Topologia - Espaços Conexos - Lista 5

Exercício 1 -) Mostre que os seguintes espaços são desconexos.

a) X com mais de um ponto e com a topologia discreta.

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$

Exercício 2 -) Mostre que os seguintes espaços são conexos:

a) $\mathbb{R}^n$, $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$, $D(x, r) \subset \mathbb{R}^n$

b) S^n, $n \geq 1$ c) $\mathbb{R}^n - \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$ d) $\mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$, $n \geq 2$, e) $S^1 \times S^1$

Exercício 3 -) a) Mostre que se X é conexo, $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e f assume valores positivos e negativos, então f assume o valor zero, isto é, $f(x) = 0$ tem solução em X.

b) Mostre que para toda função contínua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ existe um ponto $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

c) Mostre que para cada função contínua $f : S^1 \to \mathbb{R}$ existe um ponto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Exercício 4 -) O grupo $G(n)$ das matrizes reais $n \times n$ com determinante não nulo é desconexo. Suas componentes conexas são $G^+(n) = \{X \in G(n) : det(X) > 0\}$ e $G^-(n) = \{X \in G(n) : det(X) < 0\}$.

Exercício 5 -) Sejam X um espaço topológico e E a relação de equivalência em X cujas classes de equivalência são as componentes conexas de X. O espaço quociente X/E é totalmente desconexo. Se X for localmente conexo, a aplicação quociente $\varphi : X \to X/E$ é aberta e X/E é discreto.

Exercício 6 -) Prove que um espaço topológico X é conexo se, e somente se, para cada par de pontos $x, y \in X$, existe um subconjunto conexo $C \subset X$ tal que $x \in C$ e $y \in C$.

Exercício 7 -) Mostre que para um espaço topológico X ser conexo é necessário e suficiente que toda aplicação contínua de X num espaço discreto seja constante.

Exercício 8 -) O gráfico de uma aplicação contínua definida num espaço conexo é conexo? Vale a recíproca?

Exercício 9 -) Verifique que as letras I, X, Y e o plano são duas a duas não homeomorfos.

Exercício 10 -) Prove que X é conexo se, e somente se, cada cobertura $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ de X por abertos A_i, tem a seguinte propriedade: para cada dois pontos x e y de X existem $i_1, ..., i_k$ em I tais que $x \in A_{i_1}$, $y \in A_{i_k}$ e $A_{i_r} \cap A_{i_{r+1}} \neq \emptyset$.

Exercício 11 -) Seja (M, d) espaço métrico conexo. Mostre que M tem a seguinte propriedade: dados x e y em M e $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $x_1, ..., x_k \in M$ tais que $x = x_1$, $y = x_k$ e $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$.

Exercício 12 -) Sejam A e B subconjuntos conexos não vazios de um espaço X.

a) Prove que $\overline{A} \cup \overline{B}$ é conexo $\Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

b) Prove que $A \cup B$ é conexo $\Leftrightarrow \overline{A} \cap B \neq \emptyset$ ou $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Exercício 13 -) Sejam X um espaço e $Y \subset X$. Prove que todo $A \subset X$ que contém pontos de Y e de seu complementar Y^c encontra a fronteira de Y.

Exercício 14 -) Dê exemplo de um espaço X onde nenhuma componente conexa é aberta em X. E dê também um exemplo onde algumas são abertas e outras não.

Exercício 15 -) Mostre que:

a) Se o número de componentes de X é finito, então as mesmas são abertas.

b) Todo subconjunto aberto e fechado de X é uma união de componentes de X.

Exercício 16 -) Seja X desconexo e K a coleção das componentes de X. Pomos em K a seguinte topologia: $U \subset K$ é aberto se, e somente se, $\displaystyle\bigcup_{\mathcal{C} \in U} \mathcal{C}$ é um aberto de X. Prove que K é desconexo.

Exercício 17 -) Suponhamos que um espaço X tem a seguinte propriedade: cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V aberta, homeomorfa a uma bola $B(x, r) \in \mathbb{R}^n$ para algum n. Mostre que X é localmente conexo.

Exercício 18 -) a) Motre que o pente P não é localmente conexo, embora seja conexo.

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 0 \text{ e } 0 \leq y \leq 1) \text{ ou } (y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1) \text{ ou } (x = 1/n \text{ e } 0 \leq y \leq 1)\}.$$

b) Idem para a solenóide S,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 0 \text{ e } -1 \leq y \leq 1) \text{ ou } (0 < x \leq 1 \text{ e } y = \operatorname{sen}(1/x))\}.$$

Exercício 19 -) Mostre que todo subconjunto estrelado e convexo de $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos.

Exercício 20 -) Seja X um espaço para o qual existe uma função contínua $h : X \times [0, 1] \to X$ e um ponto $a \in X$ satisfazendo $h(x, 0) = x$ e $h(x, 1) = a$ para todo $x \in X$. Mostre que X é conexo por caminhos.

Exercício 21 -) Dê exemplo de um espaço X e $A \subset X$, A conexo por caminhos mas $\overline{A}$ não.