Lista 4 - Espaços Topológicos

Exercício 1 -) Sejam X um conjunto e Σ uma coleção qualquer de partes de X. Pomos β como a coleção de todas as interseções finitas de elementos de Σ. Mostre que β é base para uma topologia em X. Prove também que a topologia determinada por β é a menos fina das topologias que contém Σ.

Exercício 2 -) Sejam (X, τ) e (Y, Λ) espaços topológicos disjuntos, $X \cap Y = \emptyset$ e $Z = X \cup Y$. Mostre que $\beta = \tau \cup \Lambda$ é base para uma topologia em Z.

Obs: Seja (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Denote por $\mathcal{V}(x)$ o sistema de vizinhanças de x, isto é, $\mathcal{V}(x) = \{V \subset X : V \text{ é uma vizinhança de } x\}$.

Exercício 3 -) Verifique que as seguintes propriedades são válidas para os sistemas de vizinhanças:

a) $x \in V$, $\forall\, V \in \mathcal{V}(x)$;

b) se $V \in \mathcal{V}(x)$ e $V \subset U$ então $U \in \mathcal{V}(x)$;

c) $(V_i)_{i\in I}$, I finito, $V_i \in \mathcal{V}(x)$, então $\cap_{i\in I} V_i \in \mathcal{V}(x)$;

d) $\forall\, V \in \mathcal{V}(x)$, existe U tal que $x \in U \subset V$ e $U \in \mathcal{V}(y)$, $\forall\, y \in U$.

Exercício 4 -) Seja X espaço topológico e $A \subset X$ com a topologia induzida. Para $x \in A$ pomos $\mathcal{V}_A(x)$ o sistema de vizinhanças de x no subespaço A. Mostre que:

$$V \in \mathcal{V}_A(x) \Leftrightarrow \exists\, V' \in \mathcal{V}(x) \text{ tal que } V = V' \cap A.$$

Exercício 5 -) Faça os exercícios 50 e 51 (Elementos de Topologia Geral, Elon Lages Lima - Capítulo 3, pág. 101.)

Exercício 6 -) Mostre que $(A \cap B)^- = A^- \cap B^-$ é falsa, mas $(A \cap B)^- \subset A^- \cap B^-$ é verdadeira. Conclua que se a igualdade ocorre para qualquer subconjunto X então sua topologia é a discreta.

Exercício 7 -) Faça os exercícios 33, 35, 38, 39, 41, 42, 44, 46, 56, 57, 58, 59, 64 (Elementos de Topologia Geral, Elon Lages Lima - Capítulo 3, pág. 100 à 103.)

Exercício 8 -) Para quaisquer subconjuntos de um espaço X, mostre que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Exercício 9 -) Se A é um subconjunto finito de um espaço topológico X, mostre que $A' = \emptyset$.