SMA-120 Introdução a Análise Funcional
O Teorema de Friedrichs

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

21 de Outubro de 2025
Segundo Semestre de 2025

Proposição

Se $A_i : D(A_i) \subset H \to H$ são operadores lineares densamente definidos e $A_1 \subset A_2$, então $A_1^* \supset A_2^*$.

Prova: Se $y \in D(A_2^*)$ então

$$D(A_2) \ni x \mapsto \langle A_2 x, y \rangle \in \mathbb{K}$$

se estende a un único funcional linear limitado em H^* que tem como representação (pelo TRR) $A_2^* y$. Segue que

$$D(A_1) \ni x \mapsto \langle A_1 x, y \rangle = \langle A_2 x, y \rangle \in \mathbb{K}$$

também se estende ao mesmo funcional linear limitado. Sendo assim, $y \in D(A_1^*)$ e $A_1^* y = A_2^* y$.□

Este resultado indica que, se buscamos um operador auto adjunto $\tilde{A}$ que estende um operador simétrico A, $A \subset \tilde{A} \subset A^*$.

O teorema a seguir e o Teorema anterior constituem as principais ferramentas utilizadas para obter de operadores auto-adjuntos.

Teorema (Friedrichs)

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador simétrico para o qual existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle Ah, h\rangle \leqslant \alpha \|h\|^2 \text{ ou } \langle Ah, h\rangle \geqslant \alpha \|h\|^2 \tag{1}$$

para todo $h \in D(A)$. Então A admite uma extensão auto-adjunta que preserva a limitação (1).

Prova: Vamos fazer a prova apenas no caso em que $\langle Ax, x\rangle \geqslant \alpha \|x\|^2$ para todo $x \in D(A)$ e para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. O outro caso pode ser deduzido deste considerando o operador $-A$. Também consideraremos apenas o caso $\alpha = 1$ pois o caso geral pode ser deduzido deste considerando o operador $A + (1-\alpha)I$.

Em $D(A)$ considere o produto interno

$$D(A) \times D(A) \ni (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle \in \mathbb{K}.$$

Claramente, a norma $D(A) \ni x \mapsto \|x\|_{\frac{1}{2}} = \langle Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^+$ resultante deste produto interno satisfaz $\|x\|_{\frac{1}{2}} \geqslant \|x\|$.

Denote por $H^{\frac{1}{2}}$ o completamento de $D(A)$ relativamente à norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ construído da seguinte forma:

Se $\{x_n\}$ é de Cauchy em $(D(A),\|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$, $\{x_n\}$ é de Cauchy na norma $\|\cdot\|$ de H. Seja $x \in H$ tal que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ na norma $\|\cdot\|$ de H.

Note que, se $\{\tilde{x}_n\}$ é outra seqüência de Cauchy em $(D(A),\|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$ tal que $\|x_n - \tilde{x}_n\|_{\frac{1}{2}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ então $\tilde{x}_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ na norma $\|\cdot\|$ de H.

Ainda, se $\{x_n\}$ é de Cauchy em $(D(A),\|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_{\frac{1}{2}} = a$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Então,

$$2\mathrm{Re}\langle Ax_n,x_m\rangle = \langle Ax_n,x_n\rangle + \langle Ax_m,x_m\rangle - \langle A(x_n-x_m),(x_n-x_m)\rangle \stackrel{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 2a^2$$

e $a = 0$ pois $\langle Ax_n, x_m\rangle \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Seja $H^{\frac{1}{2}} \subset H$ o conjunto de todos os $x \in H$ para os quais existe uma seqüência de Cauchy em $(D(A), \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$ com que converge para x na norma $\|\cdot\|$ de H.

Se x e $y \in H^{\frac{1}{2}}$ são limites na norma de H das seqüências de Cauchy $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ em $(D(A), \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$, defina $\|x\|_{\frac{1}{2}} := \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_{\frac{1}{2}}$ e $\langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}} := \lim\limits_{n\to\infty} \langle Ax_n, y_n\rangle$. Do que fizemos anteriormente, $\|x\|_{\frac{1}{2}} = 0$ se, e somente se $x = 0$.

É imediato que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}} : H^{\frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{K}$ define um produto interno e que $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}} : H^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}^+$ é a norma associada a este produto interno.

Se $\{x_n\}$ é de Cauchy em $(D(A), \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$ e $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ em H então

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_{\frac{1}{2}} = 0$$

Se $\{y_n\}$ é de Cauchy em $H^{\frac{1}{2}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in D(A)$ tal que $\|x_n - y_n\|_{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n}$. Como $\{x_n\}$ é de Cauchy em $H^{\frac{1}{2}}$ existe $x \in H^{\frac{1}{2}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\frac{1}{2}} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\|_{\frac{1}{2}} = 0$.

