular a área sob o gráfico de uma função



cuja resposta requer a introdução do conceito de integral.

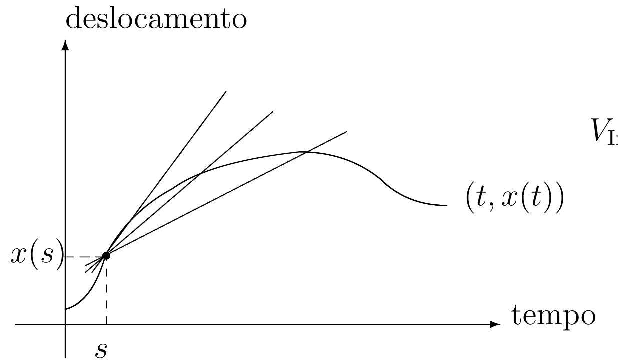
3. Quando a massa do projétil depende do tempo a segunda lei de Newton precisa de uma outra formulação para sermos capazes de equacionar o movimento e mesmo a velocidade instantânea para ser obtida como função do deslocamento precisa da introdução do conceito de derivada.

Exemplo 1.1.2. *Conhecido o deslocamento como função do tempo determinar a velocidade instantânea para cada instante de tempo.*



$$\underset{[t\,,\,t+h]}{V_{\text{Média}}} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$
$$= \text{ inclinação do segmento } [(t, x(t)), (t+h\,,\, x(t+h))]$$

A velocidade média V_m no intervalo $[t, t+h]$ é dada por $\boxed{V_m = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}}$ e é a inclinação do segmento $[(t, x(t)), (t+h, x(t+h))]$



$$V_{\text{Instantânea}} = \text{ inclinação da reta tangente ao gráfico de } x(\cdot) \text{ em } t = s$$

A velocidade instantânea V_i no instante t é dada por $\boxed{V_i = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}}$ e é a inclinação da reta tangente ao gráfico de x no instante t.

Aqui precisamos da noção de limite para definir a velocidade instantânea. O limite que define a velocidade instantânea é chamado derivada de x no instante t.

Vamos considerar os casos de Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Movimento Uniforme Se um corpo se move ao longo de uma reta deslocando-se segundo a equação

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

então, a velocidade em cada instante t é obtida fazendo

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = v_0, \quad h > 0 \quad \text{pequeno}$$

e desta forma a velocidade em cada instante é v_0.

Movimento Uniformemente Variado

Se um corpo se move ao longo de uma reta deslocando-se segundo a equação

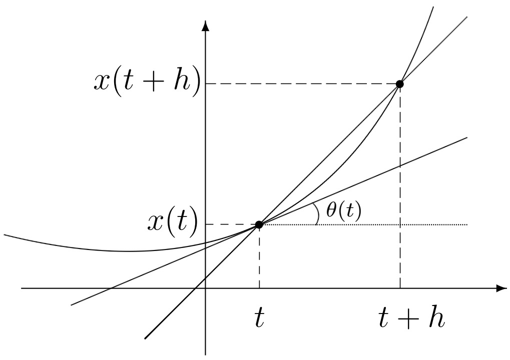
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

então, a velocidade em cada instante t é obtida fazendo

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = v_0 + at + \frac{a}{2}h, \quad h > 0 \quad \text{pequeno}$$

logo, no instante t a velocidade $v(t)$ é

$$v(t) = v_0 + at.$$



tg($\theta(t)$)=v(t)

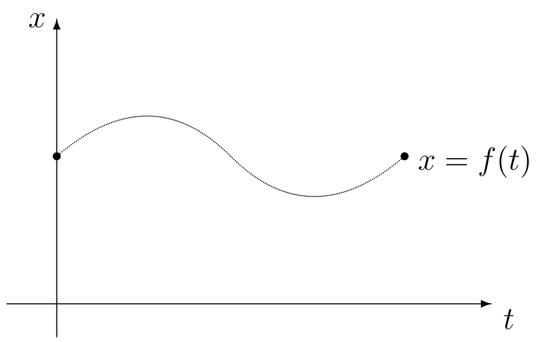
A aceleração é obtida da velocidade da seguinte forma

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = a, \quad h > 0 \quad \text{pequeno}$$

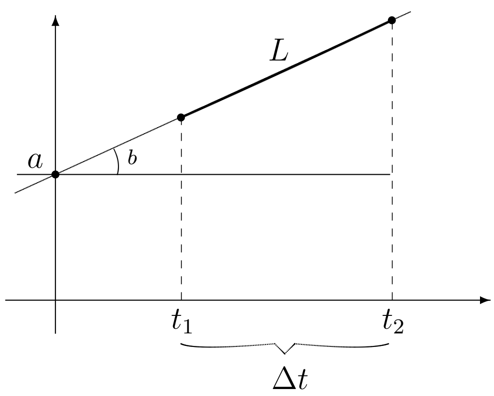
então a aceleração em cada instante t é a.

