

SMA-120 INTRODUÇÃO A ANÁLISE FUNCIONAL  
AS CONSEQÜÊNCIAS DO LEMA DE BAIRE

Alexandre Nolasco de Carvalho  
Universidade de São Paulo  
São Carlos SP, Brazil

16 de Setembro de 2025  
**Segundo Semestre de 2025**

## TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA

## Definição (Aplicação Aberta e Fechada)

Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação linear.

- (1) Diremos que  $T$  será aberta se  $T(U)$  for aberto em  $Y$ , sempre que  $U$  for aberto em  $X$ .
- (2) Diremos que  $T$  será fechada se  $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$  for fechado em  $X \times Y$ .

## TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA

### Teorema (da Aplicação Aberta)

Seja  $X$  um espaço de Banach e  $Y$  um espaço vetorial normado. Se  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  e  $T(X)$  for de segunda categoria em  $Y$  então,

- (a)  $T$  será sobrejetora,
- (b)  $T$  será aberta e
- (c)  $Y$  será de segunda Categoria.

### Corolário

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach.

- (1) Se  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  for sobrejetora então,  $T$  será aberta.
- (2) Se  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  for bijetora então,  $T$  será um isomorfismo.

## TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA

## Lema

Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação linear então, são equivalentes:

- $T$  é uma aplicação aberta;
- Existe  $r > 0$  tal que  $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$ .

## Lema

Se  $X$  for Banach,  $Y$  for um espaço vetorial normado e  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  for tal que, para algum  $r > 0$ ,

$$B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$$

então,

$$B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset T(B_1^X(0)).$$

## TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA

**Prova do Teorema:**

Como  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^X(0)$ ,  $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^X(0))$  é de segunda categoria em  $Y$ .

Como  $Y \ni y \rightarrow ny \in Y$  é um isomorfismo que leva  $T(B_1^X(0))$  em  $T(B_n^X(0))$ , do Teorema de Baire  $T(B_1^X(0))$  não é nunca denso.

Ou seja, deve existir  $y_0 \in Y$  e  $r > 0$  tais que  $B_{2r}^Y(y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$ .

Segue que  $B_{2r}^Y(-y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$  e que  $B_{2r}^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$ .

Dos Lemas anteriores  $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$  e  $T$  é aberta. Segue imediatamente que  $T$  é sobrejetora e que  $Y$  é de segunda categoria.  $\square$

## TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA

### Corolário

*Se  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach e  $T \in L(X, Y)$  é bijetora, então  $T$  é um isomorfismo; isto é,  $T^{-1} \in L(Y, X)$ .*

## PRINCÍPIO DA LIMITAÇÃO UNIFORME

### Teorema (Princípio da Limitação Uniforme)

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$ .

- Se  $\{x \in X : \sup \{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\}$  for de segunda categoria então,  $\sup \{\|T\| : T \in A\} < \infty$ .
- Se  $X$  for Banach e  $\{x \in X : \sup \{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\} = X$  então,  $\sup \{\|T\| : T \in A\} < \infty$ .
- Se  $X$  for Banach,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $\{T_n x\}$  for convergente, para cada  $x \in X$ , e  $T : X \rightarrow Y$  for definida por  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  então,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  e  $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$ .

**Prova:** Provaremos a), b) e c) seguem de a). Seja

$$E_n = \{x \in X : \sup_{T \in A} \|Tx\| \leq n\} = \bigcap_{T \in A} \{x \in X : \|Tx\| \leq n\}.$$

Então, os  $E_n$ 's são fechados e como sua união contém um conjunto de segunda categoria devemos ter que algum  $E_n$  contém uma bola,  $[B_r(x_0)]^-$ ,  $r > 0$ .

Então  $E_{2n} \supset [B_r(0)]^-$  pois,  $\|x\| \leq r \Rightarrow x + x_0 \in [B_r(x_0)]^- \subset E_n$  e

$$\|Tx\| = \|T(x + x_0)\| + \|Tx_0\| \leq n + n = 2n, \quad \forall T \in A.$$

Logo  $\|Tx\| \leq 2n$  sempre que  $\|x\| \leq r$  e para todo  $T \in A$ . Segue que

$$\|T\| \leq \frac{2n}{r} \quad \forall T \in A. \quad \square$$

## Corolário

Se  $X$  é um espaço de Banach,  $B \subset X$  e  $f(B) = \{f(b) : b \in B\}$  é limitado para toda  $f \in X^*$ . Então  $B$  é limitado

**Prova:** Para cada  $b \in B$ , defina  $\hat{b} : X^* \rightarrow \mathbb{K}$  por

$$\hat{b}(f) = f(b), \quad \forall f \in X^*.$$

Então para cada  $f \in X^*$

$$\sup_{b \in B} |\hat{b}(f)| = \sup_{b \in B} |f(b)| < \infty$$

segue do Princípio da Limitação Uniforme que

$$\sup_{b \in B} \|\hat{b}\| = \sup_{b \in B} \|b\| < \infty. \quad \square$$

### Corolário

Seja  $X$  um espaço de Banach e  $B^* \subset X^*$ . Suponhamos que  $\forall x \in X$  o conjunto  $B^*(x) = \{b^*(x) : b^* \in B^*\}$  é limitado. Então  $B^*$  é limitado.

**Prova:** Por hipótese, para cada  $x \in X$ ,  $\sup_{b^* \in B^*} |b^*(x)| \leq c_x$ . Segue do Princípio da Limitação Uniforme que  $\sup_{b^* \in B^*} \|b^*\| < \infty$ .  $\square$

## TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

## Teorema (Gráfico Fechado)

*Se  $X$  e  $Y$  forem espaços de Banach e  $T : X \rightarrow Y$  for fechada então,  $T$  será limitada.*

**Prova:** Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  as projeções de  $G(T)$  em  $X$  e  $Y$ , isto é,  $\pi_1(x, T_x) = x$  e  $\pi_2(x, T_x) = T_x$ .

Obviamente  $\pi_1 \in \mathcal{L}(G(T), X)$  e  $\pi_2 \in \mathcal{L}(G(T), Y)$ .

Como  $X$  e  $Y$  são completos  $X \times Y$  é completo e portanto  $G(T)$  é completo (pois é fechado).

Como  $\pi_1$  é uma bijeção de  $G(T)$  em  $X$ ,  $\pi_1^{-1}$  é limitado. Então  $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$  é limitado.  $\square$

# OPERADORES DUAIS

A seguir recordamos a definição de operadores duais. Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados sobre um corpo  $\mathbb{K}$  com duais  $X^*$  e  $Y^*$ .

Se  $x^* \in X^*$  ( $y^* \in Y^*$ ) denotaremos o seu valor em um vetor  $x \in X$  ( $y \in Y$ ) por  $\langle x, x^* \rangle$  ( $\langle y, y^* \rangle$ ).

Note que  $(X \times Y)^* = X^* \times Y^*$ .

## Definição (Operador Dual)

Se  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  um operador linear densamente definido, o dual  $A^* : D(A^*) \subset Y^* \rightarrow X^*$  de  $A$  é o operador linear definido da seguinte forma:

$$D(A^*) = \{y^* \in Y^* : \exists z^* \in X^* \text{ tal que } \langle Ax, y^* \rangle = \langle x, z^* \rangle, \forall x \in D(A)\} \quad (1)$$

Se  $y^* \in D(A^*)$  definimos  $A^*y^* := z^*$  onde  $z^*$  é o (único) elemento de  $X^*$  satisfazendo (1). Desta forma,

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^*y^* \rangle, \forall x \in D(A) \text{ e } \forall y^* \in D(A^*)$$