Segue que, o espaço $(H^{\frac{1}{2}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}})$ é um espaço de Hilbert, $D(A)$ é denso de $(H^{\frac{1}{2}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}})$ e a inclusão é uma isometria linear.

Assim, construímos um completamento $(H^{\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_{H^{\frac{1}{2}}})$ de $(D(A), \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$ que é um espaço de Hilbert continuamente imerso em H.

Seja $\tilde{D} = D(A^*) \cap H^{\frac{1}{2}}$. Como $D(A) \subset D(A^*)$, devemos ter que $D(A) \subset \tilde{D} \subset D(A^*)$. Definimos $\tilde{A}$ tomando a restrição de A^* a $\tilde{D}$ e mostraremos que $\tilde{A}$ é auto-adjunto.

Primeiramente mostremos que $\tilde{A}$ é simétrico. Se $x, y \in \tilde{D}$ existem seqüências $\{x_n\},\{y_n\}$ em $D(A)$ com $\|x_n - x\|_{\frac{1}{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\|y_n - y\|_{\frac{1}{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Segue que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\overbrace{\langle Ax_n, y_m\rangle}^{=\langle x_n,y_m\rangle_{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\overbrace{\langle Ax_n, y_m\rangle}^{=\langle x_n,y_m\rangle_{\frac{1}{2}}} = \langle x, y\rangle_{\frac{1}{2}}$$

existe e coincide com

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\langle Ax_n, y_m\rangle}_{\|} = \lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, \tilde{A}y\rangle = \langle x, \tilde{A}y\rangle \text{ e com}$$

$$\overbrace{\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, y_m\rangle} = \lim_{m\to\infty}\langle x, Ay_m\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle \tilde{A}x, y_m\rangle = \langle \tilde{A}x, y\rangle.$$

Assim $\tilde{A}$ é simétrico.

Para concluir a demonstração é suficiente mostrar que $\tilde{A}$ é sobrejetor e isto segue da seguinte forma. Seja $y \in H$ e considere o funcional $f : D(A) \to \mathbb{K}$ dado por $f(x) = \langle x, y \rangle$. Então f é um funcional linear contínuo relativamente à norma $\| \cdot \|_{\frac{1}{2}}$ e pode ser estendido a um funcional linear contínuo de $H^{\frac{1}{2}}$ e sendo assim, do Teorema de representação de Riesz, existe $y' \in H^{\frac{1}{2}}$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle_{\frac{1}{2}} = \langle Ax, y' \rangle, \ \forall x \in D(A).$$

Logo $y' \in D(A^*) \cap H^{\frac{1}{2}}$ e $A^* y' = \tilde{A} y' = y$ mostrando que $\tilde{A}$ é sobrejetor, portanto auto-adjunto.$\square$

Exemplo

Seja $X_0 = C([0,\pi],\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas e, para $x, y \in X_0$, defina o produto interno

$$X_0 \times X_0 \ni (x,y) \mapsto \langle x, y\rangle = \int_0^\pi x(s)y(s)ds \in \mathbb{R}.$$

O espaço $(X_0, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço com produto interno. Seja $L^2(0,\pi)$ um espaço de Hilbert obtido por completamento de $(X_0, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Será visto em um curso de Medida e Integração que um completamento possível é o espaço das classes de equivalência (pela relação de equivalência 'igualdade quase sempre') de funções cujo quadrado é Lebesgue integrável.

Se $T : (X_0, \langle, \cdot, \cdot\rangle) \to L^2(0, \pi)$ e $f, g \in L^2(0, \pi)$ existem seqüências $f_n, g_n \in X_0$ tal que

$$\|f\|^2_{L^2(0,\pi)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi |f_n(s)|^2 ds \quad \text{e} \quad \langle f, g\rangle_{L^2(0,\pi)} = \lim_{m,n\to\infty} \int_0^\pi f_n(s) g_m(s) ds$$

Diremos que $v \in L^2(0, \pi)$ tem derivada fraca de ordem m se existir $u \in L^2(0, \pi)$ tal que

$$\langle v, \phi^{(m)}\rangle_2 = (-1)^m \langle u, \phi\rangle_2, \ \forall \phi \in C_0^m(0, \pi).$$

Neste caso u é denotado por $v^{(m)}$.

Seja $H^1(0, \pi)$ o completamento de $C^1([0, \pi], \mathbb{R})$ relativamente à norma dada produto interno

$$C^1([0, \pi], \mathbb{R}) \times C^1([0, \pi], \mathbb{R}) \ni (u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_2 + \langle u', v'\rangle_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $\{u_n\}$ é de Cauchy em $H^1(0,\pi)$, $\{u_n\}$ e $\{u_n'\}$ são de Cauchy em $L^2(0,\pi)$. Sendo assim, são convergentes para u, g em $L^2(0,\pi)$.