Observação: Quando o movimento tem expressões mais complicadas como determinar a velocidade e a aceleração? Novamente vamos precisar das noções de limite e derivada.

Exemplo 1.1.3. *Cálculo do comprimento de uma curva dada como gráfico de uma função.*



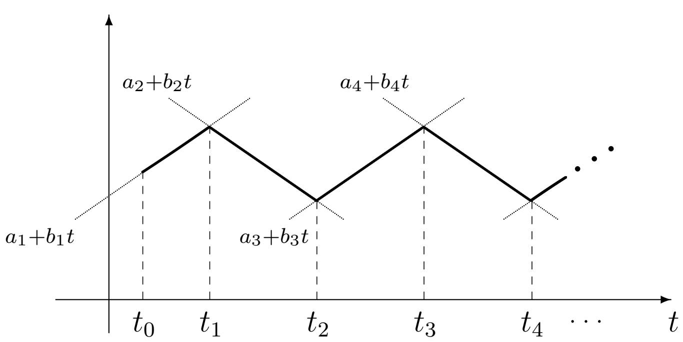
Vamos considerar alguns casos particulares



$$\{\, (t, f(t)) : t_1 \leq t \leq t_2 \,\}$$

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + b^2 (t_2 - t_1)^2} \\ &= \sqrt{1+b^2}(t_2 - t_1) = \sqrt{1+b^2}\,\Delta t \end{aligned}$$

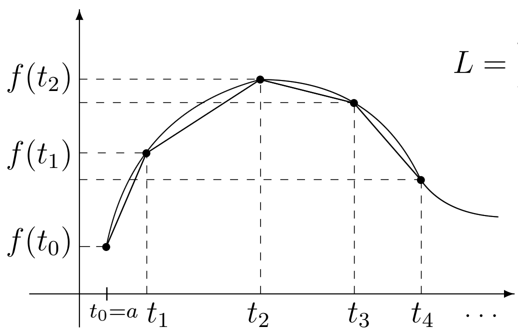
Se, por outro lado, f tem uma poligonal por gráfico



$$b_i = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + b_i^2}\ (t_i - t_{i-1}).$$

No caso geral



$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{(f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}(t_i - t_{i-1})$$

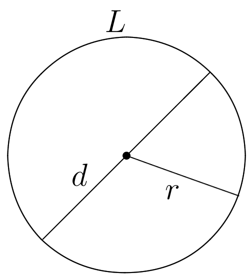
fornece uma aproximação para o comprimento da curva se $(t_i - t_{i-1})$ é pequeno $1 \leq i \leq n$.

Para obter o valor exato vamos precisar introduzir as noções de limite, derivada e integral,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt$$

Exemplo 1.1.4. *A área de uma circunferência.*

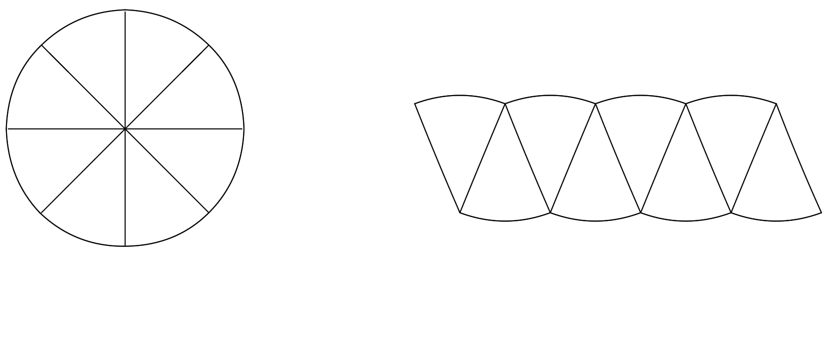
O quociente entre o comprimento de uma circunferência e o diâmetro é um número real denotado por π.



