Lista 3 - Espaços Topológicos

Exercício 1 -) Mostre que o conjunto $G = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 2 -) Considere sobre $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$. Mostre que a bola fechada $B[0, 1]$ é um subconjunto aberto do espaço M.

Exercício 3 -) Em cada um dos casos abaixo, determinar se A é ou não um subconjunto aberto do espaço métrico M.

a) $M = \mathbb{R}$ e $A = \mathbb{Q}$;

b) $M = \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ e $A_a = \{$funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(a) > 0$ para $a \in X$ fixo$\}$;

c) $M = \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $A_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$;

d) $M = \mathbb{R}^2$ e $A = \{$pontos do plano que não estão no círculo $x^2+y^2 = 1$ e nem mo eixo dos $x\}$;

e) $M = \mathbb{Z}$ e $A = \{x \in M : |x - 2| = 3\}$;

f) $M = \mathbb{R}$ e $A = \{x \in M : x \geq -3\}$;

g) $M = \mathcal{B}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $A = \{f \in M : f$ é descontínua em todos os pontos da reta$\}$;

h) $M = \mathcal{C}_0([a, b]; \mathbb{R})$ e $A = \left\{ f \in M : \int_a^b f(x)dx > 0 \right\}$.

Obs: $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$: conjunto das aplicações limitadas de X em $\mathbb{R}$; $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: conjunto de todas as aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$; $\mathcal{C}_0([a, b]; \mathbb{R})$: conjunto das aplicações contínuas limitadas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$.

Exercício 4 -) Sejam X um conjunto e $f : X \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Prove que se $f(X)$ for aberto em $\mathbb{R}^m$ então $|f(x)|$ não atinge um valor máximo para $x \in X$. O que se pode dizer do mínimo de $|f(x)|$? Vale um resultado análogo para qualquer espaço normado, em lugar de $\mathbb{R}^m$?

Exercício 5 -) Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y$ ou $y = 0\}$. Mostre que a interseção de A com qualquer reta horizontal ou vertical é aberta nessa reta, mas A não é um subconjunto aberto do plano.

Exercício 6 -) Prove que num espaço vetorial normado E, nenhum subespaço vetorial $L \neq E$ pode conter uma bola aberta de E.

Exercício 7 -) Mostre que todo aberto não-vazio $A \subset \mathbb{R}^m$ contém pelo menos um ponto $x = (x_1, ..., x_m)$ cujas coordenadas $x_1, ..., x_m$ são racionais. Conclua que se $\mathcal{C}$ é uma coleção de abertos dois a dois disjuntos em $\mathbb{R}^m$, então $\mathcal{C}$ é enumerável. Como conseqüência, mostrar que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função monótona, então o conjunto dos pontos $x \in I$ nos quais f é descontínua é enumerável.

Exercício 8 -) No espaço $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, seja A o conjunto dos pares (x, y) tais que x e y são linearmente independentes. Mostre que A é aberto em $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercício 9 -) Verifique que cada coleção τ abaixo, satisfaz os axiomas para uma topologia:

a) $(\{x, y\}, \tau)$, onde $\tau = \{\{x\}, \{x, y\}, \emptyset\}$. Esta é a topologia de Sierpinski.

b) (X, τ) onde X é um conjunto qualquer e uma parte A pertence a τ se $A = \emptyset$ ou A tem complementar finito em X.

c) (X, τ) onde X é um conjunto qualquer não vazio, contendo um elemento $x \in X$, e τ é a coleção das partes A de X tais que $A = \emptyset$ ou A contém o elemento fixado x.

Exercício 10 -) No exercício 9) verifique que as topologias dos itens a) e c) não são induzidos por métricas, isto é, não existe métrica cujos abertos são daquelas topologias.

Exercício 11 -) Seja A subconjunto de X e τ uma topologia em X. Mostre que a coleção τ_A de partes de A do tipo $U \cap A$ com $U \in \tau$, é uma topologia em A.

Exercício 12 -) Mostre que um aberto U de $\mathbb{R}$, com a topologia usual, é uma união disjunta de intervalos abertos (a, b) onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Exercício 13 -) Sejam $A \subset B \subset X$, τ uma topologia em X, τ_B a induzida por τ em B, τ_A a induzida por τ em A e τ_{BA} a induzida por τ_B em A. Mostre que $\tau_{BA} = \tau_A$.

Exercício 14 -) Arranje uma métrica em X (um conjunto qualquer não-vazio) que induza a topologia discreta.

Exercício 15 -) Determine todas as topologias que podem definir num conjunto com 2 elementos. Idem com 3 elementos. Quais delas são de Hausdorff?

Exercício 16 -) Mostre que a função constante é contínua.

Exercício 17 -) Dê todas as funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{R}$ tem a topologia usual e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ a de subespaço.

Exercício 18 -) Mostre que toda aplicação $f : X \to Y$ de um espaço discreto X num espaço topológico Y é contínua. Se, porém, Y for discreto, então f é contínua se, e somente se, X é uma reunião de abertos, dois a dois disjuntos, em cada um dos quais f é constante.

Exercício 19 -) Prove que uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, a topologia de X for mais fina do que a induzida por f. E se f for contínua e biunívoca, então f será um homeomorfismo de X sobre $f(X)$ se, e somente se, a topologia de X coincidir com a induzida por f.

Exercício 20 -) Mostre que se S tem a topologia induzida por $f : S \to X$ então uma aplicação $g : Z \to S$ é contínua se, e somente se, $f \circ g : Z \to X$ é contínua. Em particular, se $S \subset X$ é um subespaço e $g : Z \to X$ é uma aplicação tal que $g(Z) \subset S$, então $g : Z \to X$ é contínua se, e somente se, considerada como uma aplicação de Z em S, g é contínua.

Exercício 21 -) Mostre que a topologia usual de $\mathbb{R}^n$ coincide com a topologia produto, considerando $\mathbb{R}$ com a usual.

Exercício 22 -) Sejam $(X_i,\, \tau_i)$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ família de espaços topológicos e $A_i \subset X_i$ com a topologia σ_i em A_i induzida por τ_i. Mostre que a topologia produto dos τ_i em $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$ induz em $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i$ a topologia produto dos σ_i.

Exercício 23 -) Mostre que uma função $f : (X,\, \tau) \to (Y,\, \sigma)$ é contínua se, e somente se, a função $F : (X,\, \tau) \to (X \times Y,\, \Delta)$ dada por $F(x) = (x,\, f(x))$ é contínua, onde Δ é a topologia produto.

Exercício 24 -) Sejam X e X' um mesmo conjunto, com topologias τ_1 e τ_2, respectivamente. Sejam Y e Y' um mesmo conjunto, com topologias σ_1 e σ_2, respectivamente. Mostre que se $\tau_2 \supset \tau_1$ e $\sigma_2 \supset \sigma_1$, então a topologia produto em $X' \times Y'$ é mais fina que a topologia em $X \times Y$.

Exercício 25 -) Faças os seguintes exercícios do Livro: Elementos de Topologia Geral, Elon Lages Lima - Capítulo 3, pág. 98. Exercícios: 23, 24, 25, 26, 30 e 31.