Com isto, para toda $\phi \in C_0^1(0,\pi)$,

$$\langle u, \phi' \rangle_2 \stackrel{n\to\infty}{\longleftarrow} \langle u_n, \phi' \rangle_2 = -\langle u_n', \phi \rangle_2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\langle g, \phi \rangle_2.$$

Disto segue que u tem uma derivada fraca e $u' = g$. Assim, $\{u_n\}$ é convergente para u em $H^1(0,\pi)$.

Também pode ser mostrado que, se $u \in L^2(0,\pi)$ tem uma derivada fraca $u' \in L^2(0,\pi)$ então existe uma seqüência $\{u_n\}$ em $C^1([0,\pi],\mathbb{R})$ tal que $\|u_n - u\|_2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\|u_n' - u'\|_2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Definimos

$$H^1(0,\pi) \times H^1(0,\pi) \ni (u,v) \mapsto \langle u, v \rangle_2 + \langle u', v' \rangle_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $\phi \in H^1(0,\pi)$ então $\phi \in C([0,\pi],\mathbb{R})$ e é $\frac{1}{2}$-Hölder contínua. De fato existe $\phi_n \in C^1((0,\pi),\mathbb{R})$ com $\|\phi_n - \phi\|_{H^1(0,\pi)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| \leqslant \int_s^t |\phi_n'(\theta)| d\theta \leqslant (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\phi_n'\|_{L^2(0,\pi)}.$$

Do Teorema de Arzelá-Ascoli toda subseqüência de $\{\phi_n\}$ tem uma subseqüência uniformemente convergente para uma função em X_0 que deve coincidir com ϕ. Disto segue que a seqüência converge para ϕ e que

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leqslant (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\phi'\|_{L^2(0,\pi)}.$$

Exemplo

Seja $X = L^2(0, \pi)$ *e* $D(A_0) = C_0^2(0, \pi)$ *o conjunto das funções duas vezes continuamente diferenciáveis e que tem suporte compacto em* $(0, \pi)$. *Defina* $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ *por*

$$(A_0\phi)(x) = -\phi''(x), \quad x \in (0, \pi).$$

É fácil ver que A_0 é simétrico e que $\langle A_0\phi, \phi\rangle_2 \geqslant \frac{2}{\pi^2}\|\phi\|_X^2$, $\phi \in D(A_0)$. Do Teorema 1, A_0 possui uma extensão auto adjunta A que satisfaz $\langle A\phi, \phi\rangle_2 \geqslant \frac{2}{\pi^2}\|\phi\|_X^2$ para todo $\phi \in D(A)$.

Observe que o espaço $X^{\frac{1}{2}}$ do Teorema de Friedrichs é, neste exemplo o fecho de $D(A_0)$ na norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ é denotado por $H_0^1(0,\pi)$. $H_0^1(0,\pi) \subset H^1(0,\pi)$ com normas equivalentes. Se $\phi \in H^1(0,\pi)$, então ϕ é Hölder contínua com expoente $\frac{1}{2}$ e se $\phi \in H^1(0,\pi)$, $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$.

Por outro lado $D(A^*)$ é characterizado por

$$D(A_0^*)=\{\phi\in X : \exists\, \phi^*\in X \text{ tal que } \langle -u'',\phi\rangle=\langle u,\phi^*\rangle,\ \forall u\in D(A_0)\}$$

e $A_0^*\phi=-\phi''=\phi^*$, $\forall u\in D(A_0^*)$.

Assim, $D(A)=H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi)$ e $Au=-u''$, $\forall u\in D(A)$, no sentido fraco previamente definido.

Considerações sobre compactos e o Teorema de Riesz

Muitas soluções de problemas matemáticos importantes são obtidas como mínimos, máximos ou pontos fixos de funções definidas em espaços de dimensão infinita.

Desta forma a noção de compacidade desempenha um papel fundamental para a solução de inúmeras questões importantes em análise matemática.

Seja X um espaço vetorial normado e $\{f_1, \cdots, f_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de X.

Lema

Se $F = [f_1, \cdots, f_n]$ então F é completo.

Prova: Mostremos que existe $c > 0$ tal que

$$\sup\{\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \|_X : (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1\} \geqslant c.$$

Se não, existiria uma seqüência $\{(\alpha_1^k, \cdots, \alpha_n^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\sum_{i=1}^n |\alpha_i^k| = 1$ e tal que $\| \sum_{i=1}^n \alpha_i^k f_i \|_X \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Tomando subseqüências, podemos assumir que $\alpha_i^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_i$. Logo $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 1$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$ o que contradiz a independência linear de $\{f_1, \cdots, f_n\}$. Agora a completude de F segue facilmente.$\square$

Exercício

Se F é espaço vetorial normado de dimensão $n \in \mathbb{N}$ sobre K,

- *existe uma transformação linear contínua de F sobre $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$.*
- *todas as normas em F são equivalentes.*
- *todas as normas em $\mathbb{K}^n$ são equivalentes.*
- *$K \subset F$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.*