SMA-120 Introdução a Análise Funcional
Operadores simétricos e auto-adjuntos

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

09 de Outubro de 2025
Segundo Semestre de 2025

Operadores simétricos e auto-adjuntos

Seja H um espaço de Hilbert e $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \to \mathbb{K}$ o seu produto interno. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador densamente definido, o adjunto $A^\bullet : D(A^\bullet) \subset H \to H$ de A é definido por

$$D(A^\bullet) = \{u \in H : v \mapsto \langle Av, u \rangle_H : D(A) \to \mathbb{K} \text{ é limitado}\}$$

e, se $u \in D(A^\bullet)$, $A^\bullet u$ é o único elemento de H (Teorema de Representação de Riesz) tal que

$$\langle v, A^\bullet u \rangle_H = \langle Av, u \rangle_H, \forall v \in D(A).$$

Recorde a definição de Operador Dual

Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador densamente definido, o dual $A^* : D(A^*) \subset H \to H$ de A é definido por

$$D(A^*) = \{u \in H : v \mapsto \langle Av, u^* \rangle_{H,H^*} : D(A) \to \mathbb{K} \text{ é limitado}\}$$

e, se $u^* \in D(A^*)$, $A^* u^*$ é o único elemento de H tal que

$$\langle v, A^* u \rangle_{H,H^*} = \langle Av, u^* \rangle_{H,H^*}, \forall v \in D(A).$$

Relacionando Operadores Adjuntos e Duais

Proposição

Se H é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, $E : H \to H^*$ definido por $Eu(v) = \langle v, u \rangle_H$, é uma isometria linear-conjugada entre H e H^*. Identificaremos H e H^* identificando u com Eu.

Se $A^* : D(A^*) \subset H^* \to H^*$ é o dual de A, então $D(A^*) = E(D(A))$ e $A^\bullet = E^{-1} \circ A^* \circ E$ e $A^* = E \circ A^\bullet \circ E^{-1}$.

Prova: Se $u^* \in D(A^*)$ (Teorema de Rep. de Riesz) $u^* = Eu$ e

$$D(A) \ni v \mapsto \langle v, A^* u^* \rangle_{H,H^*} = \langle Av, u^* \rangle_{H,H^*} = \langle Av, Eu \rangle_{H,H^*} = \langle Av, u \rangle_H \in \mathbb{K}$$

é limitado. Segue que $u \in D(A^\bullet)$ e, para todo $v \in D(A)$,

$$\langle v, E^{-1} A^* Eu \rangle_H = \langle v, A^* u^* \rangle_{H,H^*} = \langle Av, u \rangle_H = \langle v, A^\bullet u \rangle.$$

Reciprocamente, se $u \in D(A^\bullet)$,

$$D(A) \ni v \mapsto \langle v, A^\bullet u \rangle_H = \langle Av, u \rangle_H = \langle Av, u \rangle_H = \langle Av, Eu \rangle_{H,H^*} \in \mathbb{K}$$

é limitado. Segue que $Eu \in D(A^*)$ e, para todo $v \in D(A)$,

$$\langle v, E^{-1} A^* Eu \rangle_H = \langle v, A^* Eu \rangle_{H,H^*} = \langle Av, Eu \rangle_{H,H^*} = \langle v, A^\bullet u \rangle.$$

Logo $D(A^*) = E(D(A))$ e $E^{-1} A^* Eu = A^\bullet u (EA^\bullet E^{-1} u^* = A^* u^*)$, $\forall u \in D(A)$ $(u^* \in D(A^*))$.$\square$

Observação

Note que, embora E e E^{-1} sejam operadores lineares-conjugados, $E^{-1} \circ A^* \circ E$ é linear por dupla conjugação.

Chamaremos ambos $A^\bullet$ e A^* de adjunto de A e denotaremos ambos por A^* mas é importante observar que, se $A = \alpha B$ então $A^\bullet = \bar{\alpha} B^\bullet$ enquanto que $A^* = \alpha B^*$.

Muitas vezes escreveremos A^* para denotar os operadores dual e adjunto, indistintamente. Nos referiremos a ambos como operador adjunto. Em espaços de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ eles são indistinguíveis.

Definição

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Diremos que um operador $A : D(A) \subset H \to H$ é simétrico (também chamado Hermitiano quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$; isto é, $\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$ para todo $x, y \in D(A)$. Diremos que A é auto-adjunto se $A = A^*$.

Proposição

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador auto-adjunto, injetor e com imagem densa, então A^{-1} é auto-adjunto.

Teorema

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador simétrico e sobrejetor, então A é auto-adjunto.

Prova: Primeiramente mostremos que A e A^* são injetores. Se $h \in D(A)$ e $Ah = 0$, temos que $\langle Ah, v\rangle = \langle h, Av\rangle$ para todo $v \in D(A)$ e consequentemente, do fato que $R(A) = H$ temos que $h = 0$. Para ver que A^* é injetor procedemos da mesma forma.

Agora mostremos que A é fechado. De fato, se $D(A)^* \supset D(A) \ni h_n \to h \in H$ e $Ah_n = A^* h_n \to g$, então $h \in D(A^*)$ e $A^* h = g$. Como A é sobrejetor, existe $w \in D(A)$ tal que $Aw = A^* w = A^* h$ e da injetividade de A^* temos que $w = h$. Com isto $h \in D(A)$ e $Ah = g$, mostrando que A é fechado.

Segue que do Teorema do Gráfico Fechado que a A tem inversa $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Claramente A^{-1} é auto-adjunto e da Proposição 2 segue que A é auto-adjunto.$\square$

O teorema a seguir e o Teorema 1 constituem as principais ferramentas para a obtenção de operadores auto-adjuntos.

Teorema (Friedrichs)

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador simétrico para o qual existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle Ah, h\rangle \leqslant \alpha\|h\|^2 \text{ ou } \langle Ah, h\rangle \geqslant \alpha\|h\|^2 \tag{1}$$

para todo $h \in D(A)$. Então A admite uma extensão auto-adjunta que preserva a limitação (1).