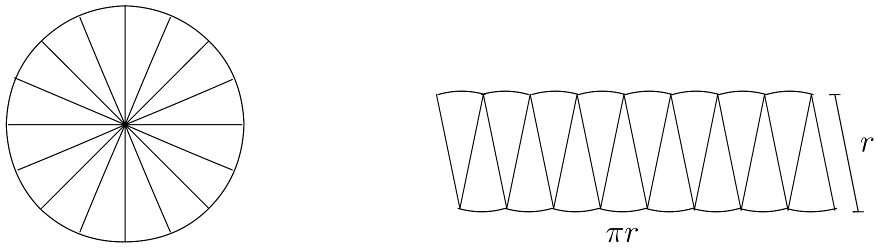
$$L = \pi\, d = 2\pi\, r$$

Vamos determinar a área da circunferência de raio r. A idéia de Archimedes (287-212 a.c.) foi dividir a circunferência em setores de igual área e reagrupá-los da seguinte forma

8 Setores

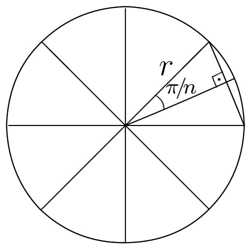


16 Setores



quanto maior o número de setores, na divisão acima, mais a área se aproxima de $\pi r.r = \pi r^2$.

A demonstração deste resultado envolve o conceito de limite. Se dividimos a circunferência em n setores iguais temos



$$A \sim 2n.r\text{sen}\frac{\pi}{n}.r\cos\frac{\pi}{n}.\frac{1}{2} \sim \pi r^2.\frac{\text{sen}\pi/n}{\pi/n}.\cos\pi/n.$$

Se n é grande $\cos\pi/n \sim 1$ e $\frac{\text{sen}\pi/n}{\pi/n} \sim 1$ (primeiro limite fundamental) e teremos

$$A = \pi r^2$$

é, portanto, fundamental entendermos o processo de passagem ao limite para encontrarmos soluções para problemas simples como o cálculo da área de um círculo.

Exemplo 1.1.5. *Cuidado!*

Recorde a fórmula da soma de uma Progressão Geométrica de razão menor que um

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

Quanto maior o valor de n menor é o valor de r^{n+1} e mostraremos que r^{n+1} tende a zero quando n tende a infinito. Desta forma a soma

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1. \qquad (1.1.7)$$

Isto significa que quando tomamos

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

para n grande nos aproximamos do valor $S = \frac{1}{1-r}$. Uma tentativa de estender a igualdade (1.1.7) para $r = -1$ parece conduzir a

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

e de fato, matemáticos de peso como Euler, Leibniz e Bernoulli chegaram a propor $\frac{1}{2}$ como soma desta série (antes de existir o conceito de série convergente). Bernoulli usava a seguinte justificativa

$$\begin{aligned}
&S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \ \Rightarrow \\
&S - 1 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = -S \ \Rightarrow \\
&2S = 1 \text{ e } S = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

No entanto as somas S_n assumem os valores 0 e 1 alternadamente e não se aproximam de qualquer número real. Logo, as manipulações algébricas acima não fazem sentido.

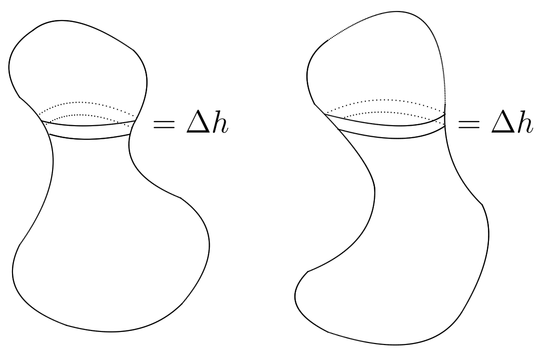
A interpretação correta de (1.1.7) é dada pela noção de "limite" (noção de série convergente) que expressa o fato que S_n se aproxima de S.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}, \quad \text{para } |r| < 1$$

e tal limite não existe se $|r| \geq 1$.

Exemplo 1.1.6. *O volume da esfera e o Princípio de Cavalieri*

Idéia



$V = \sum$ volumes das seções cilíndricas

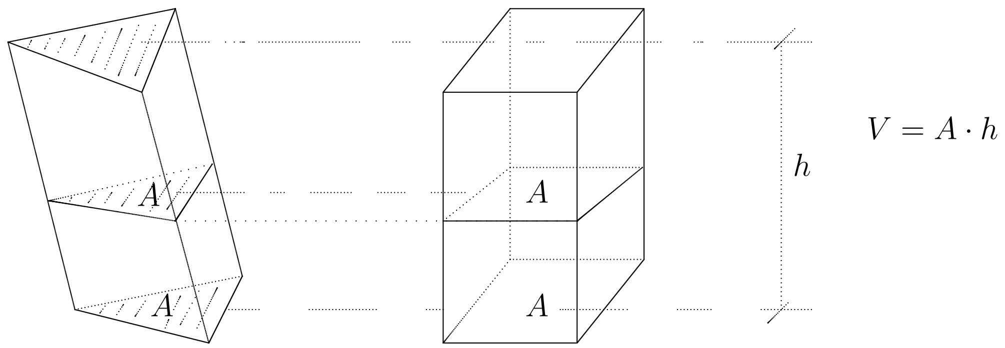
Se cada uma das seções tem mesma área, os volumes devem coincidir

Aqui precisamos do processo de passagem ao limite para mostrar que o volume do sólido pode ser aproximado pela soma dos volumes das seçoes. Este resultado é axiomatizado no seguite princípio.

Theorem 1.1.7 (Princípio de Cavalieri). *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então estes sólidos tem o mesmo volume.*

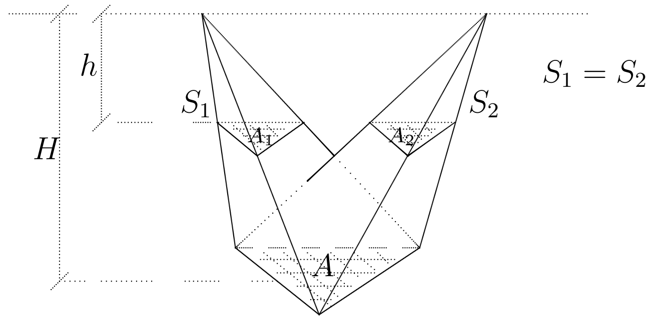
Aplicações:

Volume de um prisma triangular

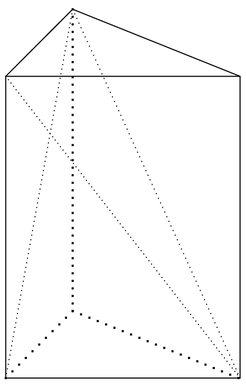


Volume de uma pirâmide triangular

Observe primeiramente que do Princípio de Cavalieri podemos mover livremente o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo ao plano da base sem alterar o seu volume.



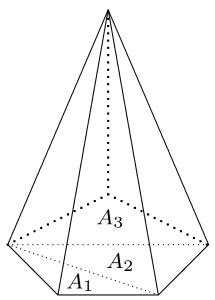
Lembrando que o volume de um prisma com área da base A e altura h é $V = A.h$ e aplicando o resultado acima à figura abaixo temos o volume de uma pirâmide triangular.



$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3}\;\; V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3}\, A \cdot h$$

Volume de uma pirâmide qualquer

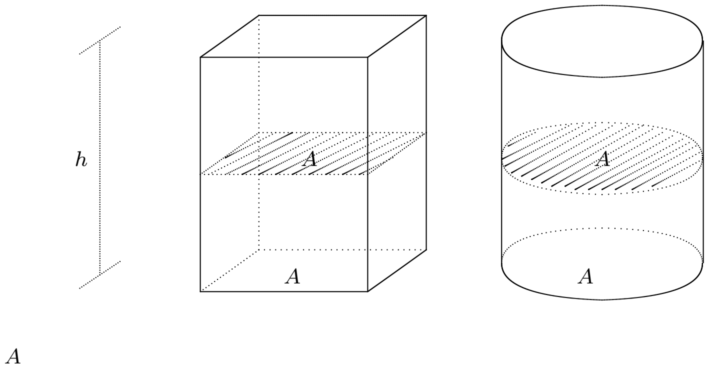
O volume de uma pirâmide qualquer é obtido observando que uma pirâmide qualquer é a união de pirâmides triangulares. Assim



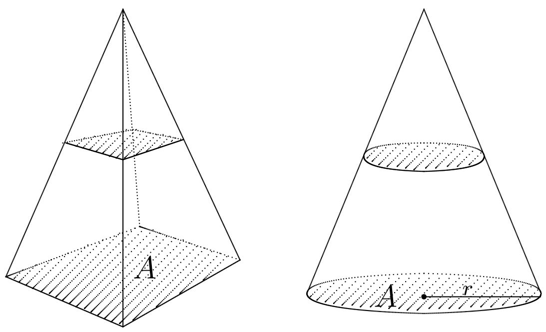
$$V = \frac{1}{3}\; A_1\, h + \frac{1}{3}\, A_2\, h + \frac{1}{3}\; A_3\, h = \frac{1}{3}\, A\, h$$

