Lista de Espaços Métricos - Revisão

Exercício 1 -) Seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma função real tal que $d(x,\, x) = 0$, $d(x,\, y) \neq 0$ se $x \neq y$ e $d(x,\, z) \leq d(x,\, y) + d(z,\, y)$. Mostre que d é uma métrica.

Exercício 2 -) Seja E um espaço vetorial e d uma métrica em E tal que $d(x+z,\, y+z) = d(x,\, y)$ e $d(\lambda x,\, \lambda y) = |\lambda| d(x,\, y)$ para quaisquer $x,\, y,\, z \in$ E e λ escalar. Prove que existe uma norma $|.|$ em E tal que $d(x,\, y) = |x - y|$.

Exercício 3 -)

a) Considere sobre $\mathbb{R}$ a métrica usual. Mostre que se $p = 0$ e $A = \left\{1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3},\, ...\right\}$, então $d(p,\, A) = 0$.

b) Consideremos o $\mathbb{R}^2$ dotado da métrica euclidiana. Sejam $A = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 :\, y = 0\}$ e $B = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 :\, xy = 1\}$, mostre que $d(A,\, B) = 0$.

c) Mostre que o diâmetro de $A = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ é igual a 2. (Considere o $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana).

Exercício 4 -) Dê um exemplo de três subconjuntos A, B e C da reta, tais que $d(A,\, C) > d(A,\, B) + d(B,\, C)$.

Exercício 5 -) Sejam X e Y subconjuntos limitados de um espaço métrico M. Seja $\alpha(X,\, Y) = \sup\{d(x,\, y) :\, x \in X,\, y \in Y\}$. Mostre que $\alpha(X,\, Y) < +\infty$ e, para qualquer $z \in M$, tem-se $|d(z,\, X) - d(z,\, Y)| \leq \alpha(X,\, Y)$.

Exercício 6 -) Seja $\Delta \subset M \times M$ a diagonal: $\Delta = \{(x,\, x) :\, x \in M\}$, onde M é um espaço métrico. Considere em $M \times M$ a métrica $d(x,\, y) = \max\{d(x_1,\, y_1),\, d(x_2,\, y_2)\}$. Mostre que $d(x,\, \Delta) = 0$ se, e somente se, $x \in \Delta$.

Exercício 7 -) Mostre que todo espaço métrico finito é discreto.

Exercício 8 -) Mostre que num espaço normado $E \neq \{0\}$ não existem pontos isolados.