**Lista 2 - Funções Contínuas**

**Exercício 1** -) Sejam $M$ um espaço métrico e $X$ um conjunto qualquer. Prove que para cada $x \in X$, a aplicação $v_x : \mathcal{B}(X;\, M) \to M$, definida por $v_x(f) = f(x)$ é contínua.

**Exercício 2** -) Uma aplicação $f : M \to N$ ($M$ e $N$ espaços métricos) diz-se **lipschitziana** quando existe um número $c > 0$ (a "constante de Lipschitz"de $f$) tal que $d(f(x),\, f(y)) \leq c \cdot d(x,\, y)$, sejam quais forem $x,\, y \in M$. Prove que:

a) Toda aplicação Lipschitziana é contínua;

b) Se $I$ for um intervalo e $f,\, g : I \to \mathbb{R}$ funções lipschitzianas então $f+g$ é lipschitziana. E mais se $I$ for limitado, então $fg$ será lipschitziana.

c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for derivável, com $|f'(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f$ é Lipschitziana.

**Exercício 3** -) Sejam $M,\, N$ espaços métricos, $Y \subset N$ um subespaço e $i : Y \to N$ a aplicação de inclusão. Mostre que a aplicação $f : M \to Y$ é contínua se, e somente se, a composta $i \circ f : M \to N$ também o fôr.

**Exercício 4** -) Na questão anterior, suponha que $Y \subset M$ e $i : Y \to M$. Pode-se afirmar que $f : M \to N$ é contínua em todos os pontos de $Y$ se, e somente se, $f \circ i = f \mid Y : Y \to N$ for contínua?

**Exercício 5** -) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,\, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x,\, y) \neq (0,\, 0)$ e $f(0,\, 0) = 0$. Mostre que para qualquer $a \in \mathbb{R}$, as aplicações parciais $x \mapsto f(x,\, a)$ e $y \mapsto f(a,\, y)$ são contínuas em toda a reta, mas $f$ não é contínua no ponto $(0,\, 0)$.

**Exercício 6** -) Seja $M$ um espaço discreto. Prove que toda aplicação $f : M \to N$ (onde $N$ é qualquer espaço métrico) é contínua.

**Exercício 7** -) Sejam $f,\, g : M \to N$ funções contínuas e $M,\, N$ espaços métricos. Se $f(a) \neq g(a)$ para algum $a \in M$, mostre que existe uma bola $B = B(a;\, r)$ tal que $f(x) \neq g(y)$ quaisquer que sejam $x,\, y \in B$.

**Exercício 8** -) Sejam $M,\, N$ espaços métricos. A oscilação de $f : M \to N$ no ponto $a \in M$ é o número $\omega(f;\, a) =$ ínfimo dos diâmetros dos conjuntos $f(B(a;\, r))$, imagens por $f$ das bolas abertas de centro em $a$. Prove que $f$ é contínua no ponto $a$ se, e somente se, $\omega(f;\, a) = 0$.

**Exercício 9** -) Calcule:

a) a oscilação de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, em todo ponto da reta.

b) a oscilação de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \text{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, no ponto 0.

**Exercício 10** -) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x$ for irracional e $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$, $q > 0$ é uma fração irredutível. Prove que $f$ é contínua no ponto $a$ se, e somente se, $a$ for irracional.

**Exercício 11** -) Mostre que a projeção ortogonal define um homeomorfismo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ do $\mathbb{R}^3$ no plano $z = 0$.

**Exercício 12** -) Estabelecer os seguintes homeomorfismos:

a) Entre $\mathbb{R}^{n+1} - \{a\}$ e $S^n \times \mathbb{R}$ (onde $a \in \mathbb{R}^{n+1}$).

b) Entre o semi-espaço superior aberto $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$ e o espaço $\mathbb{R}^n$. Entre $\overline{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}$ e o espaço $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, +\infty)$.

c) Entre $\overline{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0, ..., x^n \geq 0\}$ e $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, +\infty)$.

**Exercício 13** -) Para cada $i = 1, ..., n$, sejam $h_i : M_i \to N_i$ homeomorfismos. Mostre que $h : M_1 \times ... \times M_n \longrightarrow N_1 \times ... \times N_n$ definido por $h(x_1, ..., x_n) = (h_1(x_1), ..., h_n(x_n))$, é um homeomorfismo.

**Exercício 14** -) Sejam $f : M \to N$ e $g : N \to P$ funções contínuas. Mostre que se $g \circ f$ é um homeomorfismo e $g$ injetora (ou $f$ sobrejetora), então $f$ e $g$ são homeomorfismos.

**Exercício 15** -) Um espaço métrico $M$ se diz homogêneo se para quaisquer $a, b \in M$ existe um homeomorfismo $f : M \to M$ tal que $f(a) = b$.

a) Se $M$ e $N$ são homeomorfos, mostre que $M$ é homogêneo se, e somente se, $N$ é homogêneo.

b) Mostre que um espaço vetorial normado $E$ é homogêneo.

c) Mostre que uma bola aberta num espaço vetorial normado é homogêneo.

d) Mostre que um espaço cuja métrica é a zero-um é homogêneo.

**Exercício 16** -) Prove que $S^{n_1} \times S^{n_2} \times ... \times S^{n_k}$ é homeoformo à $\mathbb{R}^{n_1+n_2+...+n_k+1}$.