

SMA-120 INTRODUÇÃO A ANÁLISE FUNCIONAL
TEOREMA DE BANACH-ALAOGLU E O TEOREMA DE MAZUR

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

13 de Novembro de 2025
Segundo Semestre de 2025

A TOPOLOGIA FRACA* E O TEOREMA DE BANACH-ALAOGLU

A prova da seguinte proposição é deixada como um exercício.

Proposição

Seja X um espaço vetorial normado sobre \mathbb{R} . Obtemos uma base de vizinhanças de $f_0 \in X^$ para a topologia $\sigma(X^*, X)$ ao considerar*

$$V = \{f \in X^* : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \epsilon, i \in I\},$$

onde $x_i \in X$, I é finito e $\epsilon > 0$.

Notação: Quando $f_n \rightarrow f$ em $(X^*, \sigma(X^*, X))$, escrevemos

$$f_n \xrightarrow{*} f$$

e dizemos que f_n converge para f na topologia fraca*.

Da mesma forma, a prova da proposição a seguir é deixada como um exercício.

Proposição

Seja X um espaço vetorial normado sobre \mathbb{K} . Se $\{f_n\} \subset X^*$ temos:

- i) $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in X.$
- ii) Se $\|f_n - f\|_{X^*} \rightarrow 0$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ e se $f_n \rightarrow f$, então $f_n \xrightarrow{*} f$.
- iii) Se $f_n \xrightarrow{*} f$, então $\{\|f_n\|\}$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$.
- iv) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ e $x_n \rightarrow x$, então $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

O TEOREMA DE BANACH-ALAOGLU

Recorde que

Proposição

Seja X um conjunto e \mathcal{T} a topologia em X induzida pela família de funções $\varphi_i : X \rightarrow \mathbb{K}$, $i \in I$. Se (Z, Σ) é um espaço topológico e $\psi : Z \rightarrow X$ é uma função então, ψ é contínua se, e somente se, $\varphi_i \circ \psi$ é contínua de Z em \mathbb{K} , $\forall i \in I$.

Vamos usar esta proposição para provar o

Teorema (Banach-Alaoglu)

Seja X um espaço vetorial normado sobre \mathbb{K} . O conjunto $\overline{B}_1^{X^}(0) = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia $\sigma(X^*, X)$.*

Prova: Sejam

$$Y = \mathbb{K}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}\} = \{(w_x)_{x \in X}\}$$

com a topologia produto τ , $\Phi : (X^*, \sigma(X^*, X)) \rightarrow (Y, \tau)$ definida por

$$\Phi(f) = (f(x))_{x \in X}$$

e $\pi_x : Y \rightarrow \mathbb{K}$ a projeção definida por $\pi_x((w_x)_{x \in X}) = w_x$.

Da caracterização de continuidade na topologia produto e da definição de $\sigma(X^*, X)$, Φ é contínua pois

$$(X^*, \sigma(X^*, X)) \ni f \rightarrow (\pi_x \circ \Phi)(f) = f(x) = Jx(f) \in \mathbb{K}$$

é contínua para cada $x \in X$.

Provemos que Φ é um homeomorfismo de X^* sobre $\Phi(X^*)$.

Claramente Φ é injetora e provemos que Φ^{-1} é contínua.

Da caracterização de continuidade na topologia fraca*, é suficiente mostrar que para todo $x \in X$ fixo a aplicação

$$(\Phi(X^*), \tau) \ni w \mapsto \langle \Phi^{-1}(w), Jx \rangle = \langle x, \Phi^{-1}(w) \rangle = w_x \in \mathbb{K}$$

é contínua, o que é óbvio da definição da topologia produto em \mathbb{K}^X .

Por outro lado, é claro que $\Phi(\overline{B_1^{X^*}}) = K$ onde

$$K = \{w \in Y : |w_x| \leq \|x\|, w_{x+y} = w_x + w_y, w_{\lambda x} = \lambda w_x, \lambda \in \mathbb{K}, x, y \in X\}.$$

Então, basta mostrar que K é um compacto de Y para concluir que $\overline{B_1^{X^*}}$ é compacto em X^* . Mas $K = K_1 \cap K_2$, onde

$$K_1 = \{w \in Y : |w_x| \leq \|x\|, \forall x \in X\} = \prod_{x \in X} \overline{B_{\|x\|, \|x\|}^{\mathbb{K}}}(0),$$

$$K_2 = \{w \in Y : w_{x+y} = w_x + w_y, w_{\lambda x} = \lambda w_x, \lambda \in \mathbb{K}, x, y \in X\}$$

$$= \bigcap_{x, y \in X} \underbrace{\{w \in Y : w_{x+y} - w_x - w_y = 0\}}_{A_{x,y}} \cap \bigcap_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ x \in X}} \underbrace{\{w \in Y : w_{\lambda x} - \lambda w_x = 0\}}_{B_{\lambda y}}.$$

Segue do Teorema de Tychonoff que K_1 é compacto.