Volume de um cone e de um cilindro

Para encontrar o volume de um cilíndro e o volume de um cone basta observar as figuras abaixo



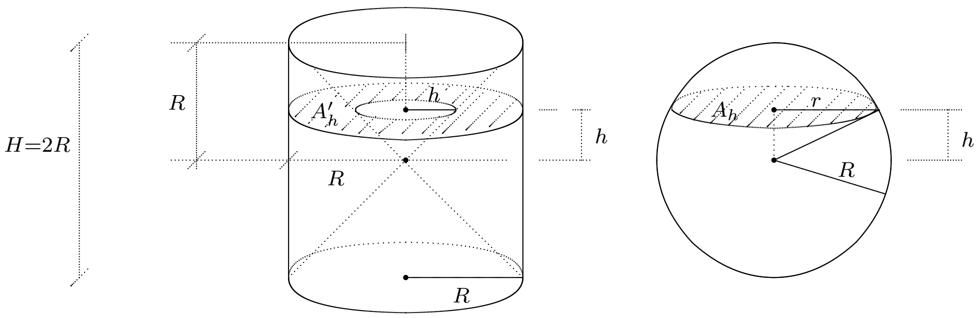
$$V = A \cdot h$$



$$V_c = \frac{1}{3}\, A \cdot h$$
$$= \frac{1}{3}\, \pi\, r^2 \cdot h$$

Volume da Esfera

Para calcular o volume da esfera de raio R construimos um cilindro reto de raio da base R e altura $2R$ e retiramos dos mesmo os dois cones centrais formados pela união do centro do cilindro à borda da base e do topo do cilindro (veja figura abaixo). Se apiamos a esfera no plano da base do cilindro e seccionamos ambos os sólidos por um plano paralelo ao plano da base do cilindro (conforme figura) obtemos um anel (ao sectionar o cilindro sem o cone central) de área A'_h e uma circunferência de área A_h.



Note que $r^2 = R^2 - h^2$ e portanto

$$A'_h = \pi(R^2 - h^2) = \pi r^2 = A_h$$

Segue do Princípio de Cavalieri que o volume V_E da esfera é igual ao volume do cilindro menos os cones centrais. Assim

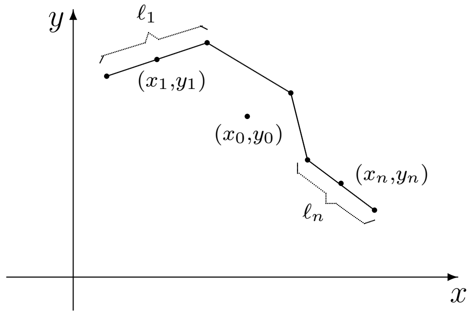
$$V_E = \pi R^2.H - 2.\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{H}{2} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

e portanto

$$\boxed{V_E = \tfrac{4}{3}\pi R^3}.$$

Exemplo 1.1.8. *Quanta borracha é necessária para fazer uma câmara de ar com raio menor $10cm$, raio maior $50cm$ e espessura $0,1cm$.*

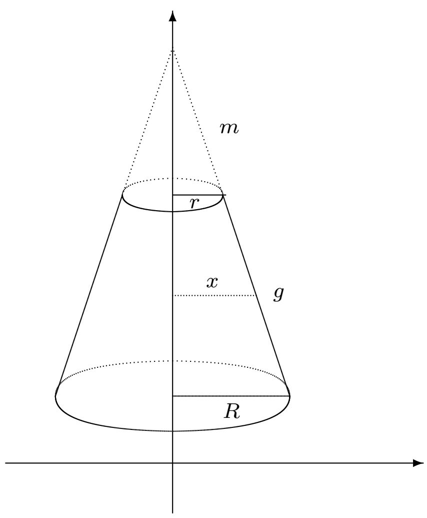
Para resolver este problema introduzimos a noção de centro de massa de uma poligonal plana (c denota a densidade linear). Inicialmente definimos o ponto médio de um segmento como o seu centro de massa. Assim o centro de massa de uma poligonal é dado por:



$$x_c = \frac{c \cdot \ell_1 \cdot x_1 + \cdots + c \cdot \ell_n \cdot x_n}{c \cdot \ell_1 + \cdots + c \cdot \ell_n} = \frac{\ell_1 \cdot x_1 + \cdots + \ell_n \cdot x_n}{\ell_1 + \cdots + \ell_n}$$

$$y_c = \frac{c \cdot \ell_1 \cdot y_1 + \cdots + c \cdot \ell_n \cdot y_n}{c \cdot \ell_1 + \cdots + c \cdot \ell_n} = \frac{\ell_1 \cdot y_1 + \cdots + \ell_n \cdot y_n}{\ell_1 + \cdots + \ell_n}$$

