Topologia - Lista 7

Exercício 1 -) Num espaço localmente compacto, quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

a) A reunião de dois conjuntos localmente compactos é localmente compacto.

b) A interseção de dois conjuntos localmente compactos é localmente compacto.

c) O complemento de um conjunto localmente compacto é localmente compacto.

Exercício 2 -) Seja X um espaço localmente compacto. Se $f : X \to Y$ é contínua, é o espaço $f(X)$ necessariamente localmente compacto? E se f é contínua e aberta.

Exercício 3 -) Uma variedade topológica de dimensão n é um espaço topológico V tal que todo ponto $x \in V$ possui uma vizinhança aberta, homeomorfa a um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Esta definição equivale a exigir que cada ponto $x \in V$ possua uma vizinhança homeomorfa ao disco unitário $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Prove que:

a) R^n e S^n são variedades.

b) Uma variedade V é localmente compacta e localmente conexa por caminhos.

Exercício 4 -) Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ diz-se própria quando é contínua, fechada e, para cada $y \in Y$, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é compacta. Prove que se X e Y são espaços de Hausdorff localmente compactos, então $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f^\sharp : X^\sharp \to Y^\sharp$ definida por $f^\sharp(\infty) = \infty$, for contínua. Obs: o sinal $\sharp$ indica a compactificação de Alexandrov.

Exercício 5 -) Dê exemplo de um espaço localmente compacto, conexo e não-enumerável no infinito.

Exercício 6 -) Seja M um espaço métrico. Prove que existe um espaço métrico N que é uma compactificação de Alexandrov de M se, e somente se, M é localmente compacto e separável.

Exercício 7 -) Prove que num espaço topológico com base enumerável, toda base contêm uma base enumerável.

Exercício 8 -) Seja S um subconjunto denso de um espaço topológico X e $\mathcal{B}$ uma coleção de abertos de X tal que $\mathcal{B}_S = \{B \cap S : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de S. É $\mathcal{B}$ necessariamente uma base de X?

Exercício 9 -) Num espaço métrico M, as seguintes condições são equivalentes:

a) M tem base enumerável.

b) todo conjunto não enumerável contém um ponto de acumulação;

c) toda coleção de abertos disjuntos é enumerável.

Exercício 10 -) Dar um exemplo de um espaço de Hausdorff sem base enumerável no qual todo conjunto infinito possui ponto de acumulação.

Exercício 11 -) Mostre que todo espaço normal de Hausdorff é um espaço regular. Mostre também que todo espaço regular de Hausdorff com a propriedade Lindelöf é normal. Existem espaços de Hausdorff regulares que não são normais?

Exercício 12 -) Se M é um espaço métrico compacto e $f : M \to Y$ é uma aplicação contínua sobre um espaço de Hausdorff Y, então mostre que Y é metrizável.