Como $A_{x,y}$ e $A_{\lambda x}$ são fechados (pois $w \mapsto w_{x+y} - w_x - w_y$ e $w \mapsto w_{\lambda x} - \lambda w_x$ são contínuas) segue que K_2 é fechado.

Logo, K é compacto. \square

CONVEXOS E O TEOREMA DE MAZUR

Nesta seção $(X, \|\cdot\|_X)$ será um espaço vetorial normado. Recorde que $C \subset X$ é convexo, se e somente se,
 $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\} \subset C$ sempre que $x, y \in C$.

Exercício

Mostre que a interseção de quaisquer dois conjuntos convexos é convexa.

Definição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$. Definimos a envoltória convexa de K por

$$\text{co}K = \bigcap \{C \subset X : C \text{ é convexo e } C \supset K\}$$

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$ convexo. Então,

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*, k_i \in K, \alpha_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \right\}$$

Prova: É claro que

$$\begin{aligned} K &\subset \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*, k_i \in K, \alpha_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \right\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \right\} \end{aligned}$$

Seja

$$K_n := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Mostremos, por indução, que $K_n \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

É claro que $K_1 \subset K$. Suponha que, para $1 \leq j \leq n-1$, $K_j \in K$ e mostremos que $K_n \subset K$.

Seja $k \in K_n$, isto é, $k = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i$, com $k_i \in K$, $\alpha_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq n$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Se $\alpha_j = 0$, para algum $1 \leq j \leq n$, acabamos. Suponha que $\alpha_j \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ e defina $0 < \beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i < 1$.

Logo $\alpha_n = 1 - \beta$ e

$$\hat{k} := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\beta} k_i \in K \quad \text{e} \quad k_n \in K.$$

Segue que

$$k = \beta \hat{k} + (1 - \beta) k_n \in K. \quad \square$$

Exercício

Mostre que o fecho de um conjunto convexo é convexo.

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$. Então,

$$\text{co}K = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*, k_i \in K, \alpha_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \right\}$$

Prova: Para verificar que o conjunto

$$\hat{K} := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*, k_i \in K, \alpha_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \right\}$$

é convexo basta tomar dois elementos $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i$ e

$x' = \sum_{i=1}^{n'} \alpha'_i k'_i$ e notar que para todo $\beta \in [0, 1]$,

$\beta x + (1 - \beta)x' \in K$ (exercício). Logo $K \subset \text{co}K \subset \hat{K}$.

Do teorema anterior, qualquer convexo que contenha K deve também conter \hat{K} . Logo $\text{co}K = \hat{K}$ e o resultado está demonstrado. \square

Definição

Chamaremos de *envoltória convexa fechada* de K ao conjunto $\overline{\text{co}}K = (\text{co}K)^-$.

Exercício

Mostre que $\overline{\text{co}}K = \bigcap \{F \subset X : F \text{ é convexo e } F = F^- \supset K\}$.

Proposição (Teorema de Mazur)

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ for um espaço vetorial normado e $K \subset X$ for totalmente limitado então, $\text{co}K$ será totalmente limitado.

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Fixe $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ e $k_i \in K$, $1 \leq i \leq n_\epsilon$, tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(k_i)$. Se $K_\epsilon = \overline{\text{co}}\{k_1, \dots, k_{n_\epsilon}\}$. Da Proposição 5 (completando com zeros as somas com menos de n_ϵ somandos)

$$K_\epsilon = \left\{ \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i k_i : \alpha_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n_\epsilon, \text{ e } \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i = 1, \right\}.$$

Note que

$$S_{n_\epsilon} = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_\epsilon}) : \alpha_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n_\epsilon, \text{ e } \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i = 1 \right\} \subset [0, 1]^{n_\epsilon},$$

é compacto e $f: S_{n_\epsilon} \rightarrow X$ definida por $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_\epsilon}) = \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i k_i$ é contínua e tem imagem $f(S_{n_\epsilon}) = K_\epsilon$. Logo K_ϵ é compacto.

Note que $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(k_\epsilon) : k_\epsilon \in K_\epsilon\}$, como cobertura de K_ϵ , tem uma subcobertura finita $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(k_\epsilon^i) : 1 \leq i \leq m_\epsilon\}$. Segue que $\{B_\epsilon^X(k_\epsilon^i) : 1 \leq i \leq m_\epsilon\}$ cobre $\mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K_\epsilon) = \text{co} \bigcup_{i=1}^{m_\epsilon} B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(k_i)$ que contém $\text{co}K$. \square