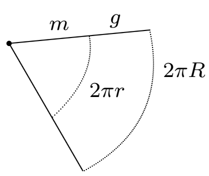
A área lateral de um tronco de cone é obtida da seguinte forma



$A_T = ?$

$$\frac{R}{m+g} = \frac{r}{m} = \frac{R-r}{g}$$

$x = \frac{R+r}{2}$



$$\cancel{2}\pi(\cancel{m+g}) - \pi(m^2+g)^{\cancel{2}}$$
$$\cancel{2}\pi R - A_E$$

$A_E = \pi R(m+g)$

$A_I = \pi r m$

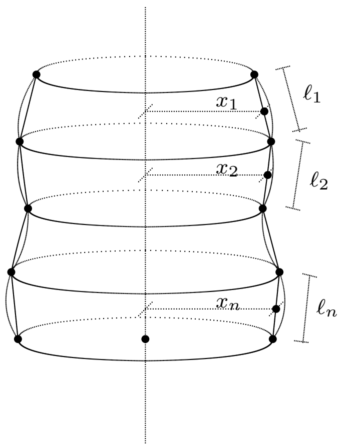
Assim a área lateral A_T do tronco de cone é dada por

$$A_T = \pi R(m+g) - \pi r m = \pi R g + \pi(R-r)m = \pi(R+r)m = 2\pi \frac{R+r}{2} g$$

e desta forma

$$\boxed{A_T = 2\pi x g}$$

onde x é a coordenada do centro de gravidade do segmento ou a distância do centro de gravidade do segmento ao eixo de rotação. Note ainda que $2\pi x$ é a distância que o centro de gravidade percorre ao girarmos o segmento em torno do eixo de rotação para produzir o tronco de cone. Desta forma a área da superfície obtida ao girarmos um segmento em torno de um eixo de rotação (tronco de cone) é o produto da distância percorrida pelo centro de massa do segmento pelo comprimento do segmento. Isto se generaliza facilmente para a superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo de rotação pois esta superfície é formada pela justaposição de diversos troncos de cone

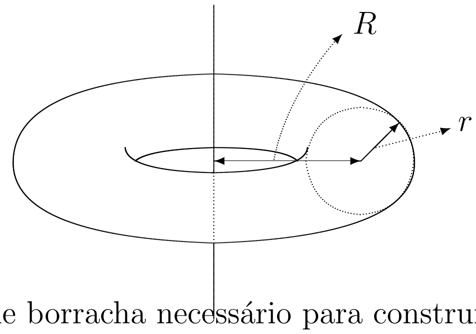


$$\begin{aligned} A &= 2\pi\, x_1 \cdot \ell_1 + \cdots + 2\pi\, x_n \cdot \ell_n \\ &= 2\pi\ \frac{(x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n)}{\ell_1 + \cdots + \ell_n} \cdot (\ell_1 + \cdots + \ell_n) \\ &= 2\pi\, x_c \cdot L \quad , \quad L = \ell_1 + \cdots + \ell_n \end{aligned}$$

Um processo de passagem (tomando mais e mais pontos sobre a curva) ao limite resulta no seguinte resultado

Theorem 1.1.9 (Teorema de Pappus)**.** *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita por seu centro de massa.*

De volta ao problema da câmara de ar



$$A_c = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 Rr$$

O volume de borracha necessário para construir tal câmara é, aproximadamente,

$$V = 4\pi^2.50cm^3.$$

1.2 Como Aprender Cálculo

Não há uma receita de como aprender cálculo mas algumas dicas podem auxiliar o estudante:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto atentamente e pacientemente procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui.
- Acompanhe os exemplos passo a passo procurando desvendar o porque de cada passagem e tentando enxergar porque o autor adotou esta solução. Tente soluções alternativas
- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo às aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir às aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.
- É muito importante frequentar as monitorias ainda que seja somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas.
- Não desista de um exercício se a sua solução não é óbvia, insista e descubra o prazer de desvendar os pequenos mistérios do cálculo.