Topologia - Espaços Compactos - Lista 6

Exercício 1 Mostre que dada uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ do intervalo $[a, b]$, é possível obter números t_i, com $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, tais que os intervalos $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, ..., n-1$, tem todos o mesmo comprimento e cada um deles esta contido em algum conjunto U da cobertura $\mathcal{C}$.

Exercício 2 Uma cadeia de subconjuntos de um conjunto X é uma coleção $\mathcal{F}$ de partes de X tais que dados $F, G \in \mathcal{F}$, ou $F \subset G$ ou $G \subset F$. Mostre que toda cadeia de partes não-vazios de um conjunto X tem a propriedade da interseção finita.

Exercício 3 -) Sejam A, B subconjuntos disjuntos não-vazios no espaço métrico compacto M. Se $d(A, B) = 0$ então existe $p \in \partial A \cap \partial B$.

Exercício 4 -) Sejam $K \subset V \subset M$ onde K é compacto e V é aberto em M. Prove que existe $r > 0$ tal que $\bigcup\limits_{x \in K} B(x, r) \subset V$.

Exercício 5 Mostre que num espaço E_1, as seguintes condições são equivalentes:

a) Todo conjunto infinito tem um ponto de acumulação.

b) Toda seqüência possui uma subseqüência convergente. Em particular, todo espaço compacto E_1 é seqüencialmente compacto.

Exercício 6 Mostre que se toda função real contínua $f : X \to \mathbb{R}$ limitada, então toda função real contínua em X atinge seus extremos.

Exercício 7 Mostre que num espaço topológico qualquer X, o subespaço S formado pelos pontos x_n de uma seqüência convergente e mais o limite a dessa seqüência é um espaço compacto.

Exercício 8 -) Mostre que a reunião finita de conjuntos compactos é compacto.

Exercício 9 -) Mostre que todo subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado na métrica do espaço. Encontre um espaço métrico no qual nem todo o conjunto fechado e limitado é compacto.

Exercício 10 -) Sejam A e B subconjuntos fechados de um espaço de Haussdorff X. Mostre que existem abertos disjuntos U e V em X, com $A \subset U$ e $B \subset V$.

Exercício 11 -) Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua, sendo X compacto e Y de Hausdorff, então f é fechada.

Exercício 12 -) Mostre que se Y é compacto então a projeção $\pi : X \times Y \to X$ é fechada.

Exercício 13 -) (Teorema do Gráfico Fechado) Seja $f : X \to Y$ uma função, sendo Y um espaço compacto e de Hausdorff. Então f é contínua se, e somente se, o gráfico de f é fechado no espaço produto $X \times Y$.

Exercício 14 -) Um espaço X é dito ser enumeravelmente compacto se toda cobertura aberta enumerável de X contém uma subcoleção finita que cobre X.

a) Mostre que enumeravelmente compacto implica que todo subconjunto infinito de X tem um ponto limite.

b) Prove a recíproca se X é de Hausdorff.

Exercício 15 Mostre que toda aplicação aberta de um espaço compacto X num espaço de Hausdorff conexo Y é sobrê Y. Conclua que $\xi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\xi(t) = e^{2\pi it}$, é sobrê S^1.

Exercício 16 -) Seja X um conjunto infinito, sejam a e b dois elementos distintos não pertencentes a X, e considere em $Y = X \cup \{a, b\}$ a topologia

$$\tau = \rho(X) \cup \{X \cup \{a\}, X \cup \{b\}, X \cup \{a, b\}\},$$

sendo $\rho(X)$ a topologia discreta em X. Mostre que $K_1 = X \cup \{a\}$ e $K_2 = X \cup \{b\}$ são compactos mas $K_1 \cap K_2$ não é compacto.

Exercício 17 -) Mostre que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto na topologia τ_f dos complementares finitos.

Exercício 18 -) Mostre que $\mathbb{Q}$ não é localmente compacto.

Exercício 19 -) Seja X um espaço localmente compacto. Se $f : X \to Y$ é contínua, é o espaço $f(X)$ necessariamente localmente compacto? E se f é contínua e aberta.

Exercício 20 -) Num espaço localmente compacto, quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

a) A reunião de dois conjuntos localmente compactos é localmente compacta.

b) A interseção de dois conjuntos localmente compactos é localmente compacta.

c) O complemento de um conjunto localmente compacto é localmente compacta.

Exercício 21 -) Prove:

a) Nem todo espaço compacto é metrizáve.

b) Um espaço localmente compacto E_1 de Hausdorff pode ser seqüêncialmente compacto sem ser compacto.

c) Todo espaço quociente de um espaço compacto é compacto.

d) Se uma topologia compacta é mais fina do que a topologia de Hausdorff, então as duas coincidem.

e) As componentes conexas de um espaço compacto